Math. P.
502 nkb
Schlömilch

عم ۲۰ یتنور غفلت

Math. P. 502

COMPENDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS.

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,

PROFESSOR DER HÖHEREN MATHEMATIK A. D. K. POLYTECHN. SCHULE ZU DRESDEN,
MITGLIED D. K. S. GESELLSCH. D. WISSENSCH. ZU LEIPZIG &C.

IN ZWEI BÄNDEN.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITE,
VÖLLIG UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

ERSTEN BANDES DRITTE LIEFERUNG.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1 8 6 2.

Ankündigung.

Die gegenwärtige zweite Auflage meines Compendiums der höheren Analysis weicht von der ersten in materieller und formeller Beziehung so bedeutend ab, dass sie wohl als ein ganz neues Werk gelten kann. Was erstens den Inhalt betrifft, so mochte ich mich nicht wieder dem Vorwurfe aussetzen, dass kurze Abrisse einzelner wichtiger Theorieen, wie z. B. der elliptischen Functionen, der partiellen Differentialgleichungen etc. für ein auf das Nothwendigste beschränktes Studium zu viel, dagegen für ein tieferes Eingehen zu wenig bieten, und so blieb mir nur die Wahl, das Werk entweder auf ein Lehrbuch für den ersten Unterricht zu reduciren oder es zu einem ausführlichen Handbuche zu erweitern. Da es an Werken der ersten Art nicht fehlt, während aus neuerer Zeit fast keines der zweiten Art existirt (Moigno's Leçons sind bekanntlich unvollendet geblieben), so entschied ich mich für das Letztere; um gleichzeitig den Gebrauch des Werkes in Schule und Haus möglichst bequem zu machen, habe ich das ganze Material auf zwei Bände vertheilt. Der erste Band umfasst ungefähr soviel, als an Universitäten und polytechnischen Instituten in einem Jahre vorgetragen werden kann; sein Inhalt dürfte zum Studium der bekannteren Werke über analytische Mechanik, Ingenieurwissenschaften etc. ausreichen. Der zweite Band giebt eine ausführlichere Darstellung einzelner Theorieen, z. B. höhere Differentialquotienten, Mac Laurin's Theorem für complexe Variabele, die Reihen von Bürmann und Lagrange, halbconvergente Reihen, Fourier's Reihe (für reelle und complexe Variabele), Euler'sche Integrale, elliptische Functionen, vielfache Integrale, partielle Differentialgleichungen, Elemente der Variationsrechnung. — Ueber die Begründung der einzelnen und namentlich mehrerer fundamentalen Sätze der Differentialsowie der Integralrechnung ist schon von mehreren Seiten bemerkt worden, dass sie fast nirgends (selbst bei Cauchy und Moigno nicht) in voller Strenge zu finden sei; ich habe mir daher gerade nach dieser Richtung hin die äusserste Genauigkeit zur Pflicht gemacht und hoffe, auch den rigorosesten Anforderungen zu genügen. Begreiflicherweise musste deswegen die Anordnung des Stoffes sehr wesentliche Aenderungen erleiden und zugleich manche neue Betrachtung eingeschaltet werden; hoffentlich ist es mir gelungen, Einfachheit mit Strenge zu vereinigen. Auch im Uebrigen und besonders im zweiten Bande dürften sich eigenthümliche Entwickelungen ziemlich häufig finden. Schliesslich noch die Bemerkung, dass die Discussion einiger speciellen Punkte in der Vorrede zum ganzen Werke folgen wird.

Dresden, im October 1862.

Schlömilch.

Die neue Auflage von Professor Dr. Schlömilch's Compendium der höheren Analysis erscheint in zwei Bänden, von denen jeder für sich verkäuflich sein wird. Um das Werk, welches in erster Auflage ganz vergriffen war, nicht länger im Buchhandel fehlen zu lassen, hatten wir zunächst zwei Lieferungen des ersten Bandes ausgegeben. Die dritte Lieferung (der Schluss) des ersten Bandes erfolgt hiermit.

Der Preis dieser dritten Lieferung beträgt 1 Thlr., der des completten ersten Bandes 2 Thlr. 15 Sgr.

Braunschweig, October 1862.

Friedrich Vieweg und Sohn.

COMPENDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS.

Holzschnitte
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Math. P. 502 nkb

COMPENDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS.

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,
PROFESSOR DER HÖHEREN MATHEMATIK A. D. K. POLYTECHN. SCHULE ZU DRESDEN,
MITGLIED D. K. S. GESELLSCH. D. WISSENSCH. ZU LEIPZIG &C.

IN ZWEI BÄNDEN.

ERSTER BAND.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITE,
VÖLLIG UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1 8 6 1.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
Bayerische Staatsbibliothek München

Die Herausgabe einer Uebersetzung in englischer, französischer und anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

Vorrede zum ersten Bande.

Die gegenwärtige zweite Auflage meines Compendiums der höheren Analysis weicht von der ersten in materieller und formeller Beziehung so bedeutend ab, dass sie wohl als ein ganz neues Werk gelten kann. Was erstens den Inhalt betrifft, so mochte ich mich nicht dem Vorwurfe aussetzen, dass kurze Abrisse einzelner wichtiger Theorieen, wie z. B. der elliptischen Functionen, der partiellen Differentialgleichungen etc. für ein auf das Nothwendigste beschränktes Studium zu viel, dagegen für ein tieferes Eingehen zu wenig bieten, und so blieb mir nur die Wahl, das Werk entweder auf ein Lehrbuch für den ersten Unterricht zu reduciren oder es zu einem ausführlichen Handbuche zu erweitern. Da es an Werken der ersten Art nicht fehlt, während aus neuerer Zeit fast keines der zweiten Art existirt (Moigno's Leçons sind bekanntlich unvollendet geblieben), so entschied ich mich für das Letztere; um gleichzeitig den Gebrauch des Buches in Schule und Haus möglichst bequem zu machen, habe ich das ganze Material auf zwei Bände vertheilt. Der vorliegende erste Band umfasst ungefähr soviel, als an Universitäten und polytechnischen Instituten in einem Jahre vorgetragen werden kann; sein Inhalt dürfte zum Studium der bekannteren Werke über analytische Mechanik, Ingenieurwissenschaften etc. ausreichen. Der zweite Band wird

besonders wichtige Theorieen, wie z. B. die Lehre von den Functionen complexer Variabelen, die Reihen von Bürmann und Lagrange, die halbconvergenten Reihen, die periodischen Reihen, die elliptischen Functionen u. s. w. ausführlicher behandeln.

Ueber die Begründung der einzelnen und namentlich gewisser fundamentaler Sätze der Differential- sowie der Integralrechnung ist schon von mehreren Seiten bemerkt worden, dass sie fast nirgends (selbst bei Cauchy und Moigno nicht) in voller Strenge zu finden sei; ich habe mir daher gerade nach dieser Richtung hin die äusserste Genauigkeit zur Pflicht gemacht und hoffe, auch den rigorosesten Anforderungen zu genügen. Begreiflicherweise musste deswegen die Anordnung des Stoffes sehr wesentliche Aenderungen erleiden und zugleich manche neue Betrachtung eingeschaltet werden. In letzterer Beziehung verweise ich u. A. auf Einleitung Nro. IV und die §§. 11, 42, 45, 47, 49, 67, 82, 98, 102, wobei ich den Wunsch hinzufüge, dass es mir gelungen sein möge, Einfachheit mit Strenge zu vereinigen.

Dresden, im October 1862.

Dr. O. Schlömilch.

Inhalt.

		Seite
Einleitung.	I. Die veränderlichen Grössen und die Functionen	1
	II. Die einfachen Functionen	3
	III. Continuität und Discontinuität der Functionen [1])	6
	IV. Die Grenzwerthe der Functionen [2])	9
	V. Die Aenderungsgeschwindigkeit einer Function	14

Differentialrechnung.

Cap. I. Einfache Differentiation.

§. 1. Differenzen und Differentiale [3])	19
§. 2. Differentiation der einfachen algebraischen Functionen	23
§. 3. Differentiation der goniometrischen Functionen	25
§. 4. Differentiation der cyclometrischen Functionen	27
§. 5. Differentiation der Aggregate, Producte und Quotienten	29
§. 6. Differentiation der Functionen von Functionen [4])	32
§. 7. Anwendungen der vorigen Formeln	35

Historisches und Literarisches.

[1]) Den Begriff der Function und das Kennzeichen ihrer Continuität oder Discontinuität erörtert bei Gelegenheit einer anderen Untersuchung Lejeune-Dirichlet in Dove's Repertorium der Physik, Bd. I, S. 152.

[2]) Eine weitere elementare Ausführung dieser Lehre findet man in des Verf. Handbuch der algebraischen Analysis, 3. Aufl.; Jena, Frommann, 1862.

[3]) Ueber die Entstehungsgeschichte der Differentialrechnung und ihrer Symbolik vergl. Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, dargestellt von Dr. Gerhardt; Halle, Schmidt, 1848, sowie Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis Lagrange, dargestellt von Dr. Weissenborn; ebendas. 1856.

[4]) Uebungsbeispiele zu den meisten Partieen der höheren Analysis giebt Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., herausgegeben von Dr. Schnitzler; Halle, Schmidt, 1859.

Seite

§. 8. Zusammenhang zwischen einer Function und ihrem Differentialquotienten 40
§. 9. Differentiation der Functionen mehrerer Variabelen . . . 48
§. 10. Differentiation unentwickelter Functionen 53

Cap. II. Mehrfache Differentiationen.

§. 11. Grundbegriffe und Bezeichnungen 57
§. 12. Höhere Differentialquotienten der einfachsten Functionen 62
§. 13. Die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen 64
§. 14. Anwendungen der vorigen allgemeinen Formeln 66
§. 15. Successive Differentiation der Functionen mehrerer Variabelen 69
§. 16. Höhere Differentialquotienten unentwickelter Functionen 74
§. 17. Vertauschung der unabhängigen Variabelen 76
§. 18. Zusammenhang zwischen einer Function und ihren successiven Differentialquotienten 79

Cap. III. Untersuchungen über krumme Linien und Flächen.

§. 19. Der Lauf ebener Curven 83
§. 20. Bogendifferential, Tangenten, Asymptoten und Normalen ebener Curven 89
§. 21. Beispiele von Tangenten- und Normalenconstructionen . 93
§. 22. Krümmungskreis, Krümmungsmittelpunkt und Evolute . 96
§. 23. Formeln für Polarcoordinaten 101
§. 24. Beispiele zu den vorigen Formeln [5] 104
§. 25. Tangenten und Normalebenen an doppelt gekrümmten Linien 108
§. 26. Die Krümmung räumlicher Curven 112
§. 27. Tangentialebenen und Normalen an Flächen 119
§. 28. Die Krümmung der Flächen [6] 123
§. 29. Einhüllende Curven 130
§. 30. Einhüllende Flächen 135

[5]) Zahlreiche Beispiele zu den §§. 19 bis 24 enthält die Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der analytischen Geometrie (der Ebene) von L. J. Magnus; Berlin, Duncker und Humblot, 1833.

[6]) Weitere Untersuchungen über räumliche Curven und Flächen findet man in den Werken: Analytische Geometrie des Raumes von Dr. O. Böklen; Stuttgart, Becher, 1861. Application de l'Analyse à la Géometrie par G. Monge. Die neueste von Liouville besorgte Ausgabe dieses Werkes (Paris, Bachelier, 1850) enthält zugleich die berühmte Abhandlung: Disquisitiones générales circa superficies curvas, auct. C. F. Gauss, aus dem 6. Bde. der Commentatt. recent. Gotting. 1828.

Seite

Cap. IV. Die vieldeutigen Symbole.

§. 31. Die Formen $\frac{0}{0}$ und $\infty - \infty$ 140
§. 32. Die Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞ 142

Cap. V. Maxima und Minima.

§. 33. Maxima und Minima der Functionen einer Variabelen . 146
§. 34. Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabelen 153
§. 35. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen 161

Cap. VI. Die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§. 36. Grundbegriffe von endlichen und unendlichen Reihen . 168
§. 37. Reihen mit positiven Gliedern 172
§. 38. Reihen mit positiven und negativen Gliedern 177
§. 39. Bedingte und unbedingte Convergenz 180
§. 40. Convergenzbedingungen für periodische Reihen 183
§. 41. Addition und Multiplication unendlicher Reihen 186
§. 42. Die Differentiation unendlicher Reihen 191
§. 43. Die unendlichen Doppelreihen 198

Cap. VII. Die Potenzenreihen.

§. 44. Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin [7]) 206
§. 45. Der binomische Satz [8]) 211
§. 46. Die logarithmischen Reihen und die Exponentialreihen 216
§. 47. Goniometrische und cyclometrische Reihen 220
§. 48. Die Methode der unbestimmten Coefficienten 226
§. 49. Die unendlichen Producte für Sinus und Cosinus . . . 232
§. 50. Die Reihen für Tangente, Cotangente etc. 238
§. 51. Reihenentwickelungen für Functionen mehrerer Variabelen . 245
§. 52. Das Unendlichkleine 247

Cap. VIII. Die Functionen complexer Variabelen.

§. 53. Die algebraischen Functionen complexer Zahlen 251
§. 54. Anwendungen der vorigen Sätze 255

[7]) Die erste (für den gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft ungenügende) Herleitung der Taylor'schen Reihe beruht auf einem Satze der Differenzenrechnung und steht in den Methodus incrementorum, auct. B. Taylor; Londini 1715, Propos. VII, Coroll. II. Wie sich die Mängel dieser Entwickelung ergänzen lassen, zeigt Caqué im Journal de Mathématiques von Liouville, October 1845.

[8]) Eine ausführliche Untersuchung über den binomischen Satz, namentlich für den Fall eines complexen Exponenten, giebt Abel in Crelle's Journal d. Mathem. Bd. I, S. 311.

Seite
§. 55. Die Exponentialgrössen mit complexen Variabelen [9]) . . 258
§. 56. Die Logarithmen complexer Zahlen 262
§. 57. Die goniometrischen und cyclometrischen Functionen mit complexen Variabelen 263
§. 58. Differentiation complexer Ausdrücke 269
§. 59. Potenzenreihen mit imaginären Variabelen 274

Cap. IX. Die Zerlegung rationaler algebraischer Functionen in Factoren und Partialbrüche.

§. 60. Der Fundamentalsatz der Lehre von den algebraischen Gleichungen [10]) . 278
§. 61. Die Zerlegung ächt gebrochener Functionen 284
§. 62. Die Zähler der Partialbrüche 287
§. 63. Fortsetzung und Schluss 293

Integralrechnung.

Cap. X. Fundamentalsätze der Integralrechnung.

§. 64. Bestimmte und unbestimmte Integrale 299
§. 65. Die Fundamentalformeln 305
§. 66. Allgemeine Reductionsformeln 308
§. 67. Integration durch unendliche Reihen 311

Cap. XI. Integration rationaler algebraischer Functionen.

§. 68. Fixirung der Aufgabe; einfachste Fälle derselben . . . 316
§. 69. Folgerungen aus dem Vorigen 319
§. 70. Die Integration echt gebrochener Functionen 323

Cap. XII. Integration irrationaler Functionen.

§. 71. Einfachste Fälle 328
§. 72. Integration durch Wegschaffung des Wurzelzeichens . . 332
§. 73. Integration binomischer Differentiale 337
§. 74. Integration mittelst unendlicher Reihen 341

[9]) Ueber die von Gauss gefundene anschauliche Bedeutung der complexen Zahlen s. einen Aufsatz von Drobisch in den Sitzungsberichten d. K. S. Gesellschaft d. Wissenschaften, Bd. II (Jahrg. 1848) S. 171, womit des Verf. Darstellung in seinem Handbuche d. algebr. Anal. 3. Aufl. §. 58, der Hauptsache nach, übereinstimmt.

[10]) Für diesen Satz hat Gauss drei Beweise gegeben, den ersten in seiner Doctordissertation: Demonstratio nova etc. Helmstadii 1799, die beiden anderen in den Comment. Gotting. a. 1816, pag. 107 und pag. 135. Der im Texte mitgetheilte Beweis ist der Legendre-Cauchy-Sturm'sche.

Seite

Cap. XIII. Integration transcendenter Functionen.

§. 75. Differentiale mit Exponentialgrössen 347
§. 76. Logarithmische Differentiale 350
§. 77. Rein goniometrische Differentiale 352
§. 78. Gemischt goniometrische Differentiale 358
§. 79. Cyclometrische Differentiale [11]) 363

Cap. XIV. Geometrische Anwendungen einfacher Integrationen.

§. 80. Quadraturen in Parallelcoordinaten 366
§. 81. Quadraturen in Polarcoordinaten 373
§. 82. Näherungsweise Quadraturen [12]) 376
§. 83. Rectification ebener Curven in Parallelcoordinaten . . . 381
§. 84. Rectification ebener Curven in Polarcoordinaten 386
§. 85. Rectification doppelt gekrümmter Linien 387
§. 86. Die Cubatur begrenzter Volumina 391
§. 87. Die Complanation von Cylinderflächen 396
§. 88. Die Complanation der Umdrehungsflächen 399

Cap. XV. Die einfachen bestimmten Integrale.

§. 89. Definitionen und Werthbestimmungen [13]) 406
§. 90. Fundamentaleigenschaften bestimmter Integrale 410
§. 91. Substitution neuer Variabelen in bestimmten Integralen 416
§. 92. Die Differentialquotienten bestimmter Integrale 421
§. 93. Verwandlung von bestimmten Integralen in Reihen [14]) . 427
§. 94. Reihensummirungen durch bestimmte Integrale 432

Cap. XVI. Die mehrfachen bestimmten Integrale.

§. 95. Die Doppelintegrale und ihre Anwendung zur Cubatur begrenzter Räume 439
§. 96. Die Umkehrung der Integrationenfolge 445

[11]) Bei unbestimmten Integrationen überhaupt (§§. 68 bis 79) leistet gute Dienste die Sammlung von Integraltafeln herausgegeben v. Dr. F. Minding; Berlin, Reimer, 1849.

[12]) Ueber die Methode von Gauss siehe Commentat. societ. Gotting. Vol. III (1816) und eine Abhandlung von Jacobi in Crelle's Journal Bd. I, S. 301. Elementarer gehalten ist die Darstellung von Magnus in dem unter Nro. 5 erwähnten Werke.

[13]) Hinsichtlich der Definition des bestimmten Integrales siehe die in der ersten Note citirte Abhandlung von Lejeune-Dirichlet.

[14]) Die Theorie der einfachen bestimmten Integrale ist am erschöpfendsten dargestellt in dem Exposé de la théorie des intégrales définies, par Bierens de Haan. Amsterdam, Van der Post, 1862. Von demselben Verf. erschien ebendas. 1858 eine Sammlung bestimmter Integralformeln: Tables d'intégrales définies.

Seite

§. 97. Doppelintegrale in Polarcoordinaten 452
§. 98. Substitution neuer Variabelen in Doppelintegralen . . 457
§. 99. Die Complanation der Flächen 463
§. 100. Complanationsformel für Polarcoordinaten 468
§. 101. Die dreifachen Integrale 471
§. 102. Substitution neuer Variabelen in dreifachen Integralen 476

Cap. XVII. Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabelen.

§. 103. Grundbegriffe; Trennung der Variabelen 483
§. 104. Substitution einer neuen Variabelen 487
§. 105. Substitution zweier neuen Variabelen 491
§. 106. Vom integrirenden Factor 494
§. 107. Differentialgleichungen verschiedener Grade 498
§. 108. Die singulären Auflösungen der Differentialgleichungen 504
§. 109. Integration durch Versuche 509
§. 110. Integration durch Reihen 513

Cap. XVIII. Differentialgleichungen höherer Ordnungen zwischen zwei Variabelen.

§. 111. Differentialgleichungen zweiter Ordnung; einfachste Formen . 519
§. 112. Fortsetzung und Schluss 525
§. 113. Die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung . 530
§. 114. Zusammenhang zwischen den beiden particulären Integralen . 534
§. 115. Die Variation der Constanten 537
§. 116. Nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . 539
§. 117. Differentialgleichungen höherer Ordnungen 542
§. 118. Die Variation der Constanten [15]) 544

Cap. XIX. Differentialgleichungen mit mehreren Variabelen.

§. 119. Integration der simultanen Gleichungen erster Ordnung 549
§. 120. Simultane Differentialgleichungen höherer Ordnungen 553

[15]) Eine Reihe von Beispielen und allgemeinere Untersuchungen über die Integration von Differentialgleichungen findet man in den Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, par M. Moigno. Tome 2. Paris, Bachelier, 1844.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Einleitung.

I. Die veränderlichen Grössen und die Functionen.

Aus der elementaren Arithmetik ist hinreichend bekannt, dass zwischen zwei gegebenen Zahlen beliebig viel neue Zahlen eingeschaltet und deren Differenzen beliebig klein gemacht werden können; man darf sich daher an jeder Stelle der Zahlenreihe eine Zahl denken oder, mit anderen Worten, die ganze Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ ist als eine ununterbrochene anzusehen. Demnach kann auch der Uebergang von irgend einer Zahl a zu einer anderen b ohne Unterbrechung, d. h. so erfolgen, dass alle zwischen a und b denkbaren Zahlen getroffen worden sind; ein solcher Uebergang heisst ein stetiger (continuirlicher) und lässt sich passend mit dem Durchlaufen einer geraden Linie ab vergleichen, weil bei dieser Bewegung ebenfalls alle zwischen a und b liegenden Punkte der Geraden getroffen werden. Zufolge dieser Bemerkungen ist es möglich, sich eine veränderliche Zahl x vorzustellen, welche erst den Werth a besass und nachher durch stetigen Uebergang den Werth b erhielt; eine solche Zahl heisst eine continuirliche Variabele und wird gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabetes bezeichnet. Zahlen dagegen, denen man den Charakter stetiger Aenderung nicht beilegen will und welche daher als relativ unveränderlich gelten sollen, nennt man Constanten und bezeichnet sie mit den ersten Buchstaben des Alphabetes.

Sind zwei veränderliche Zahlen x und y durch eine Gleichung verbunden, welche auf der einen Seite y allein enthält, wie z. B.

$$1)\qquad y = \frac{(x-a)^2}{2b},$$

so entspricht jedem willkührlich angenommenen Werthe des x ein aus der Gleichung selbst folgender Werth des y, welcher eben desshalb nicht willkührlich ist; in diesem Falle heisst x die unabhängige, y die abhängige Variabele, und um anzudeuten, dass es x ist, wovon y abhängt, nennt man y eine Function von x. Man bezeichnet diess durch eine Gleichung von der Form

$$y = F(x) \text{ oder } y = f(x),\ y = \varphi(x) \text{ u. dgl.},$$

womit also nichts weiter gesagt sein soll, als dass jedem Werthe des x ein bestimmter Werth von y zugehört, gleichgültig, wo letzterer hergekommen ist.

Wenn ferner drei veränderliche Zahlen x, y, z durch eine Gleichung verbunden sind, die auf der einen Seite z allein enthält, wie z. B.

$$2)\qquad z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b},$$

so hängen die verschiedenen Werthe des z gleichzeitig von denen des x und des y ab; dann heisst z eine Function der beiden unabhängigen Variabelen x und y und wird im Allgemeinen bezeichnet durch

$$z = F(x, y) \text{ oder } z = f(x, y) \text{ u. s. w.}$$

Auf ganz analoge Weise lassen sich Functionen von drei, vier und überhaupt beliebig viel Variabelen bilden.

Für alle Functionen gilt noch die Bemerkung, dass die unabhängigen Variabelen immer als stetig veränderlich angesehen werden; ob die abhängige Variabele dieselbe Eigenschaft besitzt, entscheidet sich in jedem besonderen Falle durch die individuelle Natur der Function, und bedarf daher einer speciellen Untersuchung (s. Abschnitt III.).

Mit Hülfe der analytischen Geometrie ist es übrigens sehr leicht, sich ein Bild von jeder gegebenen Function zu verschaffen, vorausgesetzt, dass letztere eine oder höchstens zwei unabhängige Variabele enthält; man braucht nur die vorkommenden Variabelen als die Coordinaten eines veränderlichen Punktes, und die zwischen den Variabelen bestehende Gleichung als Gleichung einer Curve oder Fläche anzusehen. So wird z. B. durch die Gleichung 1) eine Parabel ausgedrückt, und überhaupt kann $y = f(x)$ als Gleichung irgend einer ebenen Curve gelten; der Gleichung 2) entspricht ferner ein hyper-

bolisches Paraboloid, allgemeiner ist $z = F(x, y)$ die Gleichung irgend einer Fläche. Bei einer Function von drei oder mehr Variabelen wie z. B. $u = \varphi(x, y, z)$ hört die Möglichkeit einer geometrischen Darstellung auf, weil der Raum nur drei Dimensionen besitzt.

II. Die einfachen Functionen.

Nimmt man mit einer Variabelen x die vier arithmetischen Grundoperationen vor, so entstehen die vier einfachsten Functionen

$$a + x, a - x, bx, \frac{b}{x},$$

die man aber nicht besonders zu unterscheiden pflegt, weil sie in der gemeinschaftlichen Form $a + bx^m$ begriffen sind. Ferner liefert die Potenz zwei verschiedene Functionen, je nachdem die Basis oder der Exponent als variabel angesehen wird; die erste dieser Functionen, nämlich x^μ, führt in der Analysis ausschliesslich den Namen Potenz, während die zweite, a^x, Exponentialgrösse genannt wird. Denkt man sich ferner die Logarithmen als Functionen der Zahlen, so hat man noch die Function ${}^a\!log\, x$, worin das oben angesetzte a die Basis des logarithmischen Systemes bezeichnen soll.

Man weiss ferner aus der Geometrie, dass sich jeder Bogen eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises in Theilen des Halbmessers, d. h. durch eine absolute Zahl ausdrücken lässt; man kann daher auch jede Zahl als Maass eines solchen Kreisbogens ansehen und die goniometrischen Linien desselben aufsuchen. In diesem Sinne hat jede absolute Zahl ihren Sinus, Cosinus u. s. w., z. B.

$$sin\,(1{,}570796\,.\,.) = sin\,\frac{\pi}{2} = sin\,90^0 = 1,$$

$$cos\,(1{,}047197\,.\,.) = cos\,\frac{\pi}{3} = cos\,60^0 = 0{,}5,$$

$$tan\,3 = tan\,171^0\,53'\,14''\,4 = -\,0{,}1425467,$$

und es entstehen so die goniometrischen Functionen der Zahl u, nämlich $sin\,u$, $cos\,u$, $tan\,u$, $cot\,u$, $sec\,u$, $csc\,u$.

Umgekehrt kann man auch eine Variabele x als Maass einer trigonometrischen Linie betrachten und den zugehörigen Bogen aufsuchen; hierdurch entstehen die sogenannten cyclometrischen Functionen. Sehen wir z. B. x als die Länge eines Sinus an, so entspricht demselben ein bestimmter, im ersten Quadranten liegender Bogen, welcher mit $arcsin\,x$ bezeichnet und positiv oder negativ

genommen werden möge, je nachdem x positiv oder negativ ist. Nach dieser an keiner Vieldeutigkeit leidenden Bezeichnung ist z. B.

$$\arcsin(+\tfrac{1}{2}) = +\frac{\pi}{6}, \qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Ebenso bedeutet $\arccos x$ den kleinsten Bogen, welcher x zum Cosinus hat, z. B.

$$\arccos\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = +\frac{\pi}{4}, \qquad \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Ferner ist unter $\arctan x$ derjenige im ersten Quadranten liegende Bogen zu verstehen, welcher x zur Tangente hat, und zwar mit demselben Vorzeichen, wie x genommen, z. B.

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\arctan\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Dem Vorigen analog kann man noch die Functionen $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcsec} x$ etc. bilden, doch sind letztere wenig im Gebrauch.

Da in den Lehrbüchern der Trigonometrie keine Rücksicht auf die cyclometrischen Functionen genommen zu werden pflegt, so mögen hier die betreffenden Hauptrelationen folgen.

Ein im ersten Quadranten liegender Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, hat $\sqrt{1-x^2}$ zum Cosinus, daher gilt die Gleichung:

1) $$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}.$$

Das Complement des Bogens $\arcsin x$ hat x zum Cosinus, mithin ist

2) $$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wenn x den Sinus eines Bogens darstellt, so hat derselbe Bogen eine Tangente $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; diess giebt

3) $$\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Einer Tangente $= z$ entspricht umgekehrt ein Sinus $= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, d. h.

4) $$\arctan z = \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

wie man auch aus Nr. 4) durch Substitution von $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = z$ er-

hält. Derselbe Bogen, welcher z zur Tangente hat, besitzt eine Cotangente $= \frac{1}{z}$, mithin ist

5) $$\operatorname{arctan} z = \operatorname{arccot} \frac{1}{z};$$

das Complement dieses Bogens hat z zur Cotangente, folglich

6) $$\operatorname{arctan} z + \operatorname{arccot} z = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Aehnliche Formeln für $\operatorname{arcsec} x$ und $\operatorname{arccsc} x$ sind leicht zu entwickeln.

Für zwei im ersten Quadranten liegende Bögen u und v sei

$$\sin u = x, \quad \text{mithin } u = \arcsin x,$$
$$\sin v = y, \quad \text{„} \quad v = \arcsin y,$$

man hat dann

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$
$$= x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2},$$

und auf ganz ähnliche Weise

$$\cos(u+v) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} - xy = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} + xy}.$$

An dem Vorzeichen des letzten Ausdrucks erkennt man, ob die Bögen u und v zusammengenommen einen Bogen des ersten, oder des zweiten Quadranten geben; im ersten Falle ist

$$u + v = \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)$$

oder vermöge der Werthe von u und v

7) $$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right),$$
$$x^2 + y^2 \leqq 1.$$

Liegt dagegen $u + v$ im zweiten Quadranten, so folgt

$$u + v = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)$$

oder

8) $$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right),$$
$$x^2 + y^2 \geqq 1.$$

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung gelangt man zu der Formel

9) $$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2}\right),$$

bei welcher es keiner Unterscheidung bedarf, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Ist ferner bei zwei im ersten Quadranten liegenden Bögen u und v

$$\tan u = x, \quad \text{mithin } u = \arctan x,$$
$$\tan v = y, \quad \text{„} \quad v = \arctan y,$$

so hat man

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Im Falle $xy < 1$ ist, liegt $u + v$ im ersten Quadranten, und dann folgt

$$u + v = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

oder vermöge der Werthe von u und v

10) $$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy \leqq 1.$$

Wenn dagegen $xy > 1$ ist, so fällt $u + v$ in den zweiten Quadranten, und man hat dann

$$u + v = \pi - \arctan \frac{x+y}{xy-1},$$

d. i.

11) $$\arctan x + \arctan y = \pi - \arctan \frac{x+y}{xy-1}, \quad xy \geqq 1.$$

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung gelangt man zu der Formel

12) $$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy},$$

für welche keine Unterscheidung nöthig ist.

III. Continuität und Discontinuität der Functionen.

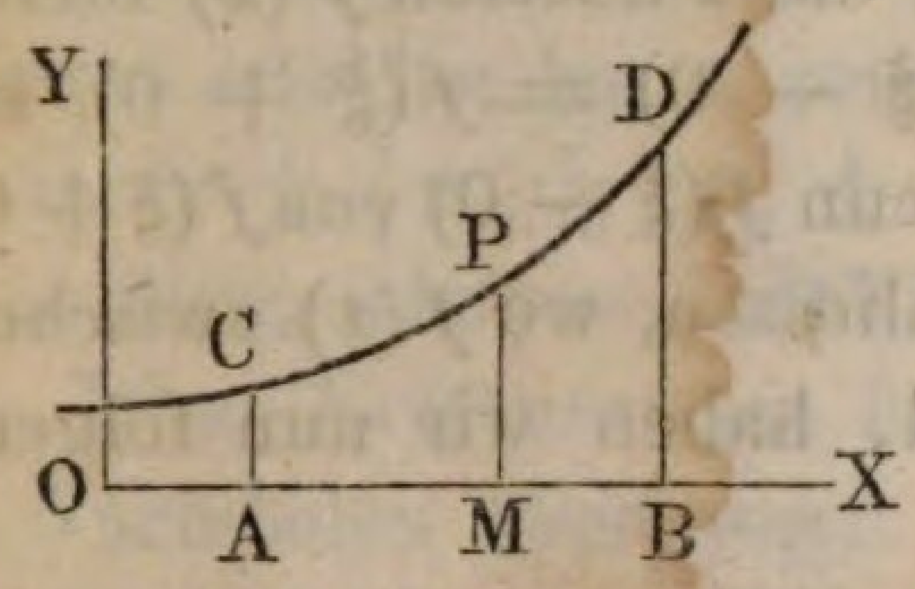
Wie bereits in Nr. I. erwähnt wurde, gelten die unabhängigen Variabelen jederzeit als stetig veränderlich; ob diese Eigenschaft der Continuität auch den abhängigen Variabelen zukommt, ist dagegen eine andere Frage, die wir jetzt discutiren wollen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Sache unter dem geometrischen Gesichtspunkte und denken uns die Gleichung

$$y = f(x)$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen ebenen

Curve; sollte letztere aus mehreren Zweigen bestehen, so fassen wir jeden derselben einzeln in's Auge.

Fig. 1.



Sind nun in Fig. 1 $OA = a$ und $OB = b > a$ zwei beliebige Abscissen und $AC = f(a)$, $BD = f(b)$ die zugehörigen Ordinaten, so können bezüglich des Curvenstückes CD nur zwei Fälle eintreten; die Curve geht nämlich entweder in einem ununterbrochenen Zuge von C nach D, oder sie erleidet auf dieser Strecke Unterbrechungen. Im ersten Falle nennen wir $f(x)$ continuirlich, von $x = a$ bis $x = b$, im zweiten Falle discontinuirlich.

Die genannten Unterbrechungen können aus verschiedenen Ursachen eintreten. Es ist erstens möglich, dass $f(a)$ und $f(b)$ reell sind, dass aber $f(x)$ für gewisse, zwischen a und b liegende Werthe von x imaginär wird. Ein Beispiel hierzu liefert die Gleichung

$$y = \sqrt{(x-1)(x-3)},$$

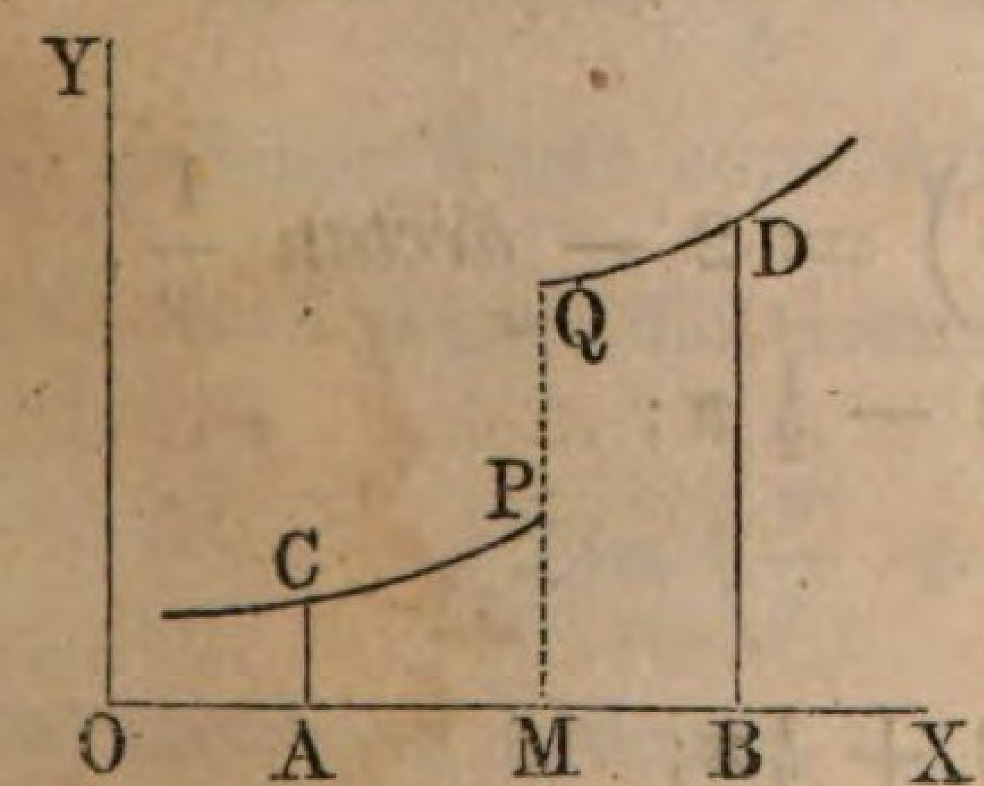
welche sowohl für $x < 1$ als für $x > 3$ reelle y, dagegen für $1 < x < 3$ imaginäre y liefert; von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 4$ verläuft also die Curve nicht in einem Zuge. Hierher gehören auch die Curven mit isolirten Punkten, z. B.

$$y = (x-2)\sqrt{(x-1)(x-3)};$$

diese Curve ist gleichfalls imaginär zwischen $x = 1$ und $x = 3$, besitzt aber in der Mitte des genannten Intervalles einen reellen Punkt mit den Coordinaten $x = 2$ und $y = 0$.

Aber selbst in dem Falle, wo $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ reell bleibt, kann eine Discontinuität eintreten, sobald nämlich an einer Stelle $OM = \xi$ die Ordinate sprungweis von einem Werthe MP zu einem anderen MQ übergeht (Fig. 2). Zu jener Abscisse gehören hier plötzlich zwei verschiedene Ordinaten, während ausserdem jeder Abscisse nur eine Ordinate entspricht; die erste Ordinate MP beschliesst die bisherige Reihe der Ordinaten, die zweite MQ bildet den Anfang einer neuen Reihe. Berücksichtigt man, dass jedes $x < \xi$ durch $\xi - \gamma$, und jedes $x > \xi$ durch $\xi + \delta$ dargestellt werden kann, so ist es

Fig. 2.



nur consequent, die Coordinaten von P mit

$$OM = \xi - 0, \quad MP = f(\xi - 0),$$

und die Coordinaten von Q mit

$$OM = \xi + 0, \quad MQ = f(\xi + 0)$$

zu bezeichnen. Demnach kann man sagen, die Function $f(x)$ bleibt an der Stelle $x = \xi$ continuirlich, wenn $f(\xi - 0) = f(\xi + 0)$, sie wird dagegen für $x = \xi$ discontinuirlich, wenn $f(\xi - 0)$ von $f(\xi + 0)$ verschieden ist. Indem wir den Fall ausschliessen, wo $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ theilweis imaginär wird, haben wir nun folgenden Satz:

Wenn die Differenz

$$f(x + \delta) - f(x - \gamma)$$

mit γ und δ gleichzeitig verschwindet, und zwar bei allen von $x = a$ bis $x = b$ gehenden Werthen des x, so ist die Function $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles continuirlich; giebt es dagegen zwischen a und b einen oder mehrere Werthe des x, bei denen jene Differenz sich nicht annullirt, so erleidet $f(x)$ für jeden derartigen Werth eine Unterbrechung der Continuität.

So ändert sich z. B. die Function $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ discontinuirlich beim Ueberschreiten der Stelle $x = 1$, denn es ist

$$f(1 - \gamma) = -\frac{1}{\gamma}, \qquad f(1 - 0) = -\infty,$$

$$f(1 + \delta) = +\frac{1}{\delta}, \qquad f(1 + 0) = +\infty;$$

demnach findet hier ein Sprung von $-\infty$ nach $+\infty$ statt.

Ein zweites Beispiel liefert die Function

$$f(x) = 2 + \arctan \frac{1}{x - 1},$$

wobei der auf S. 4 angegebene Sinn des Zeichens $\arctan$ streng festzuhalten ist. Man erhält

$$f(1 - \gamma) = 2 + \arctan\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = 2 - \arctan \frac{1}{\gamma},$$

$$f(1 - 0) = 2 - \arctan \infty = 2 - \tfrac{1}{2}\pi;$$

$$f(1 + \delta) = 2 + \arctan \frac{1}{\delta},$$

$$f(1 + 0) = 2 + \arctan \infty = 2 + \tfrac{1}{2}\pi;$$

an der Stelle $x = 1$ geht also die Curve sprungweis von $2 - \frac{1}{2}\pi$ nach $2 + \frac{1}{2}\pi$. Ganz ähnlicher Art ist die allgemeinere Function

$$f(x) = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi} \, arctan \, \frac{a}{x-a},$$

bei welcher an der Stelle $x = a$ eine discontinuirliche Aenderung von $f(a - 0) = b$ nach $f(a + 0) = c$ eintritt.

Dass eine Function auch mehrmalige Unterbrechungen der Continuität erleiden kann, zeigt das Beispiel $f(x) = tan\, x$; an den Stellen $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi$ etc. geht nämlich $tan\, x$ von $-\infty$ nach $+\infty$ über, wie aus den Elementen der Trigonometrie bekannt ist.

Diese Erörterungen lassen sich ohne Mühe auf Functionen mehrer Variabelen übertragen. Insbesondere bei Functionen zweier Variabelen ist die geometrische Bemerkung von Nutzen, dass eine stetig gekrümmte Fläche mit jeder Verticalebene eine continuirlich verlaufende Durchschnittslinie bilden muss.

IV. Die Grenzwerthe der Functionen.

Wenn in der Function $\frac{a}{x}$ die Variabele x in's Unendliche wächst, so nimmt der Functionswerth beständig ab, und zwar in der Weise, dass er kleiner als jeder noch so kleine willkührlich gewählte Bruch werden kann, wofern nur x gross genug genommen wird. Kürzer drückt man diess durch die Worte aus: „Bei unendlich wachsenden x convergirt $\frac{a}{x}$ gegen die Null“ oder „für $x = \infty$ ist der Grenzwerth von $\frac{a}{x}$ gleich Null“; die letztere Form lässt sich in einer Gleichung darstellen, wenn man die Worte „Grenzwerth von“ irgendwie abkürzt, entweder deutsch durch Gr. oder lateinisch durch *Lim.* (von *limes*), und man schreibt daher

$$Lim \frac{a}{x} = 0, \qquad \text{für } x = \infty.$$

In gleicher Weise convergirt der etwas zusammengesetztere Ausdruck $\frac{a}{x} + b$ gegen die Grenze b, d. h.

$$Lim \left(\frac{a}{x} + b\right) = b, \qquad \text{für } x = \infty;$$

dem entsprechend bedeutet die Gleichung

$$Lim\, f(x) = \lambda, \quad (x = \infty),$$

dass der Unterschied zwischen der Constanten λ und der Function

$f(x)$ kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden kann, wenn x in's Unendliche wächst. Geometrisch heisst diess, die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, hat eine in der Entfernung λ parallel zur x-Achse liegende Asymptote.

Der Kürze wegen bezeichnen wir im Folgenden eine unendlich wachsende Zahl mit ω, eine gegen die Null convergirende Zahl dagegen mit δ oder ϑ. Wir wollen nun einige Grenzwerthe untersuchen, die später sich als wichtig zeigen werden.

A. In der identischen Gleichung

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b}$$

$$= a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \cdots + a b^{m-1} + b^m$$

möge $a > b$ sein; die rechte Seite erhält dann einen zu grossen Werth, wenn man überall a statt b setzt, mithin ist

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} < (m+1) a^m$$

oder durch Wegschaffung des Bruches und Vereinigung aller der Grössen, welche a^m enthalten,

1) $$[a - (m+1)(a-b)]\, a^m < b^{m+1}.$$

Die Substitutionen $a = 1 + \frac{1}{m}$, $b = 1 + \frac{1}{m+1}$ erfüllen die Bedingung $a > b$ und geben

2) $$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$$

folglich, wenn der Reihe nach $m = 1, 2, 3$ etc. gesetzt wird,

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 < \cdots$$

Man ersieht hieraus, dass der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ fortwährend wächst, wenn ω das Gebiet der natürlichen Zahlen durchläuft.

Die Formel 1) giebt ferner für $a = 1 + \frac{1}{2n}$, $b = 1$, $m = n$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 1 \text{ oder } \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2$$

und durch Erhebung auf's Quadrat

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

Nach Nr. 2) ist nun um so mehr

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4;$$

es mag also m gerade oder ungerade sein, jedenfalls beträgt $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ weniger als 4. Der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$ wird demnach, trotz seines fortwährenden Wachsthums, nicht unendlich gross, und muss desshalb gegen eine bestimmte endliche Grenze convergiren, die > 2 aber $\leqq 4$ ist. Bezeichnen wir dieselbe mit e, wo nun e eine zwar nicht genau bekannte, aber sicher existirende absolute Zahl ist, so haben wir für unendlich wachsende ganze positive ω die Gleichung

$$3) \qquad Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right] = e.$$

Ist ω keine ganze, aber wenigstens eine positive Zahl, so giebt es immer zwei auf einander folgende ganze positive Zahlen σ und τ $(= \sigma + 1)$, zwischen denen ω liegt; man hat dann

$$1+\frac{1}{\sigma} > 1+\frac{1}{\omega} > 1+\frac{1}{\tau},$$

mithin auch

$$\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^\omega > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left(1+\frac{1}{\tau}\right)^\omega.$$

Zugleich lässt sich ω unter der doppelten Form $\omega = \sigma + \alpha$ und $\omega = \tau - \beta$ darstellen, wo α und β ächte Brüche bezeichnen, die sich zur Einheit ergänzen; die vorige Ungleichung wird dann zur folgenden

$$\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{\sigma+\alpha} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau-\beta}$$

wofür man schreiben kann

$$\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^\sigma\right]^{1+\frac{\alpha}{\sigma}} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^\tau\right]^{1-\frac{\beta}{\tau}}.$$

Bei unendlich wachsenden ω nehmen auch die ganzen Zahlen σ und τ in's Unendliche zu; die Ausdrücke $\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^\sigma$ und $\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^\tau$ convergiren nach Nr. 3) gegen die gemeinschaftliche Grenze e, und $\frac{\alpha}{\sigma}$ sowie $\frac{\beta}{\tau}$ haben die Null zur gemeinschaftlichen Grenze. Hieraus zusammen folgt die Gleichung

4) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e,$$

welche nunmehr auch für nicht ganze positive unendlich wachsende ω besteht.

Ist ω eine negative unendlich werdende Zahl, so kann man $\omega = -(\varrho + 1)$ setzen, wo ϱ eine positive unendlich wachsende (ganze oder nicht ganze) Zahl bedeutet; man hat dann

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1-\frac{1}{\varrho+1}\right)^{-(\varrho+1)}=\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}\left(1+\frac{1}{\varrho}\right).$$

Der Grenzwerth des ersten Factors rechter Hand ist e, der des zweiten die Einheit, mithin ergiebt sich wieder

5) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e,$$

und damit ist bewiesen, dass die vorstehende Gleichung für jedes irgendwie unendlich werdende ω gilt.

Der numerische Betrag von e kann nach Nr. 5) näherungsweis berechnet werden, wenn man für ω eine grosse Zahl setzt, und die angedeutete Potenzirung ausführt; doch erreicht man damit keine bedeutende Genauigkeit. Nach einem anderen Verfahren, welches in §. 7 zur Sprache kommen wird, findet man sehr leicht

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

Nicht selten stellt man die Gleichung 5) in einer anderen Form dar, welche dadurch entsteht, dass man $\frac{1}{\omega}=\delta$ setzt, wo nun δ eine gegen die Null convergirende Zahl bezeichnet; es ist dann

6) $$Lim\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]=e.$$

B. Indem man die identische Gleichung

$$\frac{log\,(1+\delta)}{\delta}=log\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]$$

beachtet, gelangt man mit Hülfe von Nr. 6) zu folgender Formel

7) $$Lim\,\frac{log\,(1+\delta)}{\delta}=log\,e.$$

C. Wenn ϑ irgend eine gegen die Null convergirende Zahl bedeutet, so hat a^{ϑ} die Einheit und $a^{\vartheta}-1$ die Null zur Grenze; man kann daher

$$a^{\vartheta}-1=\delta,\ \text{mithin}\ \vartheta={}^{a}log\,(1+\delta)$$

setzen. Hieraus folgt

$$\frac{a^\vartheta - 1}{\vartheta} = \frac{\delta}{{}^a log\,(1+\delta)} = \frac{1}{\frac{{}^a log\,(1+\delta)}{\delta}}$$

und durch Uebergang zur Grenze für gleichzeitig unendlich abnehmende ϑ und δ

8) $$Lim\,\frac{a^\vartheta - 1}{\vartheta} = \frac{1}{{}^a log\, e}.$$

D. Die Formeln 7) und 8) können noch zur Bestimmung des Grenzwerthes von $\frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta}$ benutzt werden, worin δ eine irgendwie gegen die Null convergirende Zahl bedeutet. Es ist nämlich identisch

$$\frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu\,\frac{a^{\mu\, log\,(1+\delta)} - 1}{\mu\, log\,(1+\delta)} \cdot \frac{log\,(1+\delta)}{\delta},$$

wobei zur Abkürzung *log.*, statt ${}^a log.$ geschrieben wurde; setzt man weiter $\mu\, log\,(1+\delta) = \vartheta$, so hat man auch

$$\frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu\,\frac{a^\vartheta - 1}{\vartheta} \cdot \frac{log\,(1+\delta)}{\delta}$$

und hierin bedeutet ϑ eine Grösse, welche gleichzeitig mit δ verschwindet. Durch Uebergang zur Grenze erhält man unter Anwendung der Formeln 7) und 8)

9) $$Lim\,\frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu.$$

E. Wir wollen endlich noch die Grenze aufsuchen, welcher sich das Verhältniss $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ in dem Falle nähert, wo ϑ gegen die Null convergirt. Denken wir uns unter ϑ vorläufig einen beliebigen Bogen des ersten Quadranten, so haben wir die Ungleichung

$$\sin\vartheta < \vartheta < \tan\vartheta$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{\sin\vartheta} > \frac{1}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

mithin durch Multiplication mit $\sin\vartheta$

$$1 > \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} > \cos\vartheta.$$

Da bei verschwindenden ϑ die einschliessenden Grössen 1 und $\cos\vartheta$ den gemeinschaftlichen Werth 1 haben, so folgt

10) $$Lim\,\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1.$$

Die Formeln 7), 8), 9) und 10) genügen für die späteren Untersuchungen.

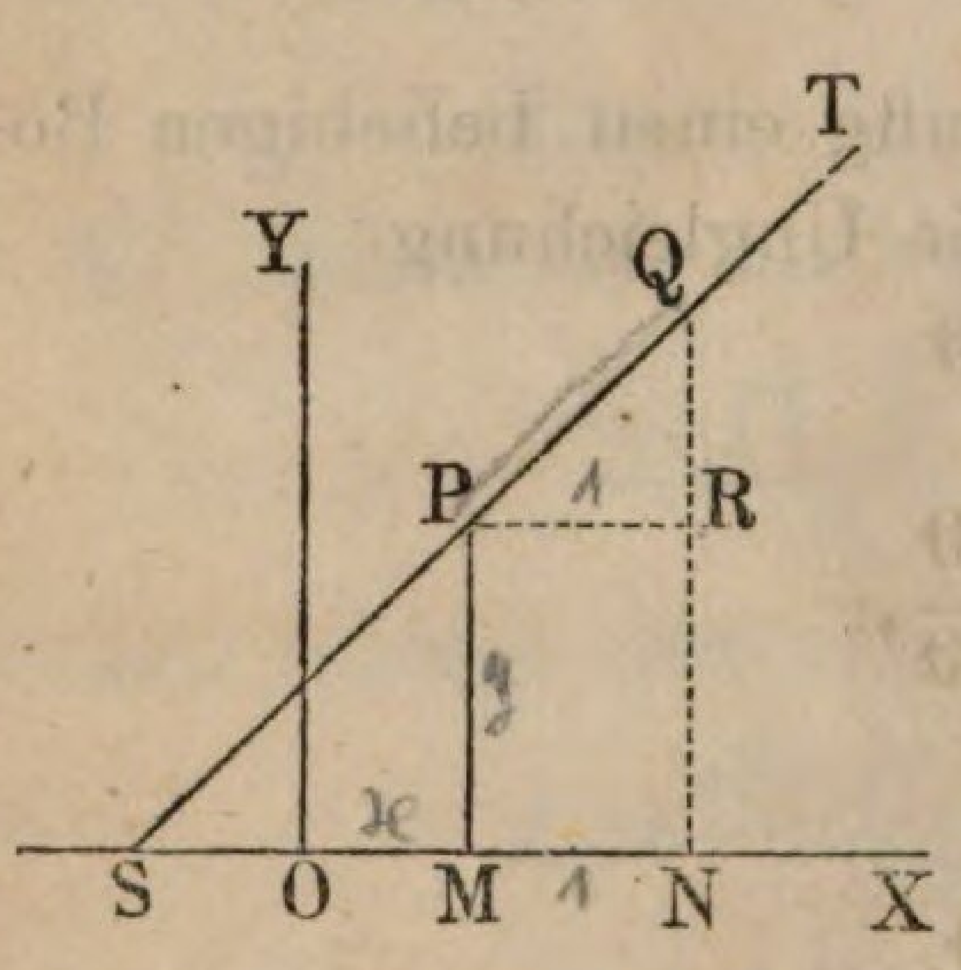
V. Die Aenderungsgeschwindigkeit einer Function.

Schon die oberflächliche Ansicht verschiedener Curven zeigt mannichfaltige Arten der Ordinatenveränderung; während z. B. die Ordinaten der Parabel fortwährend zunehmen, die Curve also steigt, hat die Sinuslinie ($y = \sin x$) unendlich viel Punkte, in denen ein Uebergang von Wachsthum zu Abnahme der Ordinaten stattfindet. Ja selbst bei Curven von gleicher Gattung können die Ordinatenänderungen auf sehr verschiedene Weise vor sich gehen. So z. B. steigen die Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ gleichzeitig, man wird aber von der zweiten sagen, dass sie rascher als die erste steigt, auch findet noch insofern ein wesentlicher Unterschied statt, als die erste Parabel ihre hohle Seite, die zweite dagegen ihre erhabene Seite gegen die Abscissenachse kehrt. Um nun jenen noch unbestimmten Begriff der Geschwindigkeit des Wachsthums festzustellen, betrachten wir vorerst die Gerade, deren Gleichung $y = ax + b$ sein möge. Hier ist unmittelbar einleuchtend, dass die Steigung immer dieselbe bleibt; ihr Maass kann man einfach dadurch ausdrücken, dass man angiebt, um wieviel die Ordinate wächst, wenn die Abscisse um die Einheit zunimmt. (Steigungen von Strassen werden bekanntlich auf dieselbe Art ausgedrückt.) Nehmen wir in Fig. 3 $OM = x$, $MP = y$, $MN = PR = 1$, so ist QR die entsprechende Ordinatenzunahme, also die Steigung, und zwar findet man leicht

$$QR = \tan QPR = a;$$

in der That hängt dieser Ausdruck nicht von x ab und bleibt daher constant für alle Punkte der Geraden.

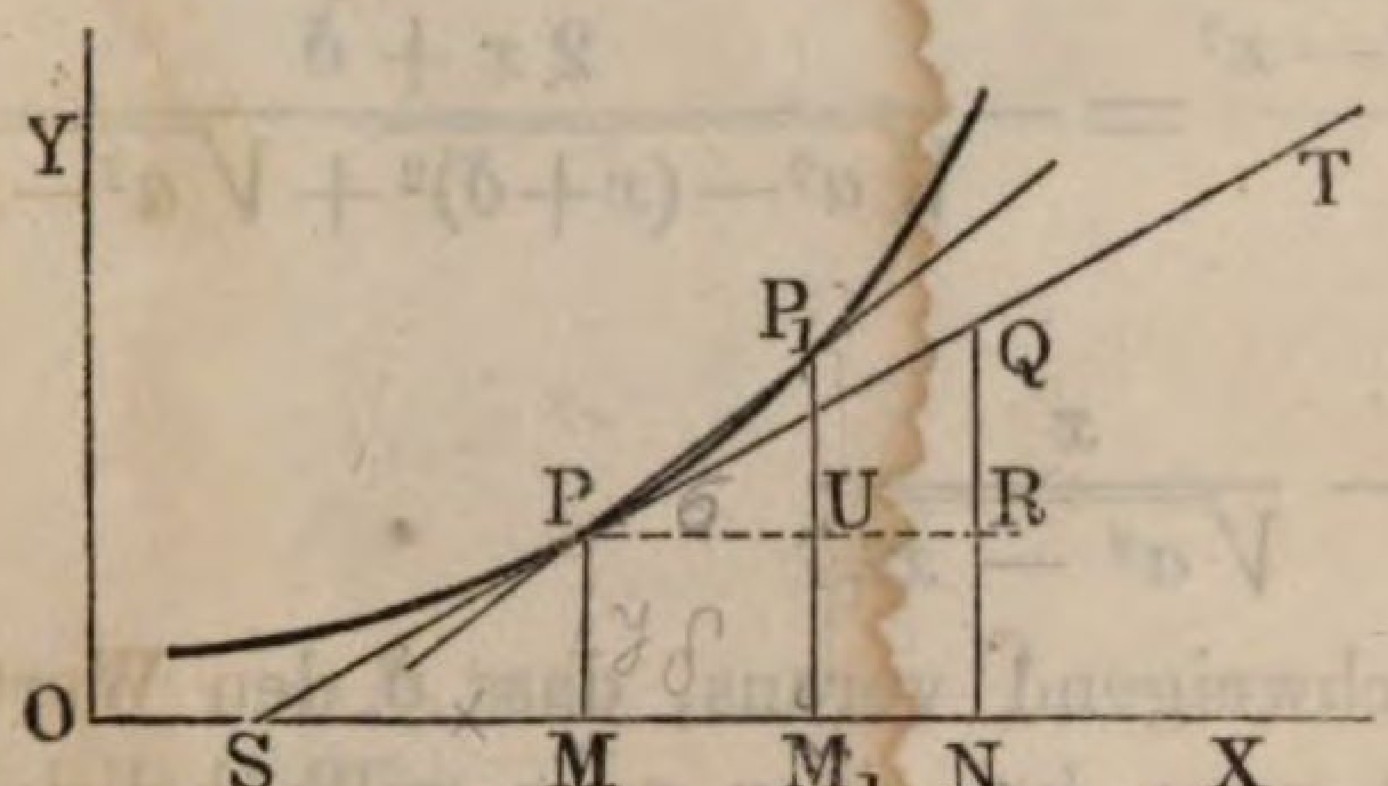
Fig. 3.



Denken wir uns ferner eine Curve durch stetige Fortbewegung eines Punktes entstanden, während gleichzeitig die Richtung der Bewegung sich continuirlich ändert, so wird die momentane Bewegungsrichtung jederzeit durch die zugehörige Tangente an der Curve dargestellt. Es sei nun PT (Fig. 4) die Tangente der Curve im Punkte P und die vorige Construction auf diese Tangente angewandt, so ist QR diejenige Zunahme der Ordinate MP, welche der Abscissenzu-

nahme $MN = 1$ entsprechen würde, wenn die Curve von P aus in ihre Tangente verliefe, also in die gleichmässig steigende Gerade PT überginge. Nennen wir wiederum QR die Steigung der Curve im Punkte P, so kommt es darauf an, den Winkel zu finden, welchen die Tangente PT mit der Abscissenachse einschliesst; die trigonometrische Tangente dieses Winkels, multiplicirt mit der Längeneinheit, wäre dann das gesuchte Maass für die Geschwindigkeit der Steigung oder überhaupt der Aenderung.

Fig. 4.



Zur Kenntniss des genannten Winkels führt die Bemerkung, dass eine Gerade, die zwei Punkte einer Curve verbindet, also eine Secante, zur Tangente wird, sobald die Endpunkte der abgeschnittenen Sehne zusammenfallen. Demgemäss verbinden wir den gegebenen Curvenpunkt P mit einem zweiten, willkührlich auf der Curve gewählten Punkte P_1 und bestimmen zunächst den Winkel $P_1 P U = \sigma$, welchen die Secante PP_1 mit der Abscissenachse bildet; unter Einführung der Bezeichnungen $OM = x$, $MP = y = f(x)$ und $MM_1 = \delta$ erhalten wir

$$1)\qquad \tan\sigma = \frac{P_1 U}{PU} = \frac{M_1 P_1 - MP}{MM_1} = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$

Lassen wir jetzt δ in Null übergehen, so dreht sich die Secante um den festbleibenden Punkt P, und wird für $\delta = 0$ zur Tangente; gleichzeitig verwandelt sich σ in den Winkel zwischen Tangente und Abscissenachse, welcher τ heissen möge. Wollte man in Nr. 1, geradezu $\delta = 0$ setzen, so würde man rechter Hand das unbestimmte und nichtssagende Resultat $\frac{0}{0}$ erhalten; man thut daher besser nur anzudeuten, dass schliesslich $\delta = 0$ werden soll, also zu schreiben

$$2)\qquad \tan\tau = \left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}\right]_{(\delta = 0)}.$$

In jedem speciellen Falle bedarf es der wirklichen Ausführung der angedeuteten Operationen, wie die folgenden Beispiele zeigen werden. Für $f(x) = x^2$ hat man zunächst

$$\tan\sigma = \frac{(x+\delta)^2 - x^2}{\delta} = 2x + \delta,$$

mithin für $\delta = 0$

$$tan\,\tau = 2\,x.$$

Ferner ist, wenn $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ genommen wird,

$$tan\,\sigma = \frac{\sqrt{a^2-(x+\delta)^2} - \sqrt{a^2-x^2}}{\delta} = -\frac{2\,x+\delta}{\sqrt{a^2-(x+\delta)^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$$

mithin für $\delta = 0$

$$tan\,\tau = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die Formel 2) setzt stillschweigend voraus, dass δ den Werth Null erreichen könne; diess ist zwar bei einer ganz willkührlichen Grösse möglich, würde jedoch in dem Falle unthunlich werden, wo δ abhängig ist, wie z. B. wenn es einen aliquoten Theil einer anderen Grösse ausmacht. Dann bildet aber die Null wenigstens die Grenze, welcher δ beliebig nahe gebracht werden kann, und in demselben Sinne ist τ die Grenze von σ, mithin wird man statt der Gleichung 2) schreiben

$$3)\qquad tan\,\tau = Lim\,\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$

Hierunter ist auch die Gleichung 2) mitbegriffen, wenn man sich in den Fällen, wo $\delta = 0$ werden kann, vorstellt, dass δ seinen Grenzwerth wirklich erreicht habe.

DIFFERENTIALRECHNUNG.

Cap. I.

Einfache Differentiation.

§. 1.

Differenzen und Differentiale.

Zufolge unserer einleitenden Betrachtungen ist es der Quotient

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

dessen Grenzwerth eine wichtige Rolle bei den Fragen nach den Aenderungen einer Function spielt, und der zugleich eine geometrische Bedeutung gewinnt, wenn die Gleichung $y=f(x)$ als Gleichung einer ebenen Curve betrachtet wird. Das häufige Vorkommen jenes Grenzwerthes macht nun zunächst eine kurze Bezeichnung desselben nöthig, und man ist daher übereingekommen, ihn mit $f'(x)$ zu bezeichnen, so dass also die Gleichung

$$1) \qquad f'(x) = Lim \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

die Definition von $f'(x)$ enthält. So ist z. B. nach Abschn. V der Einleitung

wenn $f(x)=ax+b, \qquad f'(x)=a,$

„ $f(x)=x^2, \qquad f'(x)=2x,$

„ $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}, \qquad f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$

überhaupt nennt man $f'(x)$ die abgeleitete oder derivirte Function im Gegensatze zu der ursprünglichen Function $f(x)$.

Eine andere Symbolik ist aus der Bemerkung entsprungen, dass die Grösse δ, welche einen Zuwachs des x bedeutet, auch als Unter-

schied zweier verschiedenen Werthe des x betrachtet werden kann, nämlich als die Differenz zwischen dem neuen Werthe $x + \delta$ und dem früheren Werthe x. Bezeichnet man überhaupt die Differenz zweier gleichartigen Grössen durch $\varDelta$, so ist die Differenz zweier verschiedenen Werthe des x mit $\varDelta_x$ zu bezeichnen, wobei $\varDelta$ den numerischen Betrag der Differenz darstellt und die angehangene Marke x anzeigt, dass es verschiedene x sind, welche um $\varDelta$ differiren. Consequenter Weise bezeichnet hiernach $\varDelta_y$ die Differenz zweier verschiedenen y, von denen das eine dem x, das andere dem $x + \varDelta_x$ entspricht; vermöge der Gleichung $y = f(x)$ ist dieses $\varDelta_y = f(x + \varDelta_x) - f(x)$ mithin

$$\frac{\varDelta_y}{\varDelta_x} = \frac{f(x + \varDelta_x) - f(x)}{\varDelta_x}.$$

Der grösseren Bequemlichkeit wegen pflegt man $\varDelta x$ und $\varDelta y$ statt $\varDelta_x$ und $\varDelta_y$ zu schreiben, wobei man sich nur zu hüten hat, $\varDelta x$ und $\varDelta y$ für Producte anzusehen. Die Grössen $\varDelta x$ und $\varDelta y$ heissen die Differenzen von x und y; der auf der linken Seite der Gleichung

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

vorkommende Quotient wird folglich der Differenzenquotient genannt.

Wenn nun $\delta = \varDelta x$ gegen die Null convergirt, so nähert sich auch $\varDelta y$ der Grenze Null, und daher wird

$$Lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = f'(x);$$

um jedoch die beständige Wiederholung der Sylbe *Lim.* zu ersparen, schreibt man $\frac{dy}{dx}$ statt $Lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$, also

2) $$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Hier bedeuten dx und dy Differenzen, an welchen die Bedingung unendlicher Abnahme haftet; derartige Differenzen heissen Differentiale. Jedes Differential ist demnach nichts weiter, als eine gegen die Null convergirende Differenz.

Die Gleichung 2) sagt, dass der Differentialquotient und die derivirte Function einander gleich sind, dass also die Verschiedenheit allein in der Schreibweise liegt. Durch die Benutzung des Zeichens $\frac{dy}{dx}$ werden die auszuführenden Rechnungsoperationen nur

angedeutet, während $f'(x)$ das fertige Resultat angiebt, z. B.

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x;$$

der Sinn der Gleichung 2) ist demnach ein ganz ähnlicher, wie z. E. bei $3^2 = 9$, $\sqrt{25} = 5$ und dergl.

Dem Vorigen zufolge sind der Differenzenquotient und sein Grenzwerth, der Differentialquotient, so lange von einander verschieden als Δx und Δy endliche Werthe haben, jedoch beträgt dieser Unterschied um so weniger, je kleiner Δx und Δy genommen werden. Setzt man daher

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} = \varrho,$$

so ist ϱ eine Grösse, deren Grenze die Null wird, sobald Δx und Δy gegen die Null convergiren. Aus Nr. 3) folgt weiter

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \varrho\right) \Delta x$$

oder wegen Nr. 2)

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x + \varrho\, \Delta x;$$

lassen wir Δx und Δy wieder gegen die Null convergiren, d. h. zu Differentialen werden, so verschwindet ϱ und es bleibt

4) $$dy = f'(x)\, dx$$

d. h. je kleiner die Aenderung dx ist, um so genauer wird die Aenderung dy gleich dem Producte $f'(x)\, dx$. Die geometrische Interpretation dieses Satzes lautet (Fig. 4): Je näher der Punkt P_1 dem Punkte P liegt, um so eher darf man ihn als einen Punkt der Tangente PT ansehen. Aus der Differentialgleichung 4), verglichen mit Nr. 2), geht noch hervor, dass man mit den veränderlichen, gegen die Null convergirenden Grössen dx und dy ebenso multiplicirt und dividirt, als wären sie bestimmte Zahlen; hierin besteht ein nicht geringer Vortheil der obigen Bezeichnung.

Nach diesen Erörterungen kommt es nun darauf an, die verschiedenen einfachen und zusammengesetzteren Functionen wirklich zu differenziren, d. h. ihre Differentialquotienten aufzusuchen. Bevor wir dazu schreiten, wollen wir noch einen Blick auf die geometrische Bedeutung der derivirten Function werfen; namentlich mögen die Fälle untersucht werden, wo die ursprüngliche Function eine ebene Fläche oder ein Volumen bedeutet.

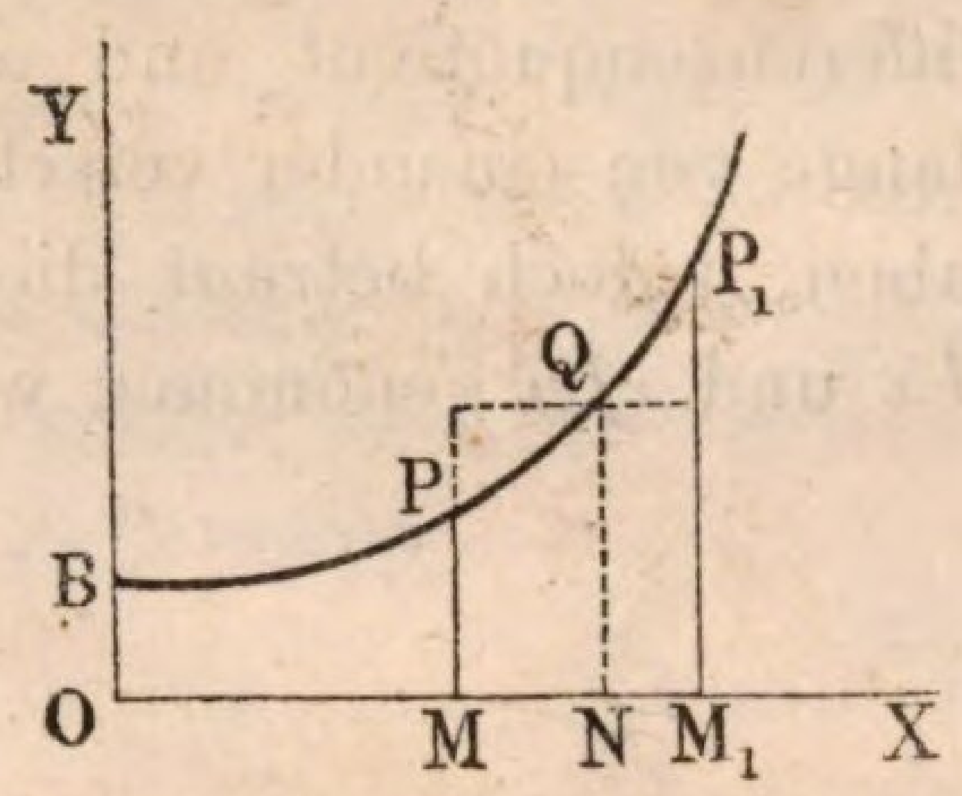
In Fig. 5 (a. f. S.) sei $OM = x$, $MP = f(x)$, und die über

der Abscisse stehende Fläche $BOMP = F(x)$; ändert sich die Abscisse um $MM_1 = \Delta x$, so ist

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \text{Fläche } MM_1P_1P.$$

Diese Fläche kommt einem Rechtecke gleich, welches Δx zur Grundlinie und eine zwischen MP und M_1P_1 liegende, wenn auch sonst nicht näher bekannte Ordinate NQ zur Höhe hat; demnach ist $MM_1P_1P = NQ . \Delta x$ und

Fig. 5.



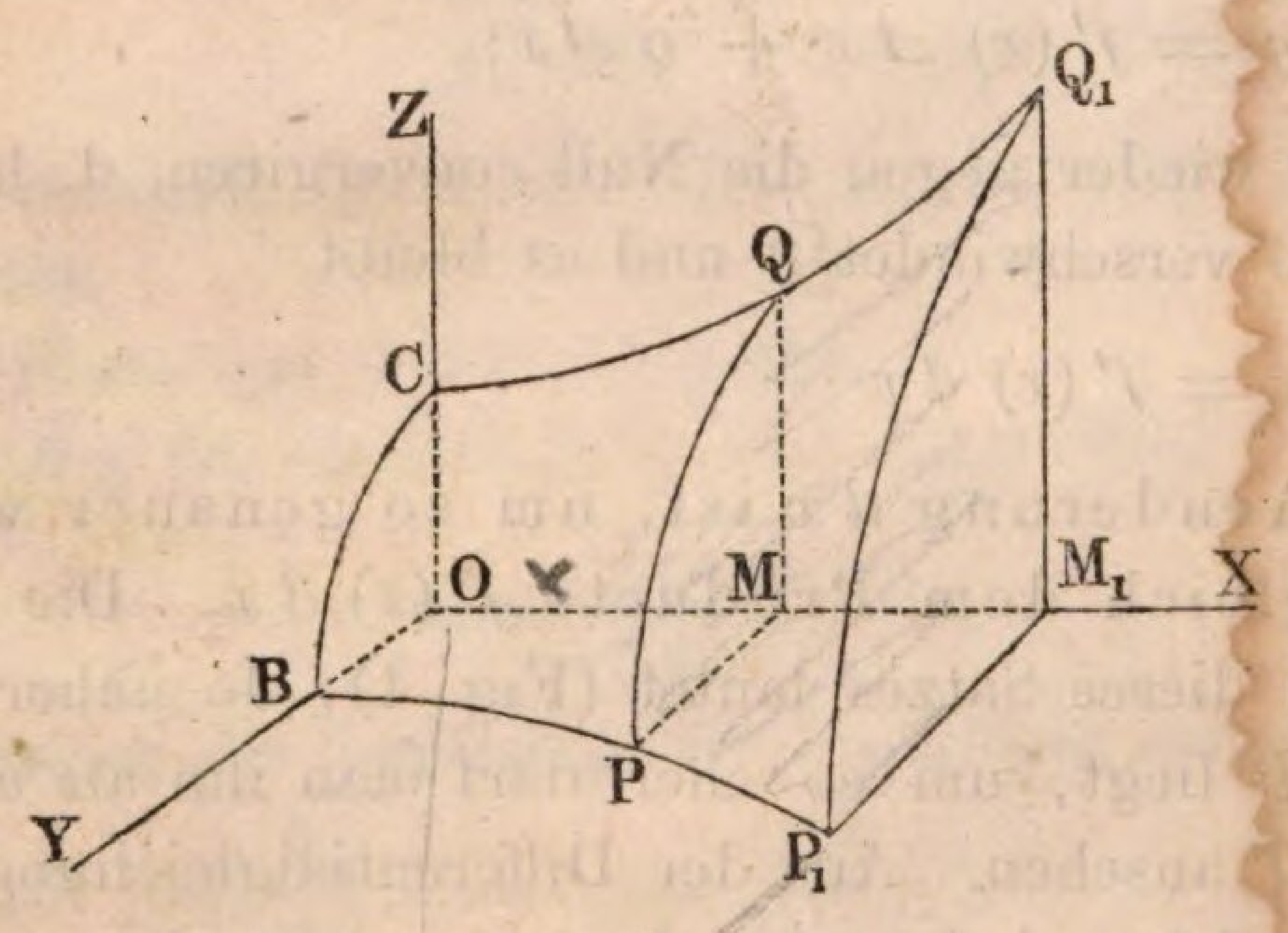
$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = NQ.$$

Bei verschwindenden Δx fallen die drei Ordinaten M_1P_1, NQ und MP in die einzige $MP = f(x)$ zusammen und es bleibt

$$F'(x) = f(x).$$

Die derivirte Function bedeutet also im vorliegenden Falle die letzte Ordinate.

Fig. 6.



In Fig. 6 sei wieder $OM = x$, die Querschnittsfläche $MPQ = \varphi(x)$ und das Volumen, welches zwischen den Querschnitten OBC und MPQ enthalten ist, $= \psi(x)$; der Aenderung $MM_1 = \Delta x$ entspricht dann die Volumenzunahme

$$\psi(x + \Delta x) - \psi(x) = \text{Vol. } MPQQ_1P_1M_1.$$

Das letztere Volumen lässt sich einem Cylinder vergleichen, welcher Δx zur Höhe (oder Dicke) und einen zwischen MPQ und $M_1P_1Q_1$ eingeschalteten Querschnitt zur Basis hat; nennen wir S die Fläche dieses mittleren Querschnittes, so ist das Volumen $MPQQ_1P_1M_1 = S . \Delta x$, mithin,

$$\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = S.$$

Bei verschwindenden Δx fallen die Querschnitte $M_1P_1Q_1 = \varphi(x + \Delta x)$, S und $MPQ = \varphi(x)$ zusammen, mithin bleibt

$$\psi'(x) = \varphi(x).$$

Betrachtet man die unabhängige Variabele x immer als Abscisse, so hat man jetzt folgende Sätze:

Der Differentialquotient eines Volumens ist dessen letzter Querschnitt; der Differentialquotient einer ebenen Curvenfläche ist deren letzte Ordinate; der Differentialquotient einer Curvenordinate ist die trigonometrische Tangente des letzten Berührungswinkels.

§. 2.

Differentiation der einfachen algebraischen Functionen.

I. Differentiation einer Constanten. Wenn $f(x)$ für jedes x denselben Werth a behält, also constant bleibt, so ist auch $f(x + \Delta x) = a$, mithin $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Hier findet bei abnehmenden Δx weiter keine Aenderung statt, mithin ist

$$1)\qquad \frac{da}{dx} = 0 \text{ und } da = 0.$$

II. Differentiation der Potenz. Als Differenzenquotienten von x^μ erhält man augenblicklich

$$\frac{\Delta(x^\mu)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{\mu - 1}$$

oder, wenn zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ gesetzt wird,

$$\frac{\Delta(x^\mu)}{\Delta x} = \frac{(1 + \delta)^\mu - 1}{\delta} x^{\mu - 1}.$$

Wenn nun Δx gegen die Null convergirt, so hat auch δ die Null zur Grenze, und der rechter Hand stehende Bruch nähert sich der Grenze μ (s. Einl. IV, Nr. 9); daher ist

$$2)\qquad \frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu - 1} \text{ und } d(x^\mu) = \mu x^{\mu - 1} dx.$$

III. Differentiation der Exponentialgrösse. Als Differenzenquotienten von a^x erhält man

$$\frac{\Delta(a^x)}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

und daraus folgt nach Formel 8) in Abschn. IV der Einleitung

3) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \frac{1}{{}^a log\, e}.$$

Gewöhnlich stellt man diese Gleichung unter etwas anderer Gestalt dar. Man denkt sich nämlich die Zahl e als Basis eines Systems von Logarithmen und bezeichnet letztere mit einem blossen l, so dass immer $e^{lz} = z$ ist; man hat dann auch

$$e^{la} = a$$

und wenn man beiderseits die Logarithmen der Basis a nimmt

$$la \, . \, {}^a log\, e = {}^a log\, a = 1,$$

woraus folgt

4) $${}^a log\, e = \frac{1}{la}, \quad \frac{1}{{}^a log\, e} = la.$$

Hiernach lautet die Gleichung 3)

5) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x la \text{ und } d\,(a^x) = a^x la\, dx.$$

Für $a = e$ wird diese Formel am einfachsten, nämlich

6) $$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \text{ und } d\,(e^x) = e^x dx;$$

man nennt desswegen e^x die natürliche Exponentialgrösse.

IV. Differentiation des Logarithmus. Der Differentialquotient von $log\, x$ ist

$$\frac{\Delta\, log\, x}{\Delta x} = \frac{log\,(x + \Delta x) - log\, x}{\Delta x} = \frac{log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

oder, wenn zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x}$ mit δ bezeichnet wird

$$\frac{\Delta\, log\, x}{\Delta x} = \frac{log\,(1 + \delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{x}.$$

Wenn nun Δx gegen die Null convergirt, so ist diess auch mit δ der Fall, und zufolge dessen hat der erste Bruch rechter Hand zur Grenze den Werth $log\, e$ (Einl. IV, Formel 7); diess giebt

7) $$\frac{d\, log\, x}{dx} = \frac{log\, e}{x}.$$

Bezeichnen wir mit a die Basis des hier vorkommenden logarithmischen Systems, so können wir nach Nr. 4) $log\, e$ durch

8) $$\frac{1}{la} = M_a$$

ersetzen; die Grösse M_a heisst dann der **Modulus** des logarithmischen Systems der Basis a; statt Nr. 7) haben wir jetzt

9) $$\frac{d\,({}^a log\, x)}{dx} = \frac{M_a}{x} \text{ und } d\,({}^a log\, x) = \frac{M_a}{x}\,dx.$$

Am einfachsten werden diese Formeln für $a = e$ nämlich

10) $$\frac{d\,l\,x}{dx} = \frac{1}{x} \text{ und } d\,l\,x = \frac{1}{x}\,dx;$$

die Logarithmen, deren Basis e ist, nennt man desswegen **natürliche Logarithmen.**

§. 3.

Differentiation der goniometrischen Functionen.

Unter Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

erhält man für den Differenzenquotienten von $sin\,u$ folgenden Ausdruck

$$\frac{\varDelta\,sin\,u}{\varDelta u} = \frac{sin\,(u + \varDelta u) - sin\,u}{\varDelta u} = \frac{2\,cos\,(u + \frac{1}{2}\varDelta u)\,sin\,\frac{1}{2}\varDelta u}{\varDelta u}$$

oder, wenn $\frac{1}{2}\varDelta u$ kurz mit ϑ bezeichnet wird,

$$\frac{\varDelta\,sin\,u}{\varDelta u} = cos\,(u + \vartheta)\,\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}.$$

Die Grössen $\varDelta u$ und ϑ convergiren gleichzeitig gegen die Null, $\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}$ hat die Einheit zur Grenze (Einl. IV, Nr. 10), mithin ist

1) $$\frac{d\,sin\,u}{du} = cos\,u \text{ und } d\,sin\,u = cos\,u\,du.$$

Eine ganz gleiche Behandlung gestattet der Cosinus. Unter Benutzung der Formel

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -\,2\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

erhält man nämlich für $\frac{1}{2}\varDelta u = \vartheta$

$$\frac{\varDelta\,cos\,u}{\varDelta u} = \frac{cos\,(u + \varDelta u) - cos\,u}{\varDelta u} = -\,\frac{2\,sin\,(u + \frac{1}{2}\varDelta u)\,sin\,\frac{1}{2}\varDelta u}{\varDelta u}$$

$$= -\,sin\,(u + \vartheta)\,\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}$$

und durch Uebergang zur Grenze

2) $$\frac{d\,cos\,u}{du} = -\,sin\,u \text{ oder } d\,cos\,u = -\,sin\,u\,du.$$

Für die Secante hat man zunächst

$$\frac{\Delta \sec u}{\Delta u} = \frac{\sec(u + \Delta u) - \sec u}{\Delta u} = \frac{\cos u - \cos(u + \Delta u)}{\cos(u + \Delta u) \cos u \,.\, \Delta u}$$

$$= \frac{2 \sin(u + \frac{1}{2}\Delta u) \sin \frac{1}{2}\Delta u}{\cos(u + \Delta u) \cos u \,.\, \Delta u} = \frac{\sin(u + \vartheta)}{\cos(u + 2\vartheta) \cos u} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

mithin

3) $$\frac{d \sec u}{du} = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \text{ oder } d \sec u = \sec^2 u \sin u \, du.$$

Als Differenzenquotient der Cosecante ergiebt sich

$$\frac{\Delta \csc u}{\Delta u} = \frac{\csc(u + \Delta u) - \csc u}{\Delta u} = \frac{\sin u - \sin(u + \Delta u)}{\sin(u + \Delta u) \sin u \,.\, \Delta u}$$

$$= - \frac{2 \cos(u + \frac{1}{2}\Delta u) \sin \frac{1}{2}\Delta u}{\sin(u + \Delta u) \sin u \,.\, \Delta u} = - \frac{\cos(u + \vartheta)}{\sin(u + 2\vartheta) \sin u} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

und daraus folgt

4) $$\frac{d \csc u}{du} = - \frac{\cos u}{\sin^2 u} \text{ oder } d \csc u = - \csc^2 u \cos u \, du.$$

Um den Differenzenquotienten von $\tan u$ in eine passende Form zu bringen, machen wir Gebrauch von der Relation

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

und erhalten

$$\frac{\Delta \tan u}{\Delta u} = \frac{\tan(u + \Delta u) - \tan u}{\Delta u} = \frac{1}{\cos(u + \Delta u) \cos u} \cdot \frac{\sin \Delta u}{\Delta u}.$$

Wenn Δu gegen die Null convergirt, wird $Lim \dfrac{\sin \Delta u}{\Delta u} = 1$ folglich

5) $$\frac{d \tan u}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} \text{ oder } d \tan u = \sec^2 u \, du.$$

Mit Hülfe der bekannten Formel

$$\cot \alpha - \cot \beta = - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{\Delta \cot u}{\Delta u} = \frac{\cot(u + \Delta u) - \cot u}{\Delta u} = - \frac{1}{\sin(u + \Delta u) \sin u} \cdot \frac{\sin \Delta u}{\Delta u}$$

und durch Uebergang zur Grenze

6) $$\frac{d \cot u}{du} = - \frac{1}{\sin^2 u} \text{ oder } d \cot u = - \csc^2 u \, du.$$

§. 4.

Differentiation der cyclometrischen Functionen.

Zufolge der Definition von *arcsin x* zieht die Gleichung

$$u = \arcsin x$$

die umgekehrte Gleichung nach sich:

$$\sin u = x;$$

aus der geänderten Gleichung

$$u + \Delta u = \arcsin(x + \Delta x)$$

erhält man analog

$$\sin(u + \Delta u) = x + \Delta x;$$

und nach diesen Bemerkungen kann man den Differenzenquotienten von *arcsin x* in folgender Form darstellen

$$\frac{\Delta \arcsin x}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta u}{\sin(u + \Delta u) - \sin u} = \frac{1}{\frac{\sin(u + \Delta u) - \sin u}{\Delta u}}.$$

Der Nenner des letzten Bruches ist der Differenzenquotient von $\sin u$ und geht in den Differentialquotienten $\cos u$ über, wenn Δx und Δu gegen die Null convergiren; man hat daher

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}$$

oder, weil $\sin u = x$ ist,

1) $$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Da unter *arcsin x* ein Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ verstanden wird und jeder Bogen dieser Art einen positiven Cosinus hat, so ist das vorkommende Wurzelzeichen immer positiv zu nehmen.

Ein ähnliches Verfahren wäre zur Differentiation von *arccos x* anwendbar, man gelangt aber kürzer zum Ziele, wenn man von der Relation

$$\arccos x = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin x$$

Gebrauch macht; es ergiebt sich

$$\frac{\Delta \arccos x}{\Delta x} = \frac{\arccos(x + \Delta x) - \arccos x}{\Delta x}$$

$$= -\frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} = -\frac{\Delta \arcsin x}{\Delta x}$$

mithin auch beim Uebergange zur Grenze

$$\frac{d\,arccos\,x}{dx} = -\frac{d\,arcsin\,x}{dx}$$

d. i.

2) $$\frac{d\,arccos\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,arccos\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Um ferner die Function $u = arctan\,x$ zu differenziren, gehen wir von folgenden vier Gleichungen aus

$$u = arctan\,x \quad , \quad tan\,u = x$$

$$u + \varDelta u = arctan\,(x + \varDelta x)\,, \quad tan\,(u + \varDelta u) = x + \varDelta x,$$

und stellen mit Hülfe derselben den Differenzenquotienten von $arctan\,x$ in nachstehende Form

$$\frac{\varDelta\,arctan\,x}{\varDelta x} = \frac{arctan\,(x + \varDelta x) - arctan\,x}{\varDelta x}$$

$$= \frac{\varDelta u}{tan\,(u + \varDelta u) - tan\,u} = \frac{1}{\frac{tan\,(u + \varDelta u) - tan\,u}{\varDelta u}}.$$

Der letzte Nenner ist der Differenzenquotient von $tan\,u$ und geht in den Differentialquotienten $sec^2 u$ über, wenn $\varDelta x$ und $\varDelta u$ gegen die Null convergiren; diess giebt

$$\frac{d\,arctan\,x}{dx} = \frac{1}{sec^2 u} = \frac{1}{1 + tan^2 u}$$

oder, weil $tan\,u = x$ ist,

3) $$\frac{d\,arctan\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad d\,arctan\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Die Differentiation von $arccot\,x$ lässt sich mittelst der Formel

$$arccot\,x = \tfrac{1}{2}\pi - arctan\,x$$

auf die Differentiation von $arctan\,x$ zurückführen; man findet

4) $$\frac{d\,arccot\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d\,arccot\,x = -\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Setzt man $u = arcsec\,x$ mithin $sec\,u = x$, so gelangt man leicht zu der Gleichung

$$\frac{\varDelta\,arcsec\,x}{\varDelta x} = \frac{arcsec\,(x + \varDelta x) - arcsec\,x}{\varDelta x}$$

$$= \frac{\varDelta u}{sec\,(u + \varDelta u) - sec\,u} = \frac{1}{\frac{\varDelta\,sec\,u}{\varDelta u}}$$

woraus durch Uebergang zur Grenze folgt

$$\frac{d\,arcsec\,x}{dx} = \frac{1}{\frac{d\,sec\,u}{du}} = \frac{1}{\frac{sin\,u}{cos^2 u}} = \frac{1}{sec\,u\,\sqrt{sec^2 u - 1}}$$

d. i. wegen $sec\,u = x$

5) $$\frac{d\,arcsec\,x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d\,arcsec\,x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Mit Hülfe der Relation

$$arccsc\,x = \tfrac{1}{2}\pi - arcsec\,x$$

gelangt man endlich noch zu der Formel

6) $$\frac{d\,arccsc\,x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d\,arccsc\,x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Nachdem hiermit die Differentiation der einfachen Functionen erledigt ist, haben wir uns nun mit der Differentiation zusammengesetzter Functionen zu beschäftigen.

§. 5.

Differentiation der Aggregate, Producte und Quotienten.

I. Sind A und B Constanten, u und v Functionen der unabhängigen Variabelen x, so bildet das Aggregat $Au + Bv$ eine zusammengesetzte Function von x, welche u. A. die Summe $u + v$, die Differenz $u - v$ und das Product Au als specielle Fälle in sich enthält. Die Aenderung des x hat gleichzeitige Aenderungen von u und v zur Folge und es ist demnach der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta(Au+Bv)}{\Delta x} = \frac{A\,(u+\Delta u) + B\,(v+\Delta v) - (Au+Bv)}{\Delta x}$$
$$= A\frac{\Delta u}{\Delta x} + B\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Je kleiner Δx ist, desto weniger unterscheiden sich die Differenzenquotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ von den entsprechenden Differentialquotienten, und man kann daher

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \varrho_1, \qquad \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} + \varrho_2$$

setzen, wo ϱ_1 und ϱ_2 nicht näher bekannt sind, aber gleichzeitig mit Δx gegen die Null convergiren. Die vorige Gleichung wird jetzt

$$\frac{\varDelta\,(Au + Bv)}{\varDelta x} = A\,\frac{du}{dx} + B\,\frac{dv}{dx} + A\varrho_1 + B\varrho_2$$

und hieraus folgt, indem man zur Grenze für verschwindende $\varDelta x$, ϱ_1 und ϱ_2 übergeht

1) $$\frac{d\,(Au + Bv)}{dx} = A\,\frac{du}{dx} + B\,\frac{dv}{dx}$$

oder auch

2) $$d\,(Au + Bv) = A\,du + B\,dv.$$

Für $B = +1$, $B = -1$ und $B = 0$ liefert die Formel drei specielle Gleichungen, die man leicht in Worte fassen und als Regeln aussprechen kann.

Mittelst derselben Schlussweise, die zur Formel 1) führte, gelangt man auch zu dem allgemeineren Resultate

3) $$\frac{d\,(Au + Bv + Cw + \cdots)}{dx} = A\,\frac{du}{dx} + B\,\frac{dv}{dx} + C\,\frac{dw}{dx} + \cdots$$

worin das Aggregat $Au + Bv +$ etc. aus einer beliebigen endlichen Menge von Summanden zusammengesetzt sein darf; für eine unendliche Menge derselben gilt aber die Formel nicht ohne Weiteres, weil es in diesem Falle fraglich bleibt, ob $A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 + \cdots$ in inf. die Null zur Grenze habe, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ gegen die Null convergiren.

Mittelst der Formel 3) kann die Differentiation jeder zusammengesetzten Function ausgeführt werden, die sich in ein Aggregat einfacher Functionen auflösen lässt. So hat man z. B.

$$\begin{aligned}\frac{d\,[(a + bx)^3]}{dx} &= \frac{d\,[a^3 + 3a^2bx + 3ab^2x^2 + b^3x^3]}{dx}\\ &= \frac{d\,(a^3)}{dx} + 3a^2b\,\frac{d\,(x)}{dx} + 3ab^2\,\frac{d\,(x^2)}{dx} + b^3\,\frac{d\,(x^3)}{dx}\\ &= 3a^2b + 3ab^2\,.\,2x + b^3\,.\,3x^2\\ &= 3b\,(a^2 + 2abx + b^2x^2) = 3b\,(a + bx)^2.\end{aligned}$$

Ein zweites Beispiel ist

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\dfrac{1 - x^n}{1 - x}\right)}{dx} &= \frac{d\,(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1})}{dx}\\ &= \frac{d\,(1)}{dx} + \frac{d\,(x)}{dx} + \frac{d\,(x^2)}{dx} + \cdots + \frac{d\,(x^{n-1})}{dx}\\ &= 1 + 2x + \cdots + (n-1)\,x^{n-2}.\end{aligned}$$

II. Sind wieder u und v Functionen der Variabelen x, so hat man als Differenzenquotienten des Productes uv

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x}$$

$$= u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot \Delta x.$$

Die Grenzwerthe von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ und Δx sind der Reihe nach $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ und Null; mithin wird

4) $$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

und

5) $$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Als Beispiel diene der Fall $u = x^\alpha$, $v = x^\beta$; man erhält

$$\frac{d(x^\alpha x^\beta)}{dx} = x^\alpha \beta x^{\beta-1} + x^\beta \alpha x^{\alpha-1} = (\alpha+\beta)\,x^{\alpha+\beta-1}$$

wie sich auch direct ergiebt, wenn $x^\alpha x^\beta$ in $x^{\alpha+\beta}$ zusammengezogen wird.

III. Behufs der Differentiation des Quotienten $\frac{v}{u}$ bilden wir zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta\left(\frac{v}{u}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{v+\Delta v}{u+\Delta u} - \frac{v}{u}}{\Delta x} = \frac{u\frac{\Delta v}{\Delta x} - v\frac{\Delta u}{\Delta x}}{(u+\Delta u)\,u}$$

und erhalten durch Uebergang zur Grenze

6) $$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}$$

oder

7) $$d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2}.$$

Hiernach ist z. B.

$$\frac{d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{dx} = \frac{(1-x)(-nx^{n-1}) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)\,x^n}{(1-x)^2}.$$

Derselbe Ausdruck wurde schon in Nr. I. auf anderem Wege differenzirt; vergleicht man beide Differentialquotienten mit einander, so hat man die neue Summenformel

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-2}$$
$$= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Ueberhaupt lässt sich aus jeder analytischen Gleichung, die eine willkührliche Variabele enthält, immer eine neue derartige Gleichung durch Differentiation in Beziehung auf jene Variabele ableiten.

§. 6.

Differentiation der Functionen von Functionen.

Wenn z eine Function von y, und y wieder eine Function von x ist, so hat man zwei Gleichungen

1) $$z = f[y], \qquad y = \varphi(x),$$

welche sich auch in die eine

2) $$z = f[\varphi(x)]$$

zusammenziehen lassen. Ebenso kann umgekehrt eine Gleichung der letzten Art in zwei Gleichungen von der obigen Form zerlegt werden, z. B. $z = log\,sin\,x$ in $z = log\,y$ und $y = sin\,x$. Einer Aenderung des x entsprechen nun Aenderungen von y und z, mithin ist nach Nro. 1)

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f[y + \Delta y] - f[y]}{\Delta x};$$

dafür kann man schreiben

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f[y + \Delta y] - f[y]}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und hier ist der Differenzenquotient von $f[y]$ ebenso gebildet, als wenn y eine unabhängige Variabele, mithin Δy eine willkührliche Zunahme des y wäre. Gehen wir nun in der vorigen Gleichung oder in der folgenden mit ihr identischen

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

zur Grenze über, so gelangen wir zu der Formel

2) $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

oder

3) $$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Demnach erhält man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, wenn man erst den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ so bildet, als wäre y eine unabhängige Variabele, und ihn nachher mit $\frac{dy}{dx}$ multiplicirt; die Werthe von $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$ leitet man unmittelbar aus den Gleichungen 1) ab.

In der Anwendung auf das Beispiel

$$z = (a + bx^n)^p$$

gestaltet sich die Sache folgendermaassen. Statt der vorstehenden Gleichung schreibt man die beiden Gleichungen

$$z = y^p, \quad y = a + bx^n$$

und erhält daraus

$$\frac{dz}{dy} = py^{p-1}, \quad \frac{dy}{dx} = bnx^{n-1}$$

mithin durch Multiplication dieser Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = bnpy^{p-1}x^{n-1}$$

oder endlich, wenn man für y und z ihre Werthe setzt,

$$\frac{d[(a + bx^n)^p]}{dx} = bnp\,(a + bx^n)^{p-1}x^{n-1}.$$

Bei mehrfacher Uebung in diesem Verfahren wird man finden, dass es nicht nothwendig ist, die Variabelen y und z in Rechnung zu bringen, weil sie später doch wieder daraus verschwinden; vielmehr kann man diese Substitutionen im Gedächtnisse behalten und dadurch eine wesentliche Abkürzung herbeiführen. Auch ist es bequemer, nicht gleich auf die Entwickelung des Differentialquotienten auszugehen, sondern vorläufig erst das Differential der gegebenen Function zu suchen. So würde man bei dem vorigen Beispiele sagen: analog $d(y^p) = py^{p-1}dy$ ist

$$\begin{aligned} d[(a + bx^n)^p] &= p\,(a + bx^n)^{p-1}\,d(a + bx^n) \\ &= p\,(a + bx^n)^{p-1}\,b\,d(x^n) \\ &= p\,(a + bx^n)^{p-1}\,bnx^{n-1}dx, \end{aligned}$$

was mit dem früheren Resultate übereinstimmt.

Als zweites Beispiel diene die Differentiation von x^x. In der Form einer Exponentialgrösse dargestellt, ist dieser Ausdruck

$$x^x = (e^{lx})^x = e^{x\,lx};$$

nach der Regel $d(e^y) = e^y\,dy$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} d(x^x) &= e^{x\,lx}\,d(x\,l\,x) \\ &= e^{x\,lx}(x\,d\,l\,x + l\,x\,dx) \\ &= e^{x\,lx}\left(x\,\frac{1}{x}\,dx + l\,x\,dx\right) \\ &= x^x(1 + l\,x)\,dx. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege gelangt man zu der folgenden kleinen Formelsammlung, welche später von Nutzen sein wird:

$$\begin{aligned}
d\left[\frac{1}{b}\,l(a + bx)\right] &= \frac{dx}{a + bx}, \\
d\left[-\frac{1}{b\,(a + bx)}\right] &= \frac{dx}{(a + bx)^2}, \\
d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\,arctan\,\frac{\beta x}{\alpha}\right] &= \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}, \\
d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\,l\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right)\right] &= \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}, \\
d\left[\frac{1}{2\,b}\,l(a + bx^2)\right] &= \frac{x\,dx}{a + bx^2}, \\
d\left[\frac{2\sqrt{a + bx}}{b}\right] &= \frac{dx}{\sqrt{a + bx}}, \\
d\left[\frac{l(\beta x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2})}{\beta}\right] &= \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}, \\
d\left[\frac{1}{\beta}\,arcsin\,\frac{\beta x}{\alpha}\right] &= \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}}, \\
d\left[\frac{\sqrt{a + bx^2}}{b}\right] &= \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}}, \\
d\left[\frac{x}{a\sqrt{a + bx^2}}\right] &= \frac{dx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}}, \\
d\left[-\frac{1}{b\sqrt{a + bx^2}}\right] &= \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}}, \\
d\,[x\,lx - x] &= lx\,dx, \\
d\,[-\,l\,cos\,u] &= tan\,u\,du, \\
d\,[l\,sin\,u] &= cot\,u\,du, \\
d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\,arctan\left(\frac{\beta\,tan\,u}{\alpha}\right)\right] &= \frac{du}{\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u}, \\
d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\,l\left(\frac{\alpha + \beta\,tan\,u}{\alpha - \beta\,tan\,u}\right)\right] &= \frac{du}{\alpha^2 cos^2 u - \beta^2 sin^2 u}.
\end{aligned}$$

§. 7.

Anwendungen der vorigen Formeln.

I. Wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, so liefert die wirkliche Ausführung der durch $(1 + x)^m$ angezeigten m Multiplicationen ein Resultat von der Form

$$1)\quad (1 + x)^m = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_m x^m,$$

worin $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ gewisse, vorläufig noch unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten. Um sie zu bestimmen, differenziren wir beiderseits, und erhalten

$$m(1 + x)^{m-1} = 1\,C_1 + 2\,C_2 x + 3\,C_3 x^2 + \cdots + m\,C_m x^{m-1}.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $1 + x$, die Gleichung 1) dagegen mit m, dann sind die linken Seiten der beiden neuen Gleichungen dieselben, mithin müssen auch die rechten Seiten gleich sein, d. h.

$$\begin{aligned} &1\,C_1 + (2\,C_2 + 1\,C_1)x + (3\,C_3 + 2\,C_2)x^2 + (4\,C_4 + 3\,C_3)x^3 + \cdots \\ &= m + m\,C_1 x + m\,C_2 x^2 + m\,C_3 x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Die vorstehende Gleichung kann aber für jedes beliebige x nur dann bestehen, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von x gleich sind; es ist daher der Reihe nach

$$C_1 = \frac{m}{1},\quad C_2 = C_1 \frac{m-1}{2} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2},$$

$$C_3 = C_2 \frac{m-2}{3} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$$

u. s. w.

Durch Substitution dieser Coefficientenwerthe erhält man aus Nro. 1) die Gleichung

$$2)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^3 + \cdots$$

welche den Namen des **binomischen Satzes** für ganze positive Exponenten führt. Die darin vorkommenden Coefficienten heissen **Binomialcoefficienten** und werden am zweckmässigsten auf folgende Weise bezeichnet:

$$(m)_0 = 1,\ (m)_1 = \frac{m}{1},\ (m)_2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}, \ldots\ldots$$

$$(m)_k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[k-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k}.$$

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multiplicirt beiderseits mit a^m, so gelangt man zu der Formel

$$3)\quad (a+b)^m = (m)_0 a^m + (m)_1 a^{m-1} b + (m)_2 a^{m-2} b^2 + \cdots \cdots + (m)_{m-1} a b^{m-1} + (m)_m b^m,$$

mittelst deren jede zweitheilige Grösse auf eine beliebige ganze positive Potenz erhoben werden kann.

Die Gleichung 2) dient auch zur Berechnung der Zahl e, wenn $x = \frac{1}{m}$ genommen und m als unendlich wachsende Zahl betrachtet wird. Man erhält zunächst

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \cdots \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots m},$$

wobei die rechte Seite $m+1$ Summanden zählt. Verstehen wir unter k eine beliebige ganze positive Zahl $< m$, so können wir die rechte Seite in zwei Theile zerlegen, deren erster die $k+1$ ersten Summanden enthält, während der zweite, welcher R heissen möge, den noch übrigen Rest von $m-k$ Summanden umfasst; dies giebt

$$4)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots k} + R,$$

$$R = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{m}\right)}{1.2\ldots(k+1)} \left\{1 + \frac{1-\frac{k+1}{m}}{k+2} + \cdots\cdots + \frac{\left(1-\frac{k+1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(k+2)\ldots m}\right\}.$$

In der zuletzt eingeklammerten Summe sind die Zähler aller Summanden positive ächte Brüche; setzen wir statt derselben durchweg die Einheit und nehmen statt der Nenner

$$k+2, \quad (k+2)(k+3), \ldots \quad (k+2)(k+3)\ldots m$$

die kleineren Nenner

$$k+1, \quad (k+1)^2, \ldots\ldots \quad (k+1)^{m-k-1},$$

so erhalten wir zu viel, mithin ist die erwähnte Summe kleiner als

$$1+\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{m-k-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{m-k}}{1-\frac{1}{k+1}} < \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}.$$

Andererseits beträgt jene Summe mehr als Null, sie liegt also zwischen

$$0 \text{ und } \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k}$$

und kann folglich $= \varepsilon\,\frac{k+1}{k}$ gesetzt werden, wo ε einen nicht näher bestimmten positiven ächten Bruch bezeichnet; es ist dann

$$5)\qquad R=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{\varepsilon}{k}.$$

Gehen wir nun in den Gleichungen 4) und 5) zur Grenze für unendlich wachsende m über, ohne die Zahl k zu ändern, und berücksichtigen die Gleichungen

$$Lim\,\frac{1}{m}=Lim\,\frac{2}{m}=\cdots\cdots=Lim\,\frac{k}{m}=0,$$

so gelangen wir zu folgender Formel

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}+R,$$

$$R=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{\varepsilon}{k},$$

worin k eine beliebige endliche positive ganze Zahl ist. Indem man für ε einmal die Null, das andere Mal die Einheit setzt, erhält man zwei verschiedene Summen, zwischen denen e liegt; weil aber R beliebig klein gemacht werden kann, wenn man k gross genug wählt, so lassen sich jene Summen einander beliebig nahe bringen und liefern den Werth von e so genau, als man es verlangt. So ist z. B. für $k=10$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,10} = 2{,}7182818011$$

$$R = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,10} \cdot \frac{\varepsilon}{10} = 0{,}0000000276 \cdot \varepsilon,$$

mithin für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$

$$2{,}7182818011 < e < 2{,}7182818287,$$

womit e auf sieben Decimalstellen genau bestimmt ist.

II. Setzt man zur Abkürzung

$$P_n = \frac{\cos n u}{\cos^n u}, \qquad Q_n = \frac{\sin n u}{\cos^n u},$$

so findet man sehr leicht folgende zwei Relationen

$$P_{n+1} = P_n - Q_n \tan u, \qquad Q_{n+1} = Q_n + P_n \tan u;$$

von den Werthen $P_0 = 1$ und $Q_0 = 0$ ausgehend, kann man diese Formeln der Reihe nach für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ anwenden und erhält

$$\begin{array}{ll} P_1 = 1, & Q_1 = \tan u, \\ P_2 = 1 - \tan^2 u, & Q_2 = 2 \tan u, \\ P_3 = 1 - 3 \tan^2 u, & Q_3 = 3 \tan u - \tan^3 u, \\ P_4 = 1 - 6 \tan^2 u + \tan^4 u, & Q_4 = 4 \tan u - 4 \tan^3 u, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Die vorstehenden Gleichungen berechtigen zu dem allgemeinen Schlusse, dass für jedes ganze positive m sein werde

6) $$P_m = \frac{\cos m u}{\cos^m u}$$

$$= 1 - C_2 \tan^2 u + C_4 \tan^4 u - C_6 \tan^6 u + \cdots,$$

7) $$Q_m = \frac{\sin m u}{\cos^m u}$$

$$= C_1 \tan u - C_3 \tan^3 u + C_5 \tan^5 u - \cdots$$

worin C_1, C_2, C_3 etc. gewisse vorläufig unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten. Um diese zu bestimmen, differenziren wir jede der vorigen Gleichungen und bemerken dabei, dass

$$\frac{d P_m}{d u} = - m Q_m + m P_m \tan u,$$

$$\frac{d Q_m}{d u} = + m P_m + m Q_m \tan u,$$

$$\frac{d (\tan^k u)}{d u} = k \tan^{k-1} u \sec^2 u$$

ist, wie sich bei wirklicher Ausführung der Differentiation leicht findet; wir erhalten

$$8)\qquad -m P_m \tan u + m Q_m$$
$$= (2\, C_2 \tan u - 4\, C_4 \tan^3 u + 6\, C_6 \tan^5 u - \cdots)\sec^2 u,$$
$$9)\qquad m P_m + m Q_m \tan u$$
$$= (1\, C_1 - 3\, C_3 \tan^2 u + 5\, C_5 \tan^4 u - 7\, C_7 \tan^6 u + \cdots)\sec^2 u.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $\tan u$ und ziehen das Product von der zweiten Gleichung ab, so bleibt linker Hand $m P_m (1 + \tan^2 u) = m P_m \sec^2 u$ übrig, wobei sich der Factor $\sec^2 u$ hebt; gleichzeitig setzen wir statt P_m den in Nro. 6) verzeichneten Ausdruck und gelangen so zu der Gleichung

$$10)\qquad m - m\, C_2 \tan^2 u + m\, C_4 \tan^4 u - m\, C_6 \tan^6 u + \cdots$$
$$= 1\, C_1 - (2\, C_2 + 3\, C_3)\tan^2 u + (4\, C_4 + 5\, C_5)\tan^4 u$$
$$- (6\, C_6 + 7\, C_7)\tan^6 u + \cdots$$

Das Seitenstück hierzu ergiebt sich, wenn wir aus den Gleichungen 8) und 9) die Grösse P_m eliminiren und statt des übrig bleibenden Q_m den in Nro. 7) verzeichneten Ausdruck setzen; es wird

$$11)\qquad m\, C_1 \tan u - m\, C_3 \tan^3 u + m\, C_5 \tan^5 u - \cdots$$
$$= (1\, C_1 + 2\, C_2)\tan u - (3\, C_3 + 4\, C_4)\tan^3 u$$
$$+ (5\, C_5 + 6\, C_6)\tan^5 u - \cdots\cdots$$

Vergleichen wir nun wechselweise in 10) und 11) die Coefficienten gleicher Potenzen von $\tan u$, so erhalten wir

$$C_1 = \frac{m}{1},\; C_2 = C_1\,\frac{m-1}{2} = \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2},$$
$$C_3 = C_2\,\frac{m-2}{3} = \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3},\ \text{u. s. f.}$$

woraus augenblicklich hervorgeht, dass C_1, C_2, C_3 etc. mit dem Binomialcoefficienten $(m)_1$, $(m)_2$, $(m)_3$ etc. identisch sind. Demnach haben wir nach Nro. 6) und 7) folgende Formeln

$$12)\qquad \frac{\cos mu}{\cos^m u} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2 u + (m)_4 \tan^4 u$$
$$- (m)_6 \tan^6 u + \cdots\cdots$$

$$13)\qquad \frac{\sin mu}{\cos^m u} = (m)_1 \tan u - (m)_3 \tan^3 u + (m)_5 \tan^5 u - \cdots\cdots$$

oder auch durch beiderseitige Multiplication mit $\cos^m u$

$$14)\qquad \cos mu = (m)_0 \cos^m u - (m)_2 \cos^{m-2} u \sin^2 u$$
$$+ (m)_4 \cos^{m-4} u \sin^4 u - \cdots\cdots$$

15) $\sin mu = (m)_1 \cos^{m-1} u \sin u - (m)_3 \cos^{m-3} u \sin^3 u + (m)_5 \cos^{m-5} u \sin^5 u - \cdots$

Diese Formeln lassen noch einige Umgestaltungen zu, die wir kurz andeuten wollen. Die Gleichung 14) enthält nur gerade Potenzen von $\sin u$, d. h. ganze Potenzen von $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$, man kann daher den binomischen Satz anwenden, indem man

$$\sin^{2k} u = (1 - \cos^2 u)^k$$
$$= 1 - (k)_1 \cos^2 u + (k)_2 \cos^4 u - (k)_3 \cos^6 u + \cdots$$

und $k = 1, 2, 3$ etc. setzt; nach Zusammenfassung aller Glieder, welche gleiche Potenzen von $\cos u$ zu Factoren haben, gelangt man zu einem Resultate von der Form

16) $\cos mu = A_0 \cos^m u + A_2 \cos^{m-2} u + \cdots\cdots,$

worin A_0, A_2, A_4 etc. gewisse constante Coefficienten bedeuten, deren Werthe sich durch Ausführung der angedeuteten Operationen von selbst ergeben. Schreibt man ferner statt Nro. 15)

$$\sin mu = \sin u\, [(m)_1 \cos^{m-1} u - (m)_3 \cos^{m-3} u \sin^2 u + \cdots],$$

so ist innerhalb der Parenthese wieder die vorige Transformation anwendbar und führt zu einem Resultate von folgender Form

17) $\sin mu = \sin u\, [B_1 \cos^{m-1} u + B_3 \cos^{m-3} u + \cdots\cdot]$.

Will man die Cosinuspotenzen in Sinuspotenzen umsetzen, so braucht man nur $u = \frac{1}{2}\pi - v$ zu substituiren, doch hat man dann linker Hand gerade und ungerade m zu unterscheiden.

§. 8.

Zusammenhang zwischen einer Function und ihrem Differentialquotienten.

I. Wie in §. 1, Formel 3) bezeichnen wir mit ϱ den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten einer Function $f(x)$, wir setzen also

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varrho,$$

wo ϱ zwar nicht näher bekannt ist, aber gleichzeitig mit Δx gegen die Null convergirt. Eben desswegen lässt sich auch, wenn Δx hinreichend klein genommen wird, ϱ so weit verringern, dass sein absoluter Werth weniger als der absolute Werth von $f'(x)$ beträgt; für noch kleinere Δx findet diese Ungleichung um so mehr statt wegen der weiteren Abnahme des ϱ. Die rechte Seite der obigen Glei-

chung hat jetzt dasselbe Vorzeichen wie $f'(x)$, mithin kommt das nämliche Vorzeichen auch der linken Seite zu. Ist nun $f'(x)$ und daher $f'(x) + \varrho$ positiv, so folgt, $\varDelta x$ immer als positiv vorausgesetzt, dass $f(x + \varDelta x) > f(x)$ sein muss; in diesem Falle entspricht der grösseren Variabele ein grösserer Functionswerth. Wenn dagegen $f'(x)$, mithin auch $f'(x) + \varrho$ negativ ist, so ergiebt sich $f(x + \varDelta x) < f(x)$, und hier gehört zur grösseren Variabele ein kleinerer Functionswerth. Man hat daher folgenden Satz: *Je nachdem der Differentialquotient einer Function das positive oder negative Vorzeichen besitzt, ist die Function selber im Wachsen oder im Abnehmen begriffen, und umgekehrt.*

Hieraus erklärt sich z. B., warum der Differentialquotient des Sinus positiv, der des Cosinus negativ ist, wenn der Bogen im ersten Quadranten liegt.

II. Wir betrachten ferner die Function $\varphi(x)$ als endlich und continuirlich von $x = a$ bis $x = b$, und setzen voraus, dass ihre Derivirte $\varphi'(x)$ die nämliche Eigenschaft besitze; durchläuft nun x das genannte Intervall, so wird $\varphi'(x)$ das eine Mal einen grössten Werth M', ein anderes Mal einen kleinsten Werth N' annehmen, mithin ist innerhalb jenes Intervalles

$$\varphi'(x) - M' \text{ negativ}, \qquad \varphi'(x) - N' \text{ positiv}.$$

Andererseits lässt sich $\varphi'(x) - M'$ als Differentialquotient von

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - (x - a) M'$$

betrachten, ebenso $\varphi'(x) - N'$ als Differentialquotient von

$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - (x - a) N',$$

und nun folgt aus dem in Abschn. I. bewiesenen Satze, dass u eine abnehmende, dagegen v eine zunehmende Function ist. Für $x = a$ verschwinden diese Functionen; demnach fängt u seine Abnahme mit dem Werthe $u = 0$ an und muss folglich immer negativ sein; v beginnt sein Wachsthum mit $v = 0$ und ist daher positiv. Dies gilt von $x = a$ bis $x = b$, mithin ist auch

$$1) \quad \begin{cases} \varphi(b) - \varphi(a) - (b - a) M' \text{ negativ}, \\ \varphi(b) - \varphi(a) - (b - a) N' \text{ positiv}. \end{cases}$$

Lassen wir nun in dem Ausdrucke

$$w = \varphi(b) - \varphi(a) - (b - a)\varphi'(x)$$

die Variabele x das Intervall $x = a$ bis $x = b$ durchlaufen, so erreicht $\varphi'(x)$ einmal den Werth M', ein anderes Mal den Werth N'; im ersten Falle wird w negativ, im zweiten positiv. Dieser Uebergang vom Negativen zum Positiven ist bei einer continuirlichen Func-

tion nur mittelst Durchganges durch den Werth $w = 0$ möglich; zwischen a und b muss es daher wenigstens einen speciellen Werth $x = \xi$ geben, für welchen $w = 0$ oder

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'(\xi)$$

wird. Dass $a < \xi < b$ ist, kann man durch die Gleichung $\xi = a + \vartheta(b - a)$ ausdrücken, wenn man unter ϑ einen nicht näher bekannten positiven ächten Bruch versteht; die vorige Gleichung lautet dann:

2) $$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'(a + \vartheta[b - a]), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

oder auch, wenn $b = a + h$ gesetzt wird,

3) $$\varphi(a + h) = \varphi(a) + h\,\varphi'(a + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

wobei jede der Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ endlich und stetig bleiben muss von $x = a$ bis $x = b$.

Die Wichtigkeit der Formel 2) wird es rechtfertigen, wenn wir einen zweiten Beweis derselben mittheilen, welcher noch einfacher ist und die Kenntniss des in Abschn. I. entwickelten Theoremes nicht voraussetzt. Denken wir uns die Differenz $b - a$ in n gleiche Theile getheilt und bezeichnen wir einen solchen Theil mit δ, so ist

$$\delta = \frac{b - a}{n}, \qquad b - a = n\delta, \qquad b = a + n\delta$$

und identisch

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{n\delta}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi(a + \delta) - \varphi(a)}{\delta} + \frac{\varphi(a + 2\delta) - \varphi(a + \delta)}{\delta} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi(a + n\delta) - \varphi(a + \overline{n - 1}\,\delta)}{\delta}\right]$$

In Worten heisst dies: der Quotient $\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$ ist das arithmetische Mittel aus den n Werthen, welche der Differenzenquotient

$$\frac{\varphi(x + \delta) - \varphi(x)}{\delta}$$

annimmt, wenn der Reihe nach

$$x = a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \ldots \quad a + (n - 1)\delta$$

gesetzt wird, oder, wenn x das Intervall a bis $b - \delta$ in Absätzen von δ zu δ durchläuft. Das arithmetische Mittel aus mehreren Zahlen liegt immer zwischen der kleinsten und grössten derselben; bezeichnen wir daher mit M den grössten und mit N den kleinsten

Werth, welchen der genannte Differenzenquotient erreicht, wenn x sich auf die vorgeschriebene Weise ändert, so ist

$$M > \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} > N.$$

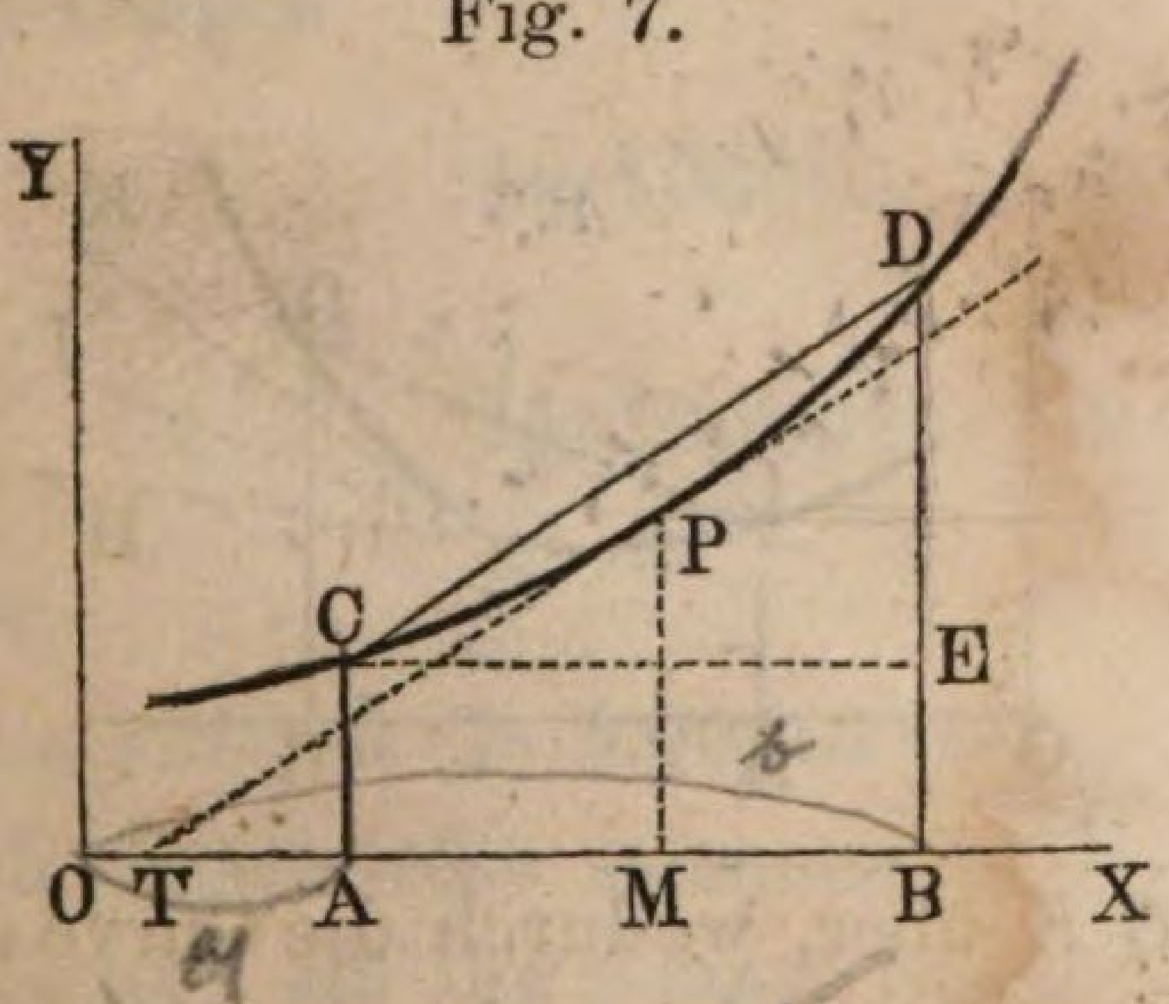
Bei unendlich wachsenden n convergirt δ gegen die Null, und dann durchläuft x stetig das Intervall a bis b; der Differenzenquotient wird zum Differentialquotienten, M geht über in M', N in N', und die vorige Ungleichung lautet jetzt

$$M' > \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} > N'.$$

Dies ist einerlei mit Dem, was unter Nro. 1) gefunden wurde; die übrige Schlussweise bleibt dieselbe.

Der gewonnene Satz kann auf verschiedene Weise geometrisch interpretirt werden, je nachdem man $\varphi(x)$ als die zur Abscisse x gehörende Ordinate einer ebenen Curve, oder als die über der Abscisse x stehende Fläche einer anderen Curve, oder als Volumen betrachtet. Wir wollen die erste Voraussetzung genauer untersuchen.

Fig. 7.



In Fig. 7 sei die ebene Curve CPD durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmt, $OA = a$, $OB = b$, $AB = b - a = h$, $AC = \varphi(a)$, $BD = \varphi(b) = \varphi(a + h)$, endlich CE parallel und gleich AB; man hat dann einerseits $DE = BD - AC = \varphi(b) - \varphi(a)$, andererseits $DE = CE \cdot \tan DCE$, mithin

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h \tan DCE.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Curve von C bis D ununterbrochen verläuft und dass die Tangente an derselben ihre Richtung stetig ändert, wenn der Berührungspunkt den Bogen CD durchläuft, giebt es jedenfalls eine zur Sehne CD parallele Tangente, deren Berührungspunkt P zwischen C und D liegt; es ist dann $\angle DCE = \angle PTM = \tau$ und

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h \tan\tau.$$

Für $OM = \xi$ ist weiter $\tan\tau = \varphi'(\xi) = \varphi'(a + AM)$, und da AM einen Bruchtheil von AB ausmacht, so kann $AM = \vartheta h$ gesetzt werden. Nach diesen Substitutionen geht die vorige Gleichung in Nro. 3) über und bedeutet geometrisch, dass es im Allgemeinen zu jeder Sehne einer Curve eine parallele Tangente giebt.

Nicht überflüssig ist es, sich von den Ausnahmen zu überzeugen, welche dieser Satz erleidet, wenn entweder $\varphi(x)$ oder $\varphi'(x)$ oder beide Functionen discontinuirlich werden. So erkennt man augenblicklich aus Fig. 8, dass der Satz nicht mehr richtig zu sein braucht, wenn die Curve von C bis D durch imaginäre Ordinaten unterbrochen ist. Setzen wir ferner voraus, dass $\varphi(x)$ zwar reell, aber discontinuirlich zwischen $x = a$ und $x = b$, dagegen $\varphi'(x)$ continuirlich sei, so besteht die Curve aus zwei nicht zusammenhängenden Bögen CH und KD, wobei die Tangenten in H und K parallel laufen (Fig. 9); auch hier giebt es keine zu CD parallele Tangente, deren Berührungspunkt zwischen C und D fällt. Im dritten Falle, wenn nämlich $\varphi(x)$ continuirlich, aber $\varphi'(x)$ discontinuirlich ist, erleidet zwar die Curve keine Unterbrechung, dagegen ändert die Tangente ihre Lage sprungweise zwischen C und D (Fig. 10), d. h. sie geht in einem

Fig. 8.

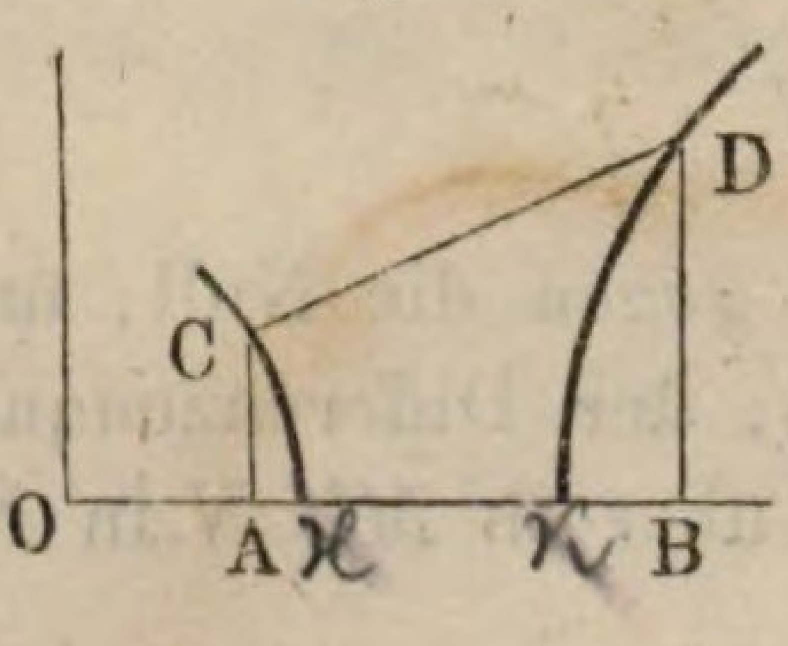


Fig. 9.

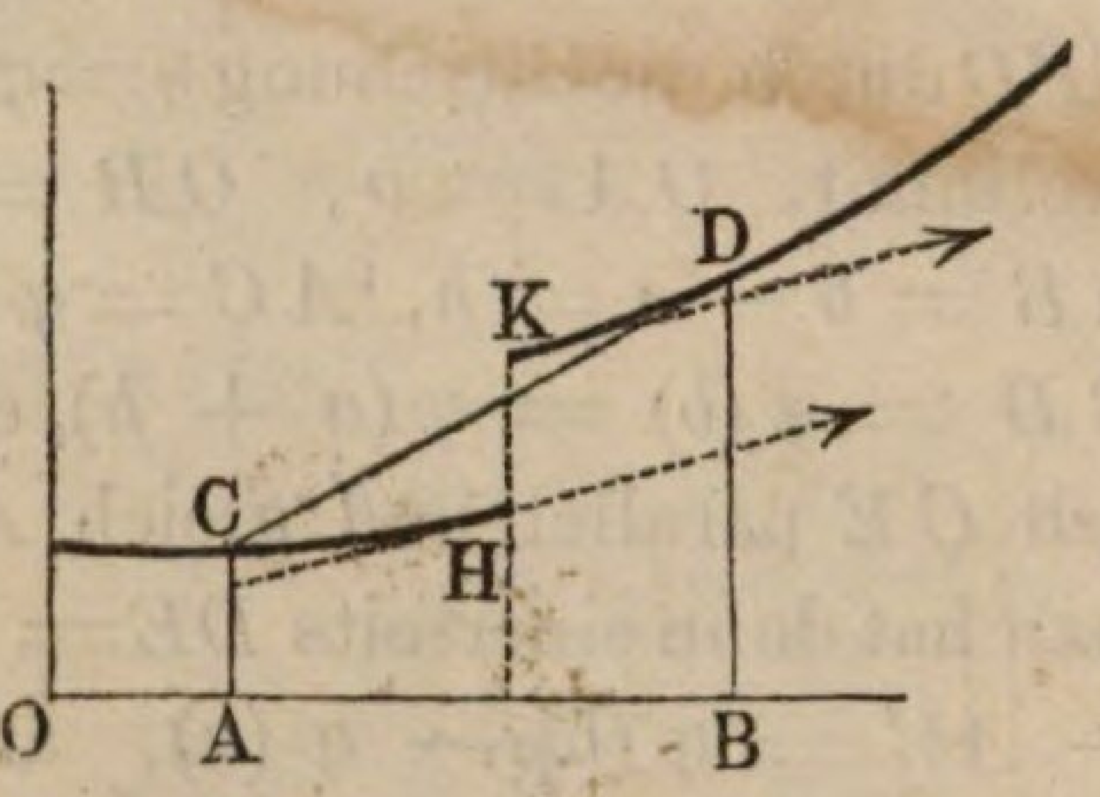
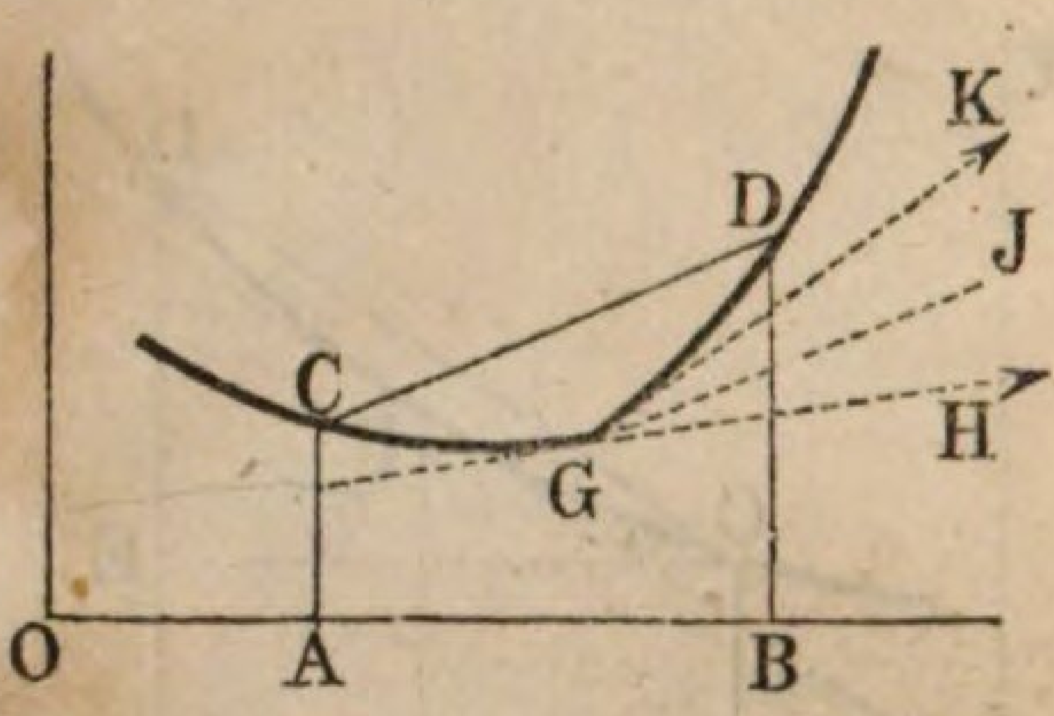


Fig. 10.



Punkte G plötzlich von GH nach GK über, wodurch die Curve eine Spitze erhält. Wiederum gilt hier der Satz nicht, da eine Parallele zu CD zwischen GH und GK, etwa nach GJ, fallen kann und dann keine Lage der Tangente darstellt. Sind endlich $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ gleichzeitig discontinuirlich, so erhält man eine ähnliche Figur wie Nro. 9), nur sind in diesem Falle die Tangenten in H und K nicht parallel; die Folgerung bleibt aber dieselbe.

Behufs einer zweiten geometrischen Deutung denken wir uns $\varphi(x)$ als die über der Abscisse x stehende Fläche einer Curve; die Gleichung der letzteren ist dann $y = \varphi'(x)$, und die Formel 2) enthält nun den unmittelbar klaren Satz, dass die über der Strecke AB stehende Fläche als ein Rechteck angesehen werden kann, welches AB zur Basis und eine mittlere Ordinate zur Höhe hat. Aehnlich gestaltet sich die Sache in dem Falle, wo $\varphi(x)$ als ein Volumen betrachtet wird.

Trotz ihrer Einfachheit ist die Formel 2) doch eine sehr wichtige, die viele Anwendungen gestattet. Hier nur eine derselben. Für $\varphi(x) = log\, x$ wird $\varphi'(x) = \frac{log\, e}{x}$, mithin

$$log(a + h) - log\, a = h \frac{log\, e}{a + \vartheta h};$$

setzt man an die Stelle des ächten Bruches ϑ das eine Mal die Einheit, das andere Mal die Null, so gelangt man zu den beiden Ungleichungen

$$4)\qquad log(a + h) > log\, a + \frac{h\, log\, e}{a + h},$$

$$5)\qquad log(a + h) < log\, a + \frac{h\, log\, e}{a}.$$

Bei grossen a und kleinen h können diese Formeln zur Berechnung von $log(a + h)$ dienen, wenn $log\, a$ bekannt ist. Wollte man z. B. eine bis zur Zahl 100000 gehende Tafel der Brigg'schen Logarithmen erweitern und etwa $log\, 100003$ berechnen, so hätte man nach dem Obigen

$$\left.\begin{aligned} log\, 100003 &> 5 + \frac{3\,.\,0{,}43429448}{100003}, \\ log\, 100003 &< 5 + \frac{3\,.\,0{,}43429448}{100000}, \end{aligned}\right\}$$

oder

$$log\, 100003 > 5{,}000013028, \qquad log\, 100003 < 5{,}000013029;$$

beide Zahlwerthe stimmen in 8 Decimalen überein, daher ist, mit Rücksicht auf die neunte Stelle

$$log\, 100003 = 5{,}00001303$$

zu setzen, wie man auch in grösseren Tafeln angegeben findet.

III. Durch Verallgemeinerung der Schlüsse, welche zu Formel 2) führten, kann man noch weiter gehende Resultate erreichen. Sind z. B. $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ Functionen, die von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleiben, und deren letzte innerhalb des genannten Intervalles nur positive, von Null verschiedene Werthe besitzt, so ändert sich der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ continuirlich von $x = a$ bis $x = b$; sein grösster Werth innerhalb dieses Intervalles sei M', sein kleinster N', so ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - M' \text{ negativ}, \qquad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - N' \text{ positiv},$$

ferner wegen des positiven $\psi'(x)$

$$\varphi'(x) - M'\psi'(x) \text{ negativ}, \qquad \varphi'(x) - N'\psi'(x) \text{ positiv}.$$

Der erste Ausdruck kann als Differentialquotient von

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - M'[\psi(x) - \psi(a)]$$

angesehen werden, der zweite als Differentialquotient von

$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - N'[\psi(x) - \psi(a)],$$

und wie in Absch. I. überzeugt man sich leicht, dass u eine abnehmende und negativ bleibende Function ist, dagegen v eine wachsende und positive; daraus folgt

$$\varphi(b) - \varphi(a) - M'[\psi(b) - \psi(a)] \text{ negativ},$$
$$\varphi(b) - \varphi(a) - N'[\psi(b) - \psi(a)] \text{ positiv}.$$

Da ferner $\psi'(x)$ als positiv vorausgesetzt wurde, so ist $\psi(x)$ eine wachsende Function, $\psi(b) - \psi(a)$ positiv und nach dem Vorigen

$$M' > \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} > N'.$$

Lässt man in dem Ausdrucke

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} \quad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

x das Intervall a bis b durchlaufen, so ändert sich der Quotient rechter Hand stetig, erreicht einmal den Werth M', ein ander Mal den Werth N' und wird demnach einmal grösser und einmal kleiner als der links stehende Quotient; es giebt daher zwischen a und b wenigstens einen Werth $x = \xi$ oder $x = a + \vartheta(b - a)$, für welchen die Gleichheit beider Quotienten eintritt, nämlich

$$6) \quad \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a + \vartheta[b - a])}{\psi'(a + \vartheta[b - a])}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

oder für $b - a = h$,

$$7) \quad \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{\psi(a + h) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a + \vartheta h)}{\psi'(a + \vartheta h)}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Zu derselben Formel gelangt man auch durch folgende Betrachtung. Wenn wie früher

$$\delta = \frac{b - a}{n}, \text{ mithin } b = a + n\delta$$

gesetzt wird, und wenn ferner $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ endlich und durchaus eindeutig, d. h. continuirlich bleiben, so hat man zunächst die identische Gleichung

$$Q = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} =$$

$$\frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a) + \varphi(a+2\delta) - \varphi(a+\delta) + \cdots + \varphi(a+n\delta) - \varphi(a+\overline{n-1}\delta)}{\psi(a+\delta) - \psi(a) + \psi(a+2\delta) - \psi(a+\delta) + \cdots + \psi(a+n\delta) - \psi(a+\overline{n-1}\delta)},$$

wobei sowohl im Zähler als im Nenner n Summanden stehen, wenn jede Differenz als ein Summand gerechnet wird. Hier lässt sich der bekannte Satz anwenden, dass der Werth des Quotienten

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n}$$

zwischen dem grössten und kleinsten der einzelnen Quotienten

$$\frac{V_1}{W_1}, \quad \frac{V_2}{W_2}, \quad \frac{V_3}{W_3}, \ldots \frac{V_n}{W_n}$$

liegt, falls $W_1, W_2, \ldots W_n$ sämmtlich positiv sind*). Die letzte Bedingung ist hier erfüllt, wenn $\psi(x)$ eine wachsende Function von x bedeutet, und unter dieser Voraussetzung liegt nun Q zwischen dem grössten und kleinsten der Quotienten

$$\frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\psi(a+\delta) - \psi(a)}, \quad \frac{\varphi(a+2\delta) - \varphi(a+\delta)}{\psi(a+2\delta) - \psi(a+\delta)}, \text{ u. s. w.}$$

d. h. Q bildet eine Mittelgrösse zwischen den n Werthen, welche der Quotient

$$\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\psi(x+\delta) - \psi(x)} = \frac{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}}{\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{\delta}}$$

annimmt, sobald x die n Werthe a, $a + \delta$, $a + 2\delta$, ... $a + (n-1)\delta$ erhält. Bei unendlich wachsenden n wird

$$Lim \frac{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}}{\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{\delta}} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

*) Der grösste der genannten Quotienten sei M, der kleinste N; man hat dann

$$M > \frac{V_1}{W_1} > N, \quad M > \frac{V_2}{W_2} > N, \ldots \quad M > \frac{V_n}{W_n} > N,$$

und durch Multiplication mit den positiven Factoren $W_1, W_2, \ldots W_n$

$$M W_1 > V_1 > N W_1, \quad M W_2 > V_2 > N W_2 \text{ u. s. w.}$$

Indem man diese Ungleichungen addirt und nachher mit $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ dividirt, erhält man

$$M > \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n} > N, \text{ w. z. b. w.}$$

und es ist nun Q eine Mittelgrösse zwischen den unendlich vielen Werthen, welche $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ annimmt, sobald x das Intervall a bis b stetig durchläuft. Daraus folgt unmittelbar, dass einer dieser Werthe, etwa der für $x = \xi = a + \vartheta (b - a)$ eintretende, dem Quotienten Q gleichkommen muss, wofern sich $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ continuirlich ändert von $x = a$ bis $x = b$. Uebrigens kann hierbei $\psi'(a)$ oder $\psi'(b)$ verschwinden, denn es wird dadurch die Continuität von $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ innerhalb des Intervalles a bis b nicht gestört.

Den für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ angegebenen Bedingungen genügt z. B. die Function

$$\psi(x) = b^p - (b - x)^p, \qquad \psi'(x) = p(b - x)^{p-1},$$

bei welcher in der That

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(x)}{p(b - x)^{p-1}}$$

continuirlich bleibt, so lange x die Stelle $x = b$ nicht überschreitet, und $\varphi'(x)$ continuirlich ist; man erhält in diesem Falle aus Nro. 6)

$$8) \qquad \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b - a}{p(1 - \vartheta)^{p-1}} \varphi'(a + \vartheta[b - a]).$$

Für den speciellen Werth $p = 1$ geht diese Gleichung in die früher unter Nro. 2) entwickelte Formel über.

§. 9.

Differentiation der Functionen mehrerer Variabelen.

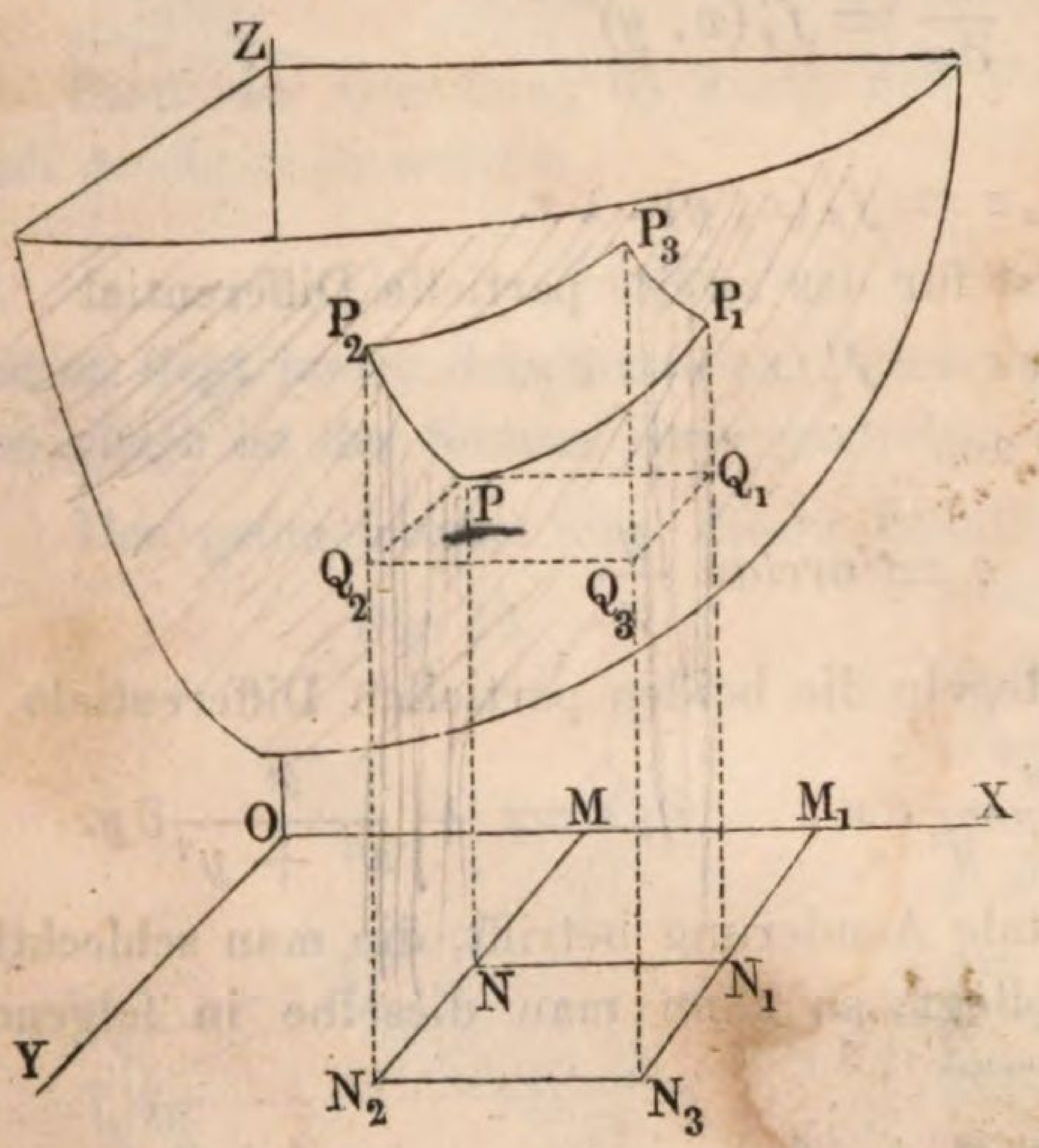
I. Wenn z als Function der beiden unabhängigen Variabelen x und y betrachtet und

$$1) \qquad z = f(x, y)$$

gesetzt wird, so sind drei verschiedene Aenderungen zu unterscheiden; es kann nämlich entweder x allein geändert werden, während y constant bleibt, oder man lässt y bei constanten x sich ändern, oder endlich, man setzt voraus, das x und y gleichzeitige Aenderungen erleiden. Begreiflicherweise ändert sich z in jedem Falle, da aber diese Aenderungen verschieden sein können, so bedarf es einer Unterscheidung derselben, und zwar nennt man die erste die partielle Aenderung von z nach x, die zweite die partielle Aenderung nach y, und

die letzte die **totale** Aenderung des z (nach x und y). Diese drei Aenderungen kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man die Gleichung 1) als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Fläche betrachtet, etwa wie in Fig. 11, wo $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ ist. Lässt man hier x allein um $\Delta x = MM_1$ wachsen, so rückt N nach N_1, P bewegt sich auf dem Durchschnitte der Fläche mit der Ebene PNN_1 und erhält die neue Lage P_1; der Aenderung Δx entspricht daher die partielle Aenderung

Fig. 11.



$$\Delta z_{(x)} = P_1 Q_1 = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Wenn zweitens y allein um $\Delta y = NN_2$ zunimmt, so rückt P parallel zur Ebene yz auf der Fläche fort, etwa bis P_2, und es ist die zugehörige partielle Aenderung

$$\Delta z_{(y)} = P_2 Q_2 = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Im Fall endlich x um Δx, und gleichzeitig y um Δy zunimmt, gelangt N nach N_3, P nach P_3 und es entsteht die totale Aenderung

$$\Delta z_{(x,y)} = P_3 Q_3 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Was nun die partiellen Aenderungen betrifft, so sind dieselben sehr leicht zu behandeln. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta z_{(x)}}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ist nämlich ganz so gebildet, als wäre y eine Constante, und es bedarf daher beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δx nur eines Zeichens, dass x hier als alleinige Variabele angesehen wurde. Für den Grenzwerth linker Hand, d. h. für den partiell nach x genommenen Differentialquotienten, benutzt man eins der Zeichen,

$$\frac{d z_{(x)}}{dx}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial x},$$

von denen das letzte am bequemsten ist; den Grenzwerth rechter

Hand, d. h. die partiell nach x derivirte Function, bezeichnet man mit $f'_x(x, y)$, und hat nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

oder

$$2)\qquad \partial_x z = f'_x(x, y) \,.\, \partial x.$$

Dem entsprechend ist für das zweite partielle Differential

$$3)\qquad \partial_y z = f'_y(x, y) \,.\, \partial y.$$

So erhält man z. B. aus

$$z = arctan\, \frac{y}{x}$$

nach den gewöhnlichen Regeln die beiden partiellen Differentiale

$$\partial_x z = -\frac{y}{x^2 + y^2}\partial x, \qquad \partial_y z = +\frac{x}{x^2 + y^2}\partial y.$$

Was endlich die totale Aenderung betrifft, die man schlechthin mit Δz zu bezeichnen pflegt, so kann man dieselbe in folgender Form darstellen

$$4)\qquad \Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x}\Delta x$$
$$+ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y,$$

und es ist nun zu untersuchen, welchen Grenzen sich die vorkommenden Quotienten bei gleichzeitig verschwindenden Δx und Δy nähern. Beachtet man, dass der Zähler des ersten Quotienten ebenso gebildet ist, als wenn $y + \Delta y$ constant und nur x um Δx geändert wäre, so erhellt augenblicklich die Anwendbarkeit der Formel 2) des vorigen Paragraphen und dann hat man für $a = x$, $h = \Delta x$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y + \Delta y) + \Delta x f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y),$$

mithin statt der Gleichung 4) die folgende

$$5)\qquad \Delta z = f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y) \,.\, \Delta x$$
$$+ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y.$$

Bei verschwindenden Δx und Δy wird nun

$$Lim\, f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$Lim\, \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y),$$

mithin aus der vorigen Gleichung

$$6)\qquad dz = f'_x(x, y) \,.\, dx + f'_y(x, y) \,.\, dy$$

oder

7) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

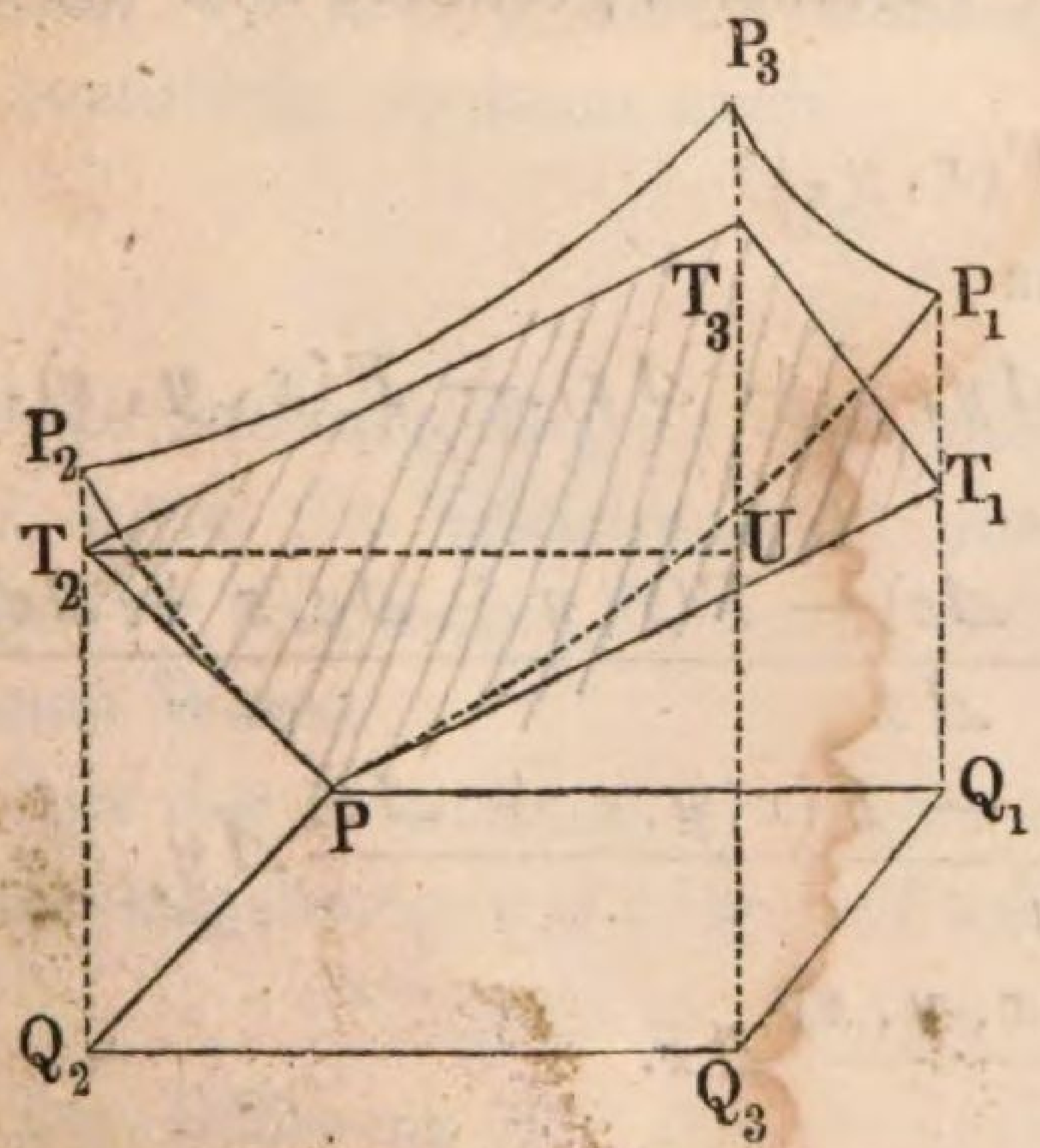
Statt der Gleichung 6) kann, den Formeln 2) und 3) zufolge, auch geschrieben werden

8) $$dz = \partial_x z + \partial_y z,$$

und es liegt hierin der Satz, dass das totale Differential einer Function gleich ist der Summe ihrer partiellen Differentiale.

Der geometrische Sinn dieses Resultates erhellt aus folgender Betrachtung. Denkt man sich in der Gleichung $z = f(x, y)$ vorerst y als constant, so hat man die Gleichung der Curve PP_1, in welcher die Fläche von der Ebene $PNN_1 \parallel xz$ geschnitten wird, daher ist $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Tangente des Winkels Q_1PT_1 (Fig. 12), welchen eine durch P an die Curve PP_1 gelegte berührende Gerade mit der x-Achse einschliesst. Aus ganz ähnlichen Schlüssen folgt,

Fig. 12.



dass $\frac{\partial z}{\partial y}$ die trigonometrische Tangente des Winkels Q_2PT_2 darstellt, welchen die Tangente am Schnitte PP_2 mit der y-Achse bildet. Es gelten daher die Gleichungen

$$Q_1T_1 = \frac{\partial z}{\partial x} PQ_1, \qquad Q_2T_2 = \frac{\partial z}{\partial y} PQ_2.$$

Durch die Tangenten PT_1 und PT_2 kann man eine Ebene legen, welche von P_3Q_3 in einem Punkte T_3 geschnitten wird; das Viereck $PT_1T_3T_2$ ist dann ein Parallelogramm, und wenn man noch $T_2U \parallel PQ_1$ zieht, so erhält man die congruenten Dreiecke T_2UT_3 und PQ_1T_1, mithin $T_3U = T_1Q_1$. Dies giebt

$$Q_3T_3 = T_3U + UQ_3 = Q_1T_1 + Q_2T_2.$$

Je kleiner nun PQ_1 und PQ_2 genommen werden, um so näher rückt P_1 an T_1, P_2 an T_2, P_3 an T_3, um so genauer gelten daher auch die Beziehungen

$$Q_1 P_1 = \frac{\partial z}{\partial x} P Q_1, \qquad Q_2 P_2 = \frac{\partial z}{\partial y} P Q_2,$$

$$Q_3 P_3 = Q_1 P_1 + Q_2 P_2;$$

diese sind identisch mit den Gleichungen 2), 3) und 8), weil ein gegen die Null convergirendes $P Q_1$ mit dx, ebenso $P Q_2$ mit dy bezeichnet werden muss und $Q_1 P_1$, $Q_2 P_2$, $Q_3 P_3$ die entsprechenden Zunahmen $\partial_x z$, $\partial_y z$, dz darstellen. Mit einem Worte: je näher die Punkte P_1, P_2, P_3 dem Punkte P liegen, um so eher ist es erlaubt, P_1 und P_2 als Punkte der Tangenten $P T_1$, $P T_2$, und P_3 als einen Punkt der anschliessenden Ebene $T_1 P T_2$ zu betrachten. In der That wird sich in Cap. III. zeigen, dass diese Ebene die Fläche berührt.

II. Bei Functionen mehrerer Variabelen gestaltet sich die Sache sehr ähnlich. Aus

$$u = F(x, y, z)$$

erhält man für die totale Differenz

$$\Delta u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\Delta u = \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x$$
$$+ \frac{F(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \Delta y$$
$$+ \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z.$$

Unter Anwendung der Formel 2) in §. 8 wird hieraus, wenn ϑ und η positive ächte Brüche bezeichnen,

$$\Delta u = F'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \, . \, \Delta x$$
$$+ F'_y(x, y + \eta \Delta y, z + \Delta z) \, . \, \Delta y$$
$$+ \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z$$

und durch Uebergang zur Grenze

9) $$du = F'_x(x, y, z) \, . \, dx + F'_y(x, y, z) \, . \, dy + F'_z(x, y, z) \, . \, dz$$

oder

10) $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$
$$= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u.$$

Diese Betrachtungen sind leicht auf beliebig viele Variabele auszudehnen und führen zu dem allgemeinen Theoreme: Das totale Differential einer Function beliebig vieler Variabelen ist die Summe der partiellen Differentiale jener Function.

§. 10.

Differentiation unentwickelter Functionen.

I. Besteht zwischen zwei Variabelen x und y eine Gleichung, die man immer auf die Normalform

$$1)\qquad f(x, y) = 0$$

bringen kann, so sind nicht beide Variabele willkührlich; denn durch Auflösung der Gleichung nach y würde man ein Resultat von der Form

$$y = \varphi(x)$$

erhalten, wo nun y von x abhängig ist. Lässt sich diese Reduction ausführen, so kann auch

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$

nach den früheren Regeln abgeleitet werden; dies geht jedoch nicht mehr, wenn die Gleichung 1) unauflösbar, mithin y eine unentwickelte (implicite) Function von x ist. Man hilft sich dann auf folgende Weise.

Aus der Gleichung 1) erhält man zunächst, weil sie für alle x und die zugehörigen y bestehen soll,

$$2)\qquad f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0;$$

Die Differenz der Gleichungen 2) und 1), dividirt durch Δx, liefert weiter

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Auf der linken Seite kann man dieselbe Transformation vornehmen, die im vorigen Paragraphen benutzt wurde, nämlich

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

und hier gelten fast wörtlich dieselben Schlüsse wie dort; man erhält beim Grenzübergange

$$3)\qquad f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Zu demselben Resultate gelangt man unmittelbar, sobald man in Formel 6) des vorigen Parapraphen $z = 0$ setzt und die entstehende Gleichung durch dx dividirt; in der That ist es auch für die Untersuchungen des §. 9 vollkommen gleichgültig, ob man x, y, z etc. als

willkührlich oder als von einander abhängig betrachtet. Aus Nro. 3) folgt nun

4) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

oder, wie man häufig kürzer schreibt,

5) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Die hiermit für $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ gewonnene Formel enthält zwar noch y, welches man im Allgemeinen nicht angeben, dessen Werth aber gefunden werden kann, sobald x einen speciellen Zahlwerth bekommt; dann wird nämlich die Gleichung $f(x, y) = 0$ zu einer numerischen Gleichung mit der einen Unbekannten y, und jede solche Gleichung kann mindestens durch Probiren aufgelöst werden.

Wäre z. B. die gegebene Bedingungsgleichung:

$$f(x, y) = y^5 x^3 - 2y^4 x^2 + 3y - 6x = 0,$$

die in Beziehung auf y nicht lösbar ist, so folgt:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3$$

und mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = -\frac{3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6}{5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3}.$$

Für $x = 1$ z. B. geht die obige Bedingungsgleichung in die numerische Gleichung über:

$$y^5 - 2y^4 + 3y - 6 = 0,$$

deren einzige reelle Wurzel $y = 2$ ist; dem Werthe $x = 1$ entspricht also $\varphi(1) = 2$ und

$$\varphi'(1) = -\frac{3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^4 - 6}{5 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 3} = -\frac{26}{19}.$$

Ebenso würde man für jeden anderen numerischen Werth von x die zugehörigen Zahlwerthe von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ aufsuchen können.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$4y^3 - 3y + \sin x = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 12 y^2 - 3,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1 - 4y^2)}.$$

Der vorliegende Fall gestattet eine Probe. Die Wurzel der obigen Gleichung ist nämlich $y = \sin \frac{1}{3} x$, wie man mittelst der goniometrischen Formel:

$$4 \sin^3 A - 3 \sin A + \sin 3 A = 0$$

leicht finden wird. Es müsste also

$$\frac{\cos x}{3(1 - 4 \sin^2 \frac{1}{3} x)} = \frac{d(\sin \frac{1}{3} x)}{dx}$$

sein, und dies bestätigt sich, wenn man die bekannte Formel

$$\cos 3 A = \cos A \ (1 - 4 \sin^2 A)$$

für $A = \frac{1}{3} x$ anwendet und andererseits $\sin \frac{1}{3} x$ auf gewöhnliche Weise differenzirt.

II. Bei Functionen von drei und mehr Variabelen gestaltet sich die Sache ganz ähnlich. Besteht z. B. zwischen den drei Variabelen x, y, z die Bedingungsgleichung

6) $$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder kürzer } F = 0,$$

so würde durch Reduction auf z ein Resultat von der Form

7) $$z = \psi(x, y)$$

zum Vorschein kommen, und dann hätte es keine Schwierigkeit, die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ direct zu entwickeln. Ohne jene Reduction vorzunehmen, kann man aber auch folgendermaassen verfahren. Nach Nro. 9) des vorigen Paragraphen ist für $u = 0$

$$0 = F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz$$

oder

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz;$$

weil ferner z von x und y abhängt, so hat man auch nach Nro. 7) in §. 9

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

mithin, wenn dieser Werth in die vorige Gleichung substituirt und mit dx dividirt wird,

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx}.$$

Da x und y von einander unabhängig sind, so hängt auch dy nicht von dx ab, folglich ist $\frac{dy}{dx}$ ein Quotient, dessen Zähler und Nenner ganz beliebige (nur gegen die Null convergirende) Grössen sind, und der ebendesshalb jeden beliebigen Werth haben kann; in der That würde es frei stehen, $dy = q\,dx$ zu setzen, wo q irgend eine willkührliche Grösse bezeichnet. Unter diesen Umständen ist die vorige Gleichung so lange unmöglich, als nicht der Inhalt jeder Parenthese für sich $= 0$ ist; dies giebt

$$8) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man viel kürzer durch folgende Ueberlegung. Wenn $\frac{\partial z}{\partial x}$ gesucht wird, so gilt y als Constante und daher kann für diesen Zweck die Gleichung $F = 0$ so angesehen werden, als enthielte sie nur die unabhängige Variabele x und die abhängige Variabele z; es ist folglich

$$\frac{\partial F}{\partial x}\partial x + \frac{\partial F}{\partial z}\partial z = 0,$$

und hieraus erhält man die erste der Formeln in Nro. 8). Die zweite Formel findet sich durch die analoge Bemerkung, dass bei der Entwickelung von $\frac{\partial z}{\partial y}$ keine Rücksicht auf x zu nehmen ist.

Cap. II.

Mehrfache Differentiationen.

§. 11.

Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Da im Allgemeinen der Differentialquotient einer Function

$$y = f(x)$$

wiederum eine Function von x ist, so kann die Operation des Differenzirens auch auf diese neue Function angewendet werden und dann entsteht der Differentialquotient des Differentialquotienten, der sogen. zweite Differentialquotient. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zum dritten, vierten u. s. w. Differentialquotienten. So erhält man z. B. von $\frac{2}{3} x \sqrt{x}$ als ersten Differentialquotienten:

$$\frac{d\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)}{dx} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},$$

als zweiten:

$$\frac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

als dritten:

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)}{dx} = -\tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \text{ u. s. w.}$$

Wie man sieht, hat eine solche successive Entwickelung der Differentialquotienten höherer Ordnungen nicht die mindeste Schwierigkeit, und es bedarf daher nur noch einiger Worte über die richtige Bezeichnung derselben.

Da schon früher der Differentialquotient oder die derivirte Function von $f(x)$ mit $f'(x)$ bezeichnet wurde, so liegt es nahe, für die

weiteren Differentialquotienten oder derivirten Functionen von $f(x)$ die Symbole $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. zu benutzen; hiernach ist

$$1)\qquad \frac{df(x)}{dx}=f'(x)\,,\ \frac{df'(x)}{dx}=f''(x)\,,\ \frac{df''(x)}{dx}=f'''(x) \text{ u. s. w.}$$

überhaupt allgemein, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$2)\qquad \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}=f^{(n)}(x),$$

wobei $f^{(o)}(x)$ für $f(x)$ zu rechnen ist.

Eine ganz ähnliche Bezeichnung wird auch in Beziehung auf y gebraucht; man setzt dann

$$3)\qquad \frac{dy}{dx}=y'\,,\ \frac{dy'}{dx}=y''\,,\ \frac{dy''}{dx}=y''' \text{ u. s. w.}$$

mithin ist

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

das symbolisch ausgedrückte Resultat einer n maligen Differentiation der Gleichung 1).

Nicht selten bezeichnet man einen Differentialquotienten durch ein vorgesetztes D z. B.

$$D(x^3)=3x^2, \qquad D\sin x=\cos x;$$

die successiven Differentialquotienten von y müssen dann folgendermaassen geschrieben werden:

$$Dy\ ,\ DDy\ ,\ DDDy \text{ u. s. w.}$$

Da jedoch ein vielmaliges Hinsetzen von D weder bequem noch übersichtlich ist, so hat man sogen. Wiederholungsindices eingeführt und schreibt

$$Dy,\ D^2y,\ D^3y \text{ u. s. w.},$$

also allgemein

$$D^ny=D^nf(x).$$

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass hier n keinen Potenzexponenten von D, sondern nur die nmalige Anwendung der Operation D (der Differentiation) bedeuten soll.

Die zwar umständlichste aber consequenteste Bezeichnung ergiebt sich, wenn man in Nr. 3) jede Gleichung in die nächstfolgende substituirt. So ist zuvörderst

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

doch lässt sich dies noch abkürzen. Unter der Voraussetzung nämlich, dass x die unabhängige Variabele ist, bedeutet dx einen gegen

die Null convergirenden, im Uebrigen aber willkührlichen Zuwachs des x, den man z. B. dadurch bilden kann, dass man $\Delta x = \frac{1}{\omega}$ setzt und ω das Gebiet der natürlichen Zahlen durchlaufen lässt. Ebendesswegen ist dx nicht von x abhängig, sondern constant in Beziehung auf x, wie es sich sonst auch ändern möge. Dagegen ist dy kein willkührlicher Zuwachs des y, sondern von x abhängig [$dy = f'(x) \,.\, dx$], mithin besitzt der Bruch $\frac{dy}{dx}$ einen variabelen Zähler, aber einen im obigen Sinne constanten Nenner und folglich ist nun

$$y'' = \frac{d\,dy}{dx \,.\, dx}.$$

Im Zähler benutzt man zur Abkürzung den Wiederholungsindex, im Nenner ist $dx \,.\, dx$ das Quadrat von dx, wofür man $(dx)^2$ oder kürzer dx^2 zu schreiben pflegt; demnach hat man

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$y''' = \frac{d\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d\,d^2 y}{dx \,.\, dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

Für den nten Differentialquotienten von $y = f(x)$ gelten also folgende Bezeichnungen

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y = y^{(n)}$$
$$= \frac{d^n f(x)}{dx^n} = D^n f(x) = f^{(n)}(x),$$

wovon man in jedem einzelnen Falle die gerade bequemste wählt.

In dem Vorigen gilt der nte Differentialquotient immer als das Resultat von n nach einander ausgeführten Differentiationen, und dem entsprechend haben wir bis jetzt keine andere Definition desselben als

$$D^n y = D(D^{n-1} y) \text{ oder } f^{(n)}(x) = Lim \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x};$$

man kann aber fragen, nach welchem Gesetze $f^{(n)}(x)$ mit der ursprünglichen Function $f(x)$ zusammenhängt, oder welche Operationen mit $f(x)$ vorgenommen werden müssen, wenn man daraus sofort $f^{(n)}(x)$ herleiten will, ohne die zwischenliegenden Functionen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ zu berechnen. Da $f'(x)$ der Grenz-

werth des ersten Differenzenquotienten ist, so lässt sich vermuthen, dass $f^{(n)}(x)$ der Grenzwerth des nten Differenzenquotienten sein werde; dies wollen wir genauer untersuchen.

Bezeichnen wir Δx kurz mit h, so ist der erste Differenzenquotient von $f(x)$

$$\text{4)} \qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

daraus erhalten wir den zweiten Differenzenquotienten, wenn wir rechter Hand x um h wachsen lassen, von dem so gebildeten Ausdrucke den ungeänderten Bruch abziehen und den Rest durch $\Delta x = h$ dividiren; es ist also

$$\frac{\Delta \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}$$

oder kürzer

$$\text{5)} \qquad \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Durch die nämlichen Operationen gelangt man zu dem dritten Differenzenquotienten

$$\text{6)} \qquad \frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} = \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3},$$

und indem man auf diese Weise fortgeht, bemerkt man leicht, dass der nte Differenzenquotient unter folgender Form enthalten ist

$$\text{7)} \qquad \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$$

$$= \frac{f(x+nh) - C_1 f(x+\overline{n-1}\,h) + C_2 f(x+\overline{n-2}\,h) - \cdots \pm f(x)}{h^n},$$

worin C_1, C_2, C_3 etc. gewisse Zahlencoefficienten bedeuten. Diese hängen zwar von n, nicht aber von der speciellen Natur der Function $f(x)$ ab, sie lassen sich daher bestimmen, wenn man $f(x)$ so wählt, dass der nte Differenzenquotient von $f(x)$ unmittelbar, d. h. ohne Anwendung der Formel 7) entwickelt werden kann. Die passendste Wahl dieser Art ist $f(x) = a^x$; man hat dann

$$\frac{\varDelta a^x}{\varDelta x} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

$$\frac{\varDelta^2 a^x}{\varDelta x^2} = \frac{a^{x+h}\dfrac{a^h - 1}{h} - a^x \dfrac{a^h - 1}{h}}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h}\right)^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\varDelta^n a^x}{\varDelta x^n} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h}\right)^n$$

mithin aus Formel 7) nachdem man $\varDelta x^n$ gegen h^n, und beiderseits a^x gestrichen hat,

$$(a^h - 1)^n = a^{nh} - C_1 a^{(n-1)h} + C_2 a^{(n-2)h} - \dots \pm 1.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Coefficienten C_1, C_2, C_3 etc. mit den Binomialcoefficienten $(n)_1$, $(n)_2$, $(n)_3$ etc. identisch sind; die allgemeine Formel 7) lautet daher

8)
$$\frac{\varDelta^n f(x)}{\varDelta x^n}$$

$$= \frac{f(x + nh) - (n)_1 f(x + \overline{n-1}\,h) + (n)_2 f(x + \overline{n-2}\,h) - \cdots}{h^n}.$$

Um nun zu entscheiden, welchen Grenzen sich die in 5), 6) und 8) verzeichneten Ausdrücke nähern, falls $\varDelta x = h$ gegen die Null convergirt, setzen wir für den Augenblick

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x)$$

und erhalten

$$\frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x) + \varrho,$$

wo ϱ gleichzeitig mit h die Null zur Grenze hat. Aus der vorhergehenden Gleichung ergiebt sich

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

mithin ist nun

$$\frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2} = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \varrho = \frac{\varDelta f'(x)}{\varDelta x} + \varrho$$

und durch Uebergang zur Grenze

9)
$$Lim \frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2} = \frac{d f'(x)}{dx} = f''(x).$$

Setzen wir ferner

$$\frac{f(x + 2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \psi(x),$$

so haben wir

$$\frac{\varDelta^3 f(x)}{\varDelta x^3} = \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x) + \varrho$$

$$= \frac{f'(x+2h) - 2f'(x+h) + f'(x)}{h^2} + \varrho$$

$$= \frac{\varDelta^2 f'(x)}{\varDelta x^2} + \varrho;$$

durch Uebergang zur Grenze wird hieraus, wenn man von der Gleichung 9) in der Weise Gebrauch macht, dass man f' für f schreibt,

10) $$Lim \frac{\varDelta^3 f(x)}{\varDelta x^3} = \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x).$$

Der weitere Fortgang dieser Schlüsse ist leicht zu übersehen und führt zu der allgemeinen Formel

11) $$Lim \frac{\varDelta^n f(x)}{\varDelta x^n} = f^{(n)}(x),$$

womit die aufgestellte Vermuthung ihre Bestätigung findet.

Auch in diesen successiven Differentiationen kann, wenigstens bis zu gewisser Ordnung, ein geometrischer Sinn liegen. Denken wir uns z. B. $f(x)$ als die über der Abscisse x stehende Fläche einer ebenen Curve, so ist $f'(x)$ die zur Abscisse x gehörende Ordinate, und $f''(x)$ die trigonometrische Tangente des entsprechenden Berührungswinkels. Hiernach lässt sich das anfangs erwähnte Beispiel leicht interpretiren, und zwar gelten die erwähnten Beziehungen für eine Parabel, deren Parameter $= 1$ ist.

§. 12.

Höhere Differentialquotienten der einfachsten Functionen.

I. Durch fortgesetzte Anwendung der für die Potenz geltenden Differentiationsregel findet man sehr leicht

$$D\,(x^\mu) = \mu\, x^{\mu-1},$$

$$D^2(x^\mu) = \mu\,(\mu-1)\, x^{\mu-2},$$

$$D^3(x^\mu) = \mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\, x^{\mu-3},$$

und überhaupt, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet,

1) $$D^n\,(x^\mu) = \mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\mu-[n-1])\, x^{\mu-n}.$$

Auf gleiche Weise kann die Differentiation der allgemeineren Potenz $(a + bx)^\mu$ ausgeführt werden; das Resultat lautet

2) $$D^n (a+bx)^\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])b^n(a+bx)^{\mu-n}.$$

Ist μ eine ganze positive Zahl, so wird der μte Differentialquotient constant, mithin haben alle folgenden Differentialquotienten den gemeinschaftlichen Werth Null.

Für $\mu = -1$ und für $\mu = -\frac{1}{2}$ ergeben sich aus Nr. 2) die häufig vorkommenden specielleren Formeln

3) $$D^n \frac{1}{a+bx} = \frac{(-1)^n\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \,.\, b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

4) $$D^n \frac{1}{\sqrt{a+bx}} = \frac{(-1)^n\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1) b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

II. Bezeichnet M den Modulus des Systems, worin $log\, x$ genommen wird, so hat man

$$D\, log\, x = \frac{M}{x},$$

mithin durch beiderseitige $(n-1)$malige Differentiation

$$D^n\, log\, x = M D^{n-1} \frac{1}{x}.$$

Der Werth des rechts stehenden Differentialquotienten lässt sich aus Nr. 3) ableiten, wenn man $a = 0$, $b = 1$ und $n - 1$ für n setzt; man erhält

5) $$D^n\, log\, x = M \frac{(-1)^{n-1}\, 1 \,.\, 2 \ldots (n-1)}{x^n}.$$

Auf gleiche Weise gelangt man zu der allgemeineren Formel

6) $$D^n\, log\,(a+bx) = M \frac{(-1)^{n-1}\, 1 \,.\, 2 \ldots (n-1) b^n}{(a+bx)^n}.$$

III. Sehr einfach gestaltet sich die successive Differentiation der Exponentialgrösse; es ist nämlich

$$D a^x = a^x\, l a\,,\ D^2 a^x = a^x (l a)^2\,,\ D^3 a^x = a^x (l a)^3, \ldots$$

daher allgemein

7) $$D^n a^x = a^x (la)^n.$$

Für $a = e^\beta$, woraus $la = \beta$ folgt, hat man

8) $$D^n e^{\beta x} = \beta^n e^{\beta x}.$$

IV. In Beziehung auf den Sinus gelten folgende unmittelbar verständliche Gleichungen

$$D \sin x = + \cos x = \sin(\tfrac{1}{2}\pi + x),$$
$$D^2 \sin x = - \sin x = \sin(\tfrac{2}{2}\pi + x),$$
$$D^3 \sin x = - \cos x = \sin(\tfrac{3}{2}\pi + x),$$
$$D^4 \sin x = + \sin x = \sin(\tfrac{4}{2}\pi + x),$$

u. s. w.

die allgemeine Formel lautet demgemäss

9) $$D^n \sin x = \sin\left(\frac{n}{2}\pi + x\right).$$

V. Für den Cosinus gilt eine sehr ähnliche Rechnung, aus der man findet

10) $$D^n \cos x = \cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right).$$

Weit verwickelter gestalten sich die höheren Differentialquotienten von $\sec x$, $\tan x$, $\csc x$, $\cot x$, $\arcsin x$ und $\arctan x$; bevor wir etwas Genaueres darüber angeben können, müssen wir erst die Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen untersuchen.

§. 13.

Die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen.

I. Sind u und v Functionen der unabhängigen Variabelen x, ferner a und b constante Grössen, so hat man nach §. 5, Nr. 3)

$$D(au + bv) = a\,Du + b\,Dv;$$

hieraus folgt, wenn beiderseits weiter differenzirt wird,

$$D^2(au + bv) = a\,D^2u + b\,D^2v,$$
$$D^3(au + bv) = a\,D^3u + b\,D^3v,$$

und allgemein

1) $$D^n(au + bv) = a\,D^nu + b\,D^nv.$$

Nach dieser Regel ist z. B. der Ausdruck $\frac{1}{1-x^2}$ sehr leicht zu differenziren, wenn man die identische Gleichung

$$\frac{1}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right\}$$

beachtet; mit Hülfe von Formel 3) des vorigen Paragraphen erhält man nämlich

$$D^n \frac{1}{1-x^2} = 2.3.4\ldots n\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right\}.$$

II. Die Regel für die Differentiation eines Productes aus zwei veränderlichen Factoren liefert, mehrmals nach einander angewendet, folgende Gleichungen

$$D\,(uv) = u\,.\,Dv + Du\,.\,v$$
$$D^2(uv) = u\,.\,D^2v + 2\,Du\,.\,Dv + D^2u\,.\,v$$
$$D^3(uv) = u\,.\,D^3v + 3\,Du\,.\,D^2v + 3\,D^2u\,.\,Dv + D^3u\,.\,v.$$

Hieraus ersieht man, dass der nte Differentialquotient folgende Gestalt besitzen muss

2) $$D^n(uv) = A_0 u\,.\,D^n v + A_1\,Du\,.\,D^{n-1}v + A_2 D^2u\,.\,D^{n-2}v + \cdots$$
$$\cdots\cdots + A_{n-1}D^{n-1}u\,.\,Dv + A_n D^n u\,.\,v,$$

worin $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ gewisse noch unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten, die nicht von der Natur der Functionen u und v, sondern nur von der Anzahl der ausgeführten Differentiationen, d. h. von n abhängen. Wählt man demnach u und v im speciellen Falle so, dass die beiderseits in Nro. 2) angedeuteten Differentiationen auf gewöhnlichem Wege ausführbar sind, so erhält man eine Bedingungsgleichung für jene Coefficienten. Diese Bemerkung dient zur Bestimmung von $A_0, A_1, \ldots A_n$. Wir setzen nämlich

$$u = e^{\beta x}, \quad v = e^x, \quad \text{mithin } uv = e^{(1+\beta)x},$$

woraus für ganze positive p, q und n folgt

$$D^p u = \beta^p e^{\beta x}, \quad D^q v = e^x, \quad D^n(uv) = (1+\beta)^n e^{(1+\beta)x};$$

indem wir diese Werthe für die Gleichung 2) benutzen und am Ende den beiderseits gemeinschaftlichen Factor $e^{\beta x}e^x = e^{(1+\beta)x}$ weglassen, gelangen wir zu der Gleichung

$$(1+\beta)^n$$
$$= A_0 + A_1\beta + A_2\beta^2 + \cdots\cdots + A_{n-1}\beta^{n-1} + A_n\beta^n.$$

Hieraus erkennt man sofort, dass die Coefficienten A_0, A_1, A_2 etc. die sogenannten Binomialcoefficienten des Exponenten n sind; demzufolge gilt für die n-malige Differentiation eines aus zwei variabelen Factoren bestehenden Productes die Formel

3) $$D^n(uv) = (n)_0\,u\,.\,D^n v + (n)_1\,Du\,.\,D^{n-1}v$$
$$+ (n)_2\,D^2u\,.\,D^{n-2}v + \cdots\cdots$$

Man kann dafür auch schreiben

4) $$D^n(uv) = (n)_0\,u^{(o)}v^{(n)} + (n)_1\,u'\,v^{(n-1)} + (n)_2\,u''\,v^{(n-2)} + \cdots\cdots,$$

wobei $u^{(o)}$ für u zu rechnen ist. Die rechte Seite hat die Form des binomischen Satzes und man könnte daher symbolisch schreiben,

$$D^n(uv) = (u+v)^{(n)},$$

nur muss man sich in diesem Falle erinnern, dass nach geschehener

binomischer Entwickelung auf der rechten Seite jeder Potenzexponent durch einen gleichhohen Wiederholungsexponenten zu ersetzen ist.

Beispielweis sei $u = lx$, $v = \frac{1}{x}$; die Formel 3) giebt dann nach gehöriger Reduction

$$D^n\left(\frac{lx}{x}\right) = \frac{(-1)^n\, 1 \,.\, 2 \ldots n}{x^{n+1}}\left[lx - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right].$$

§. 14.

Anwendungen der vorigen allgemeinen Formeln.

I. Bezeichnet man $sec\, x$ kurz mit v, so ist identisch

1) $$cos\, x \,.\, v = 1,$$

mithin durch n-malige Differentiation, wobei die Formel 4) für $u = cos\, x$ in Anspruch genommen wird,

$$(n)_0 \cos x \,.\, v^{(n)} - (n)_2 \cos x \,.\, v^{(n-2)} + (n)_4 \cos x \,.\, v^{(n-4)} - \cdots$$
$$- (n)_1 \sin x \,.\, v^{(n-1)} + (n)_3 \sin x \,.\, v^{(n-3)} - (n)_5 \sin x \,.\, v^{(n-5)} + \cdots$$
$$= 0;$$

hieraus folgt, indem man $v^{(n)}$ als Unbekannte ansieht,

2) $$v^{(n)} = [(n)_1 v^{(n-1)} - (n)_3 v^{(n-3)} + (n)_5 v^{(n-5)} - \cdots] \tan x$$
$$+ (n)_2 v^{(n-2)} - (n)_4 v^{(n-4)} + (n)_6 v^{(n-6)} - \cdots.$$

Da man $v^{(0)} = sec\, x$ und $v' = sec\, x \,.\, tan\, x$ kennt, so dient diese Gleichung, wenn der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ etc. genommen wird, zur successiven Berechnung von v'', v''' etc. Doch würde es nicht leicht sein, auf diesem Wege das allgemeine Bildungsgesetz von $v^{(n)}$ zu entdecken.

II. Dasselbe Verfahren passt auf die Tangente. Aus $v = tan\, x$ folgt nämlich

3) $$cos\, x \,.\, v = sin\, x$$

und nach der obigen Methode

4) $$v^{(n)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2} n \pi + x\right)}{\cos x} + [(n)_1 v^{(n-1)} - (n)_3 v^{(n-3)} + \cdots] \tan x$$
$$+ (n)_2 v^{(n-2)} - (n)_4 v^{(n-4)} + \cdots.$$

Die Cosecante und die Cotangente liefern ähnliche Formeln, deren Entwickelung dem Leser überlassen bleiben möge.

III. Setzt man

5) $$U = arcsin\, x,$$

so wird

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad U'' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}};$$

statt der letzten Gleichung kann man schreiben

$$(1 - x^2)\, U'' - x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

oder

$$(1 - x^2)\, U'' - x\, U' = 0.$$

Durch n-malige Differentiation dieser Gleichung ergiebt sich

$$\left.\begin{matrix} (n)_0 (1 - x^2)\, U^{(n+2)} - (n)_1\, 2x\, U^{(n+1)} - (n)_2\, 2 \,.\, 1\, U^{(n)} \\ - (n)_0\, x\, U^{(n+1)} - (n)_1 \,.\, 1\, U^{(n)} \end{matrix}\right\} = 0,$$

oder, wenn $U^{(n+2)}$ als Unbekannte angesehen wird,

$$6)\qquad U^{(n+2)} = \frac{(2n + 1)\, x\, U^{(n-1)} + n^2\, U^{(n)}}{1 - x^2}.$$

Von U' und U'' ausgehend, erhält man jetzt U''', U^{IV} etc., indem man der Reihe nach $n = 1, 2, 3$ etc. setzt.

Uebrigens kann man irgend einen höheren Differentialquotienten von $U = \arcsin x$ auch direct vollständig entwickeln, nur ist dann die Formel weniger einfach. Man hat nämlich

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}};$$

Hier lässt sich, wenn beiderseits n-mal differenzirt wird, rechter Hand zuerst die Formel 4) in §. 13 anwenden und nachher jeder Differentialquotient von u oder v nach Formel 4) in §. 12 entwickeln. Nach einigen, von selbst sich darbietenden Reductionen gelangt man zu folgender Formel

$$7)\qquad D^{n+1} \arcsin x$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n (1-x)^n \sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 - \frac{1\,(n)_1}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1.3\,(n)_2}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1.3.5\,(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \ldots\ldots \right\}$$

IV. Setzen wir

$$8)\qquad V = \arctan x,$$

so ist

$$V' = \frac{1}{1 + x^2} \text{ oder } (1 + x^2)\, V' = 1;$$

durch n-malige Differentiation der letzten Gleichung erhalten wir

$$(n)_0(1+x^2)\,V^{(n+1)} + (n)_1\,2x\,V^{(n)} + (n)_2\,2\,.\,1\,V^{(n-1)} = 0,$$

oder

$$9)\qquad V^{(n+1)} = -\frac{2nx\,V^{(n)} + n(n-1)\,V^{(n-1)}}{1+x^2}.$$

Für $n = 1, 2, 3$ etc. ergeben sich hieraus die successiven Differentialquotienten V'', V''' u. s. w.

Auch hier kann $V^{(n)} = D^n \arctan x$ noch auf andere Weise direct entwickelt werden. Da nämlich aus Nro. 8)

$$x = \tan V,\qquad \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 V$$

folgt, so lässt sich der erste Differentialquotient in der Form

$$10)\qquad DV = \cos^2 V$$

darstellen; der Differentialquotient hiervon ist

$$D^2 V = 2\cos V\,.\,D\cos V = -2\cos V \sin V\,.\,DV$$

oder, wenn statt DV wieder sein voriger Werth gesetzt wird,

$$D^2 V = -2\cos^3 V \sin V = -\cos^2 V \sin 2V.$$

Eine fernere Differentiation giebt

$$\begin{aligned} D^3 V &= -2(\cos^2 V \cos 2V - \cos V \sin V \sin 2V)\,DV \\ &= -2\cos^3 V(\cos V \cos 2V - \sin V \sin 2V) \\ &= -2\cos^3 V \cos 3V; \end{aligned}$$

differenzirt man von Neuem, so folgt

$$\begin{aligned} D^4 V &= +2\,.\,3(\cos^3 V \sin 3V + \cos^2 V \sin V \cos 3V)\,DV \\ &= +2\,.\,3\cos^4 V(\cos V \sin 3V + \sin V \cos 3V) \\ &= +2\,.\,3\cos^4 V \sin 4V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^5 V &= +2\,.\,3\,.\,4(\cos^4 V \cos 4V - \cos^3 V \sin V \sin 4V)\,DV \\ &= +2\,.\,3\,.\,4\cos^5 V(\cos V \cos 4V - \sin V \sin 4V) \\ &= +2\,.\,3\,.\,4\cos^5 V \cos 5V. \end{aligned}$$

Den weiteren Gang dieser sehr einförmigen Rechnung übersieht man leicht; es ist daher

$$11)\qquad D^{2k} V = (-1)^k\,1.2.3\ldots(2k-1)\cos^{2k} V \sin 2kV,$$

$$12)\qquad D^{2k+1} V = (-1)^k\,1.2.3\ldots\ldots(2k)\cos^{2k+1} V \cos(2k+1)V.$$

Beide Formeln lassen sich in eine einzige zusammenziehen, und man vermeidet damit die Unbequemlichkeit, bei der Angabe von $D^n V$ die Fälle eines geraden und eines ungeraden n unterscheiden zu müssen. Setzt man nämlich

$$W = \arctan\frac{1}{x},$$

so ist $V = \frac{1}{2}\pi - W$, mithin

$$\sin 2kV = \sin(k\pi - 2kW) = (-1)^{k+1} \sin 2kW,$$

$$\cos(2k+1)V = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi - (2k+1)W\right) = (-1)^k \sin(2k+1)W,$$

und die Formeln 11) und 12) werden jetzt

$$D^{2k}V = -1 \,.\, 2 \ldots (2k-1) \sin^{2k} W \sin 2kW,$$

$$D^{2k+1}V = +1 \,.\, 2 \ldots . (2k) \sin^{2k+1} W \sin(2k+1)W,$$

d. i. überhaupt

$$D^n V = (-1)^{n-1} 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \sin^n W \sin nW.$$

Setzt man endlich die Werthe von V und W wieder ein, indem man berücksichtigt, dass

$$\sin W = \cos V = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, so gelangt man zu folgender Formel

13) $$D^n \arctan x = \frac{(-1)^{n-1} 1 \,.\, 2 \ldots (n-1)}{\sqrt{(1+x^2)^n}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right).$$

Allgemeinere Untersuchungen über die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen und einige damit verwandte Probleme werden wir im zweiten Bande mittheilen.

§. 15.

Successive Differentiation der Functionen mehrerer Variabelen.

Die wiederholte Differentiation einer Function mehrerer unabhängiger Variabelen kann entweder partiell in Beziehung auf die eine oder andere Variabele geschehen, oder total in Beziehung auf alle Variabelen zugleich; die Untersuchung trennt sich daher wie früher (§. 9) in zwei Theile.

I. Wird eine Function

1) $$z = f(x, y)$$

zuerst partiell in Beziehung auf x, und der entstandene Differentialquotient partiell nach y differenzirt, so entsteht der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\partial y},$$

welchen man kürzer mit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}$$

oder auch mit

$$D_y D_x z = D_y D_x f(x, y)$$

bezeichnet; durch die Stellung von ∂y und ∂x oder von D_y und D_x giebt man gleichzeitig die Reihenfolge der Differentiationen zu erkennen, wobei immer von rechts nach links zu lesen ist. Dem entsprechend bedeutet

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} \quad \text{oder } D_x D_y z = D_x D_y f(x, y),$$

dass die Gleichung 1) zuerst partiell in Beziehung auf y, und das erhaltene Resultat partiell nach x differenzirt worden ist.

Zuerst entsteht nun die Frage, ob $D_y D_x z$ und $D_x D_y z$ von einander verschieden sind oder nicht; hierüber lässt sich auf folgende Weise entscheiden. Aus der Formel 2) in §. 8 oder

$$2) \qquad F(u + p) = F(u) + pF'(u + \vartheta p)$$

erhalten wir zunächst, wenn wir in $f(x, y)$ nur x um h ändern,

$$f(x + h, y) = f(x, y) + h f'_x(x + \vartheta h, y),$$

wobei der Differentialquotient partiell in Beziehung auf x genommen werden muss, weil y constant geblieben ist; aus demselben Grunde hängt ϑ nicht von y ab. Bezeichnen wir zur Abkürzung f'_x mit φ, so ist

$$\varphi(x + \vartheta h, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Daraus folgt weiter durch Aenderung des y um k

$$\frac{\varphi(x + \vartheta h, y + k) - \varphi(x + \vartheta h, y)}{k}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)}{h} - \dfrac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}}{k}$$

$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)}{kh}.$$

Linker Hand kann wieder die Formel 2) für $F = \varphi$, $u = y$, $p = k$ angewendet werden und es ist dann

$$\varphi'_y(x + \vartheta h, y + \eta k)$$

$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)}{kh}$$

Gehen wir nun zur Grenze für gleichzeitig verschwindende h und k über, so erhalten wir linker Hand den Ausdruck $\varphi'_y(x, y)$, und dieser ist identisch mit

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \, \partial x};$$

rechter Hand schreiben wir $\varDelta x$ und $\varDelta y$ für h und k, und haben zusammen

$$3) \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \, \partial x}$$

$$= Lim \frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) + f(x, y)}{\varDelta y \, \varDelta x}$$

wobei sich das Zeichen *Lim* auf das gleichzeitige Verschwinden von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ bezieht.

Andererseits ist, wenn in $f(x, y)$ zuerst y allein um k geändert wird, und λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet,

$$f(x, y + k) = f(x, y) + k f'_y(x, y + \lambda k);$$

zur Abkürzung setzen wir ψ für f'_y und haben

$$\psi(x, y + \lambda k) = \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Hieraus ziehen wir ferner durch Aenderung des x

$$\frac{\psi(x + h, y + \lambda k) - \psi(x, y + \lambda k)}{h}$$

$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)}{hk}$$

oder, unter μ einen positiven ächten Bruch verstanden,

$$\psi'_x(x + \mu h, y + \lambda k)$$

$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)}{hk}$$

Beim Uebergange zur Grenze für verschwindende $h = \varDelta x$ und $k = \varDelta y$ erscheint linker Hand der Ausdruck

$$\psi'_x(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \, \partial y},$$

mithin ist jetzt

$$4) \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$

$$= Lim \frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) - f(x, y+\varDelta y) + f(x, y)}{\varDelta x \, \varDelta y}.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 3) und 4) unterscheiden sich nur durch die Anordnung der Summanden im Zähler und der Factoren im Nenner, sie sind daher von gleichem Werthe; daraus folgt die Gleichung

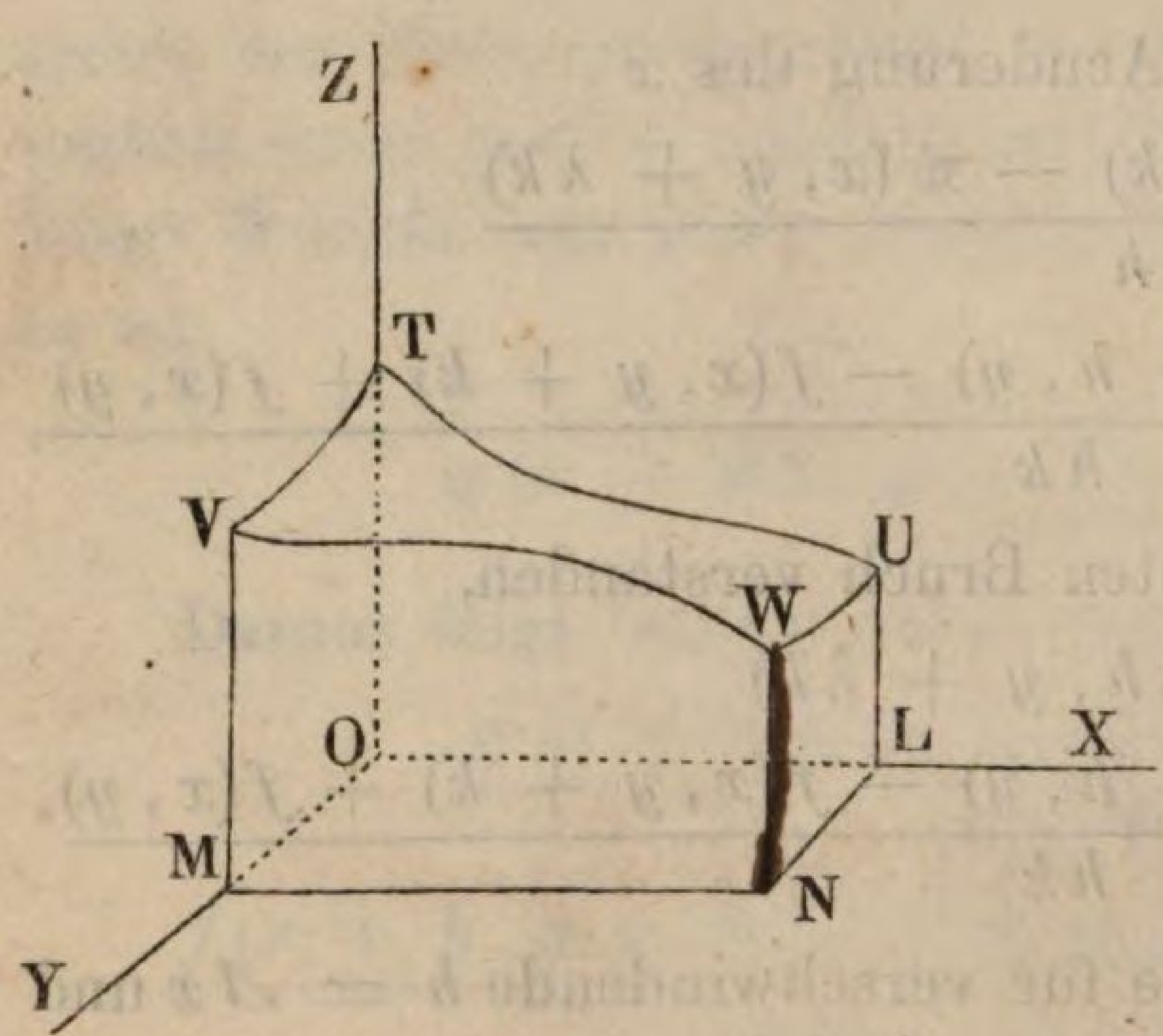
$$5)\qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}\quad\text{oder}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

welche sagt, dass es für das Endresultat gleichgültig ist, in welcher Ordnung die beiden partiellen Differentiationen nach x und y ausgeführt werden. Bei diesem Satze darf man aber nicht übersehen, dass die Formel 2), auf der hier Alles beruht, nur so lange richtig ist, als die Functionen F und F' innerhalb des Intervalles u bis $u+p$ keine Unterbrechung der Continuität erleiden; auf den vorliegenden Fall angewendet, heisst dies, die Variabelen dürfen keine solchen Werthe erhalten, wodurch eine der Functionen

$$f(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

discontinuirlich werden könnte.

Fig. 13.



Man kann diesem Theoreme eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man sich z als das Volumen denkt, welches unterhalb von einem beliebigen Rechtecke aus den Seiten $OL=x$ und $OM=y$ (Fig. 13), seitwärts von den vier auf OL, LN, NM, MO errichteten Verticalebenen, und oberhalb durch irgend eine Fläche begrenzt wird; es ist dann in der That z eine Function von x und y, und man hat nach §. 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\text{Fläche } LNWU$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial(LNWU)}{\partial y}=NW,$$

andererseits

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{Fläche } MNWV$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial (MNWV)}{\partial x} = NW,$$

was mit dem Vorigen übereinstimmt.

Sind irgend wieviel Differentiationen in Beziehung auf irgend wieviele Variabele auszuführen, so lassen sich nach dem Vorigen immer je zwei Differentiationen vertauschen; auf diese Weise kann man jede beliebige Anordnung der Differentiationen herbeiführen, ohne dass das Resultat eine Aenderung erleidet.

II. Mittelst des Vorigen lassen sich die höheren totalen Differentiale einer Function leicht entwickeln; man hat nämlich zunächst bei zwei Variabelen

$$6)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

und unter Anwendung desselben Satzes

$$d^2 z = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx\right)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx\right)}{\partial y}\, dy$$
$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)}{\partial y}\, dy,$$

dies ist soviel als

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\, dy\, dx$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 5)

$$7)\qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet sich

$$8)\qquad d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dx^3 + 3\, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}\, dx^2\, dy$$
$$+ 3\, \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}\, dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\, dy^3$$

und wenn man beachtet, dass die hier vorkommenden Zahlencoeffi-

cienten durch dieselbe successive Addition wie in §. 13, II. entstehen, so erkennt man als allgemeines Gesetz:

$$9)\quad d^n z = (n)_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + (n)_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + (n)_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots$$

Kürzer schreibt man dafür in symbolischer Form

$$10)\quad d^n z = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy\right)^n \partial^n z.$$

Bei drei Variabelen, wenn z. B. u eine Function von x, y und z bedeutet, erhält man auf gleiche Weise:

$$11)\quad d^n u = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy + \frac{1}{\partial z} dz\right)^n \partial^n u,$$

und man übersieht auf der Stelle, wie sich die Sache bei mehreren Variabelen gestaltet.

§. 16.

Höhere Differentialquotienten unentwickelter Functionen.

Aus den Betrachtungen des §. 10, wissen wir, dass eine Gleichung von der Form

$$1)\quad f(x, y) = 0 \text{ oder } f = 0$$

durch Differentiation die folgende giebt:

$$2)\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

wobei x die unabhängige Variabele bedeutet und y als unentwickelte Function von x angesehen wird. Um nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten, bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung 2) für den Augenblick mit $f_1(x, y)$ oder noch kürzer mit f_1; es ist dann unter Anwendung derselben Regel

$$3)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

andererseits hat man aber vermöge der Bedeutung von f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass y nur von x abhängt, dass also auch $\frac{dy}{dx}$ nur x enthält, mithin eine Function von x allein [nach der früheren Bezeichnung $\varphi'(x)$] und constant in Beziehung auf y ist; man hat daher

$$\frac{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial y} = 0$$

und wenn man die drei letzten Gleichungen in Nro. 3) einführt, so ergiebt sich die gesuchte Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$4)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Nach demselben Verfahren kann die Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt werden; sie ist, wenn f_2 die linke Seite der vorigen Gleichung bezeichnet:

$$5)\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Bei wirklicher Entwickelung der angedeuteten partiellen Differentialquotienten findet sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &+ 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} &+ 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}.\end{aligned}$$

Durch Substitution in Nro. 5) giebt dies bei Vereinigung aller gleichartigen Grössen:

$$\begin{aligned}6)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &+ 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\\ &+ 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3 y}{dx^3} = 0.\end{aligned}$$

Man übersieht leicht, wie sich mittelst dieses Verfahrens, was

freilich immer längere Rechnungen erfordert, die höheren Differentialgleichungen der gegebenen Gleichung entwickeln lassen; aus ihnen lassen sich dann auch die Differentialquotienten der Function y von x herleiten; denn es folgt jetzt aus Nro. 2):

$$7)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wie schon bekannt ist; ferner aus Nro. 4):

$$8)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

und hier kann man den vorhergefundenen Werth von $\frac{dy}{dx}$ einsetzen; die Gleichung 6) führt dann weiter zur Kenntniss von $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f.

Auch bei Functionen mehrerer Variabelen bleibt das Verfahren ganz dasselbe, man unterlässt es jedoch, allgemeine Formeln aufzustellen, weil diese sehr verwickelt werden würden, und zieht es dagegen vor, in jedem gegebenen besonderen Falle die nöthige specielle Rechnung auszuführen.

§. 17.

Vertauschung der unabhängigen Variabelen.

Bezeichnet x die unabhängige Variabele, in Beziehung auf welche ein- oder mehrmal differenzirt wird, so ist nach den Prinzipien der Differentialrechnung dx ein dem x willkürlich ertheilter und auf irgend eine Weise gegen die Null convergirender Zuwachs, und es ist mithin dx unabhängig von x; anders verhält es sich mit dem Differentiale dy der abhängigen Variabele y, denn für $y = f(x)$ ist $dy = f'(x)\,.\,dx$, und hier bildet dy eine Function von x, weil es aus zwei Factoren besteht, deren erster x enthält. Nach dieser Bemerkung folgt bei zweiter Differentiation, indem dx als constanter Factor gilt, $d^2y = df'(x)\,.\,dx = f''(x)\,dx\,.\,dx = f''(x)\,dx^2$ übereinstimmend mit den Früheren, und ebenso würden für die ferneren Differentiationen dx^2, dx^3 etc. als Constanten anzusehen sein. Es kann nun im Verlaufe einer analytischen Untersuchung nöthig werden, dem

x den Charakter der unabhängigen Veränderlichkeit abzunehmen und ihn auf eine andere, entweder bereits vorhandene oder erst neu einzuführende Variabele zu übertragen; so z. B. könnte es bei der Untersuchung einer Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten y heissen, erforderlich sein, nicht die Abscisse, sondern die Ordinate als unabhängige Variabele anzusehen, oder man könnte in den Fall kommen, die Coordinaten einer durch stetige Bewegung entstandenen Curve als Functionen der Zeit betrachten zu müssen, welche während der Bewegung verfliesst, wie dies namentlich in der Mechanik häufig geschieht. Schärfer aufgefasst ist jetzt die Frage, was man an die Stelle der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots$$

zu setzen habe, wenn x nicht mehr als unabhängige Variabele, sondern als Function einer anderweiten unabhängigen Veränderlichen t angesehen wird, wodurch nun auch y in letzter Instanz eine Function von t geworden ist.

Beachtet man, dass y von x und x von t abhängt, also y eine zusammengesetzte Function bildet, so hat man nach den Lehren des §. 6.:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und man erhält hieraus

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Indem man beiderseits in Beziehung auf die unabhängige Variabele t differenzirt, wo nun dt constant ist, dx und dy dagegen von t abhängen, findet man links

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und rechter Hand nach der Regel für die Differentiation der Quotienten

$$\frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Stellt man beide Ausdrücke in eine Gleichung, so ergiebt sich durch Reduction auf $\frac{d^2 y}{dx^2}$

$$2)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Durch Wiederholung der Differentiation in Beziehung auf t findet man auf gleiche Weise

$$3)\quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3 y}{dt^3} - 3\,\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}\cdot\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\,\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3 x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

Wie man auf diese Weise weitergehen kann, ist unmittelbar klar; allgemeine Formeln würden wegen der grossen Complication der Ausdrücke von keinem Nutzen sein.

Nehmen wir beispielsweise $t = y$, womit gesagt ist, dass nunmehr y als unabhängige Variabele gelten oder die Gleichung $y = f(x)$ umgekehrt werden soll $[x = F(y)]$, so ist

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$5)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

$$6)\quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3 x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

u. s. w.

Dasselbe Verfahren passt auch auf den Fall, wenn mehrere unabhängige Variabelen vorhanden sind, nur werden die Formeln noch etwas verwickelter. Man zieht es daher vor, die Rechnung erst in den gerade vorkommenden speciellen Fällen auszuführen, wie man dies später sehen wird.

§. 18.

Zusammenhang zwischen einer Function und ihren successiven Differentialquotienten.

Sowie in §. 8 Gleichungen zwischen einer Function und ihrem ersten Differentialquotienten abgeleitet wurden, so lassen sich auch allgemeinere Formeln entwickeln, in denen ausser einer gegebenen Function noch beliebig viele ihrer Differentialquotienten vorkommen. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege.

Analog der Gleichung

1) $f(b) = f(a) + (b-a) f'(a + \vartheta [b-a]), \quad 0 < \vartheta < 1,$

ist auch unter den gehörigen Bedingungen

$$f'(c) = f'(a) + (c-a) f''(a + \varepsilon [c-a]), \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

nimmt man $c = a + \vartheta (b-a)$, substituirt nachher den Werth von $f'(c)$ in die vorhergehende Gleichung und bezeichnet $\vartheta \varepsilon$ kurz mit ϑ_1 so erhält man die neue Formel

2) $f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \vartheta (b-a)^2 f''(a + \vartheta_1 [b-a]).$

Im letzten Summanden kommen zwei positive ächte Brüche ϑ und ϑ_1 vor, deren Werthe man nicht näher kennt; um diesen Uebelstand zu vermeiden, suchen wir den Betrag der Summe

$$f(a) + (b-a) f'(a)$$

auf anderem Wege zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sei

3) $\qquad \varphi(x) = f(x) + (b-x) f'(x);$

es ist dann einerseits

4) $\qquad \varphi(a) = f(a) + (b-a) f'(a), \quad \varphi(b) = f(b),$

andererseits durch Differentiation von Nro. 3)

5) $\qquad \varphi'(x) = (b-x) f''(x).$

Hier lässt sich die bekannte Formel (§. 8, Nro. 8)

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{p(1-\theta)^{p-1}} \varphi'(a + \theta [b-a])$$

anwenden, indem man aus Nro. 4) die Werthe von $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ und nach Nro. 5)

$$\varphi'(a + \theta [b-a]) = (1-\theta)(b-a) f''(a + \theta [b-a])$$

substituirt; man gelangt sofort zu der Gleichung

6) $f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{p(1-\theta)^{p-2}} f''(a + \theta [b-a]),$

welche genauer als die frühere (2) ist, insofern sie nur den einen positiven ächten Bruch θ enthält. Etwas einfacher wird die Formel 6) für $p = 2$, nämlich

7) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a + \theta[b-a])$.

Uebrigens gelten diese Resultate nur unter der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, mithin auch $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ stetig und endlich bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Das soeben benutzte Verfahren lässt sich wieder auf die Formel 7) anwenden; man hat nämlich

$$f''(c) = f''(a) + (c-a)f'''(a + \varepsilon[c-a]),$$

mithin wenn

$$c = a + \theta(b-a), \qquad \theta\varepsilon = \theta_1$$

genommen und substituirt wird,

8) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$
$$+ \tfrac{1}{2}\theta(b-a)^3 f'''(a + \theta_1[b-a]).$$

Auch hier kommen zwei unbekannte Brüche θ und θ_1 vor, und daher verbessern wir die Formel auf folgende Weise. Es sei

9) $\psi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(x)$,

so haben wir einerseits

10) $\psi(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a), \quad \psi(b) = f(b)$,

andererseits durch Differentiation von Nro. 9)

$$\psi'(x) = \tfrac{1}{2}(b-x)^2 f'''(x),$$
$$\psi'(a + \vartheta[b-a]) = \tfrac{1}{2}(1-\vartheta)^2(b-a)^2 f'''(a + \vartheta[b-a]).$$

Substituiren wir diese Werthe in die Formel

11) $\psi(b) = \psi(a) + \dfrac{b-a}{p(1-\vartheta)^{p-1}}\psi'(a + \vartheta[b-a])$,

so gelangen wir augenblicklich zu der Gleichung

12) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$
$$+ \frac{(b-a)^3}{2p(1-\vartheta)^{p-3}} f'''(a + \vartheta[b-a]),$$

die sich für $p = 3$ noch etwas vereinfacht, nämlich

13) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$
$$+ \tfrac{1}{6}(b-a)^3 f'''(a + \vartheta[b-a]).$$

Dabei müssen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$, mithin auch $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Um die bisherige Schlussweise ganz allgemein auszuführen, setzen wir

$$14)\quad \psi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

worin $f(x)$ eine gegebene Function, $\psi(x)$ dagegen die unbekannte Summe der rechts stehenden Summanden bezeichnet. Einerseits ist

$$\psi(a) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a),$$

$$\psi(b) = f(b),$$

andererseits durch Differentiation von Nro. 14), wobei sich alle negativen Ausdrücke heben,

$$15)\qquad \psi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x),$$

$$\psi'(a + \vartheta[b-a]) = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)} f^{(n)}(a + \vartheta[b-a]),$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung 11) einsetzt, so gelangt man zu der Formel

$$16)\quad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p}(b-a)^n}{1\,.\,2\ldots(n-1)\,.\,p} f^{(n)}(a + \vartheta[b-a]).$$

Zur Gültigkeit der vorstehenden Gleichung gehört übrigens die Endlichkeit und Continuität der Functionen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$; dazu ist hier, wo $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ durch die Gleichungen 14) und 15) bestimmt werden, erforderlich, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Für $b - a = h$ nimmt die Formel 16) folgende Gestalt an.

$$17)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(a) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p}h^n}{1\,.\,2\ldots(n-1)\,.\,p} f^{(n)}(a + \vartheta h),$$

und dabei müssen $f(x), f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ endlich und continuirlich bleiben von $x = a$ bis $x = a + h$.

Als Specialisirungen der Zahl p empfehlen sich die Werthe $p = n$ und $p = 1$; im ersten Falle erhält man

$$18) \quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots \\ \cdots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(a + \vartheta h),$$

dagegen im zweiten Falle

$$19) \quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots \\ \cdots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\vartheta)^{n-1} h^n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \vartheta h).$$

Hier bedeutet ϑ immer einen positiven ächten Bruch, dessen Werth nicht näher bekannt ist. Dieser kann übrigens in den drei letzten Formeln verschieden sein, denn man sieht an einzelnen Beispielen zu Formel 17) sehr leicht, dass ϑ gleichzeitig von a, h, n und p abhängt und daher bei verschiedenen p im Allgemeinen verschiedene Werthe erhält.

Eine sehr einfache Anwendung von Formel 18) gewährt die Specialisirung

$$f(x) = log\, x,$$

wobei M den Modulus des logarithmischen Systems bezeichnen möge; es ist dann

$$20) \quad log\,(a+h) = log\, a + M\left[\frac{1}{1}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3 - \cdots \right. \\ \left. \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{h}{a+\vartheta h}\right)^n\right]$$

und zwar gilt diese Formel für alle positiven a und h. Setzt man für ϑ das eine Mal die Null, das andere Mal die Einheit, so wird der absolute Werth des letzten Summanden im ersten Falle zu gross, im zweiten zu klein, und man erhält daher zwei Zahlen, zwischen denen $log\,(a + h)$ enthalten ist.

Auch für Functionen mehrerer Variabelen können ähnliche Gleichungen wie Nro. 17), 18) oder 19) entwickelt werden, doch unterlassen wir dies, da wir ohnehin auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Cap. III.

Untersuchungen über krumme Linien und Flächen.

§. 19.

Der Lauf ebener Curven.

I. Die erste Frage bei der Betrachtung einer ebenen krummen Linie wird sich immer auf deren Steigung oder Fall beziehen, weil schon hieraus die Gestalt der Curve mit einiger Sicherheit zu ersehen ist. Soll nun die Curve steigen, so muss die nächstfolgende Ordinate grösser als die vorhergehende sein, beim Herabsteigen dagegen entspricht der grösseren Abscisse eine kleinere Ordinate. Betrachten wir daher

$$x \text{ und } y = f(x),$$
$$x + \varDelta x \quad \text{"} \quad y + \varDelta y = f(x + \varDelta x)$$

als Coordinaten zweier benachbarten Punkte, so steigt die Curve, wenn bei hinreichend kleinen $\varDelta x$ die Differenz

$$\varDelta y = f(x + \varDelta x) - f(x)$$

positiv ist und es bleibt, falls $\varDelta x$ noch weiter abnimmt und gegen die Null convergirt; dagegen fällt die Curve bei negativ bleibenden $\varDelta y$. Zufolge der Voraussetzung eines positiven $\varDelta x$ kann man auch sagen, dass die Curve steigt oder fällt, je nachdem der Differenzenquotient

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

das positive oder negative Vorzeichen behält. Wie in §. 8 nachgewiesen wurde, hat aber der Differenzenquotient bei hinreichend klei-

nen Δx dasselbe Vorzeichen wie der Differentialquotient; es gilt daher der Satz:

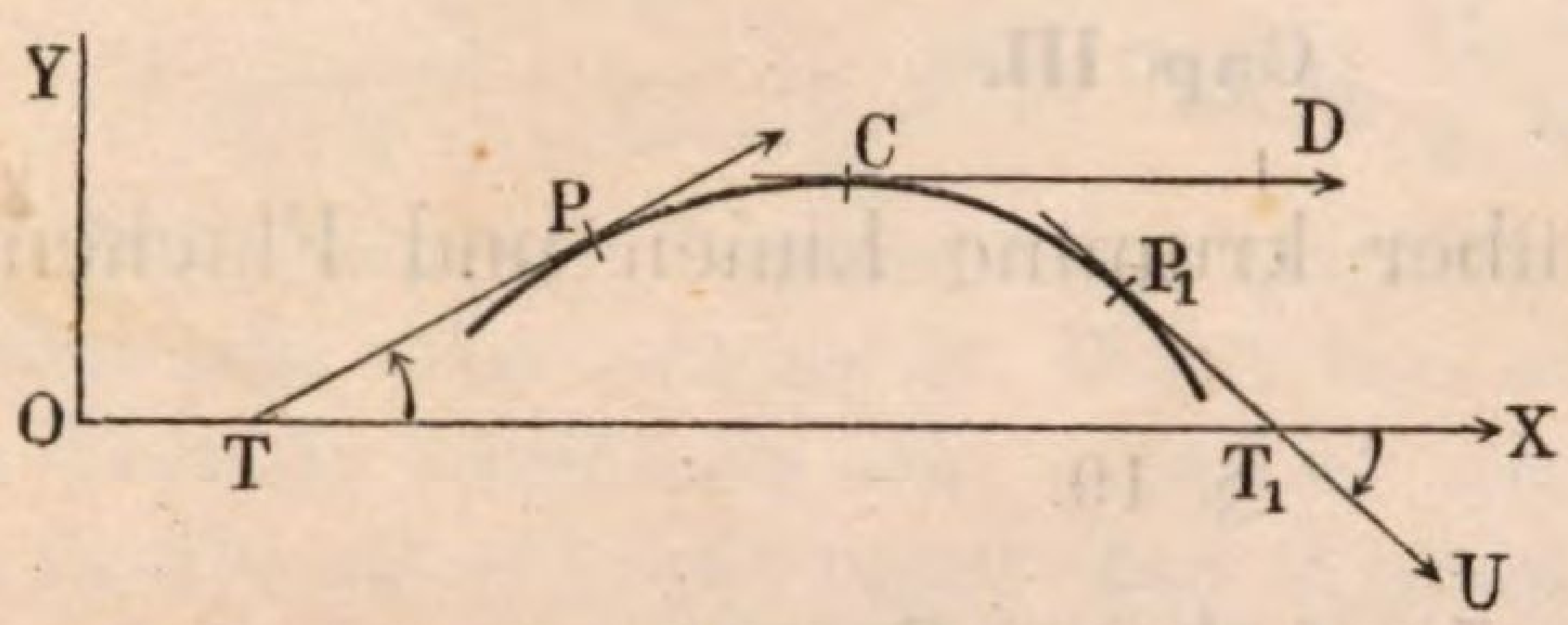
> Die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, steigt so lange als $f'(x)$ positiv bleibt, sie fällt dagegen so lange $f'(x)$ das negative Zeichen behält.

Man wird dies geometrisch sogleich bestätigt finden, wenn man sich an die Gleichung

$$y' = f'(x) = tan\,\tau$$

erinnert. Bei positiven $f'(x)$ ist nämlich τ positiv und die Tangente TP (Fig. 14) bildet mit der positiven Seite der x-Achse den spitzen und zwar positiven Winkel XTP, wobei die Drehung von der Rechten zur Linken als die Drehung im positiven Sinne betrachtet wird; unter diesen Umständen steigt die Curve. Dem negativen $f'(x)$ entspricht ein negativer Winkel $\tau = \angle X T_1 U$, welcher durch die entgegengesetzte Drehung entstanden ist; die Curve fällt dann.

Fig. 14.



Wenn die derivirte Function $f'(x)$ ihr Vorzeichen auf die Weise ändert, dass sie entweder vom Positiven durch Null hindurch in's Negative, oder umgekehrt aus dem Negativen durch Null hindurch in's Positive übergeht, so tritt an der Stelle, wo $f'(x) = 0$ wird, entweder der Uebergang von Steigen zu Fallen oder von Fallen zu Steigen ein. Derartige Punkte kann man passend Culminationspunkte nennen; im ersten Falle ist die Culmination eine obere, im zweiten eine untere. An jedem Culminationspunkte wird $\tau = 0$, mithin die Tangente parallel zur Abscissenachse, wie in Fig. 14 an dem oberen Culminationspunkte C.

Als Beispiel kann man die Ellipsengleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

benutzen; der Differentialquotient

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

hat für $x < a$ das positive, für $x > a$ das negative Vorzeichen und geht an der Stelle $x = a$ aus dem Positiven in's Negative über.

Die Curve besitzt daher an der Stelle $x = a, y = b$ einen oberen Culminationspunkt, wie auch geometrisch bekannt ist.

II. Hat man mittelst der angegebenen Regel gefunden, dass eine Curve innerhalb eines gewissen Intervalles steigt oder fällt, so bleibt noch die zweite Frage, wie jenes Steigen oder Fallen geschieht. Eine Curve kann nämlich beim Steigen entweder die erhabene oder die hohle Seite gegen die Abscissenachse kehren (s. Fig. 15 und 16). Dasselbe gilt auch, wenn die Curve fällt, und es bedarf daher eines Unterscheidungszeichens für diese verschiedenen Lagen. Ist nun der Bogen PP_2 convex gegen die Abscissenachse (Fig. 15), so heisst dies nichts Anderes, als dass er zwischen seiner Sehne und der x-Achse liegt; dagegen ist der Bogen PP_2 concav (Fig. 16), wenn umgekehrt die Sehne zwischen dem Bogen und der Abscissenachse durchgeht. Schalten wir auf der Mitte der Sehne noch den Punkt Q ein und bezeichnen mit P_1 denjenigen Curvenpunkt, welcher die nämliche Abscisse wie Q besitzt, so haben wir bei convexer Krümmung

Fig. 15.

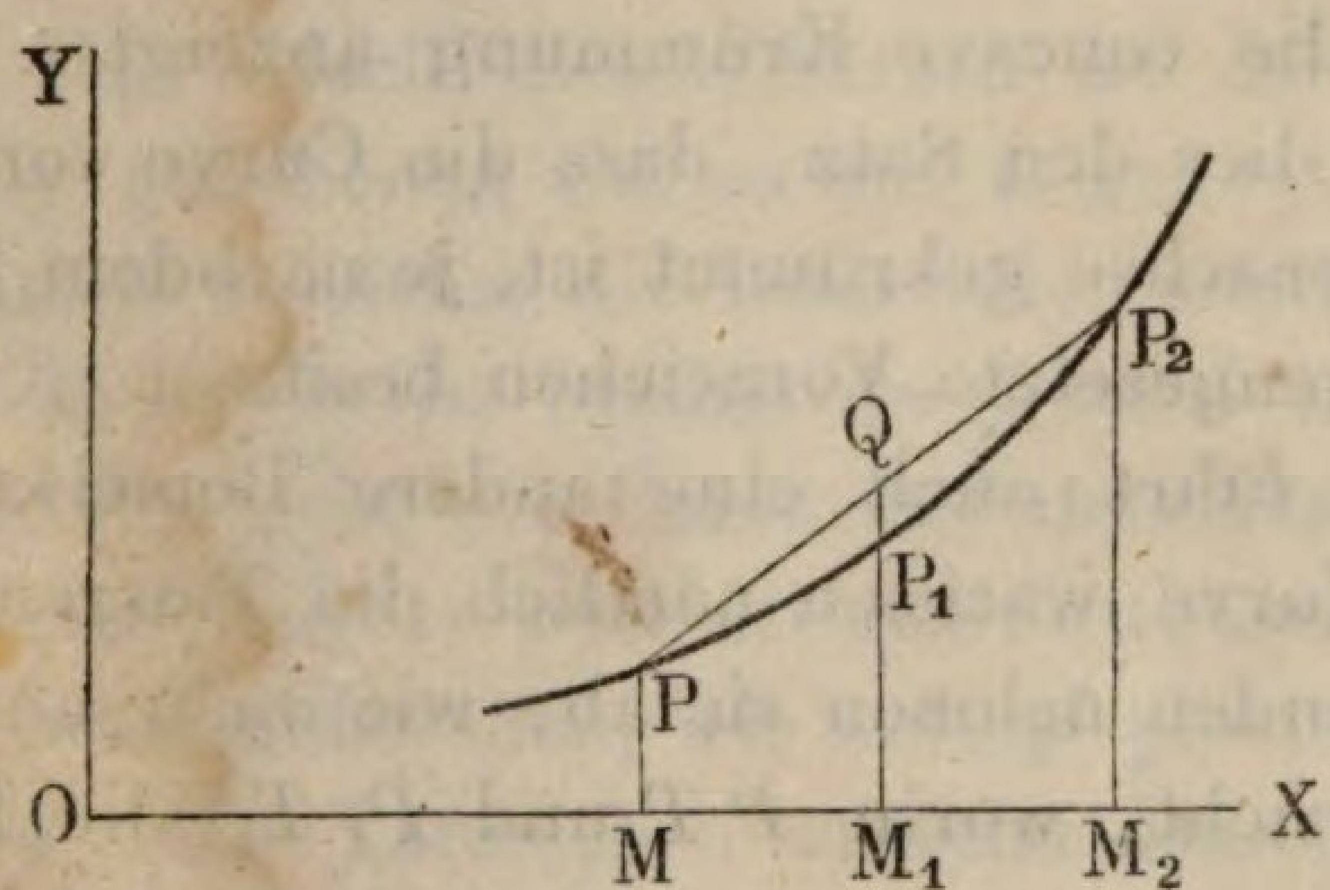
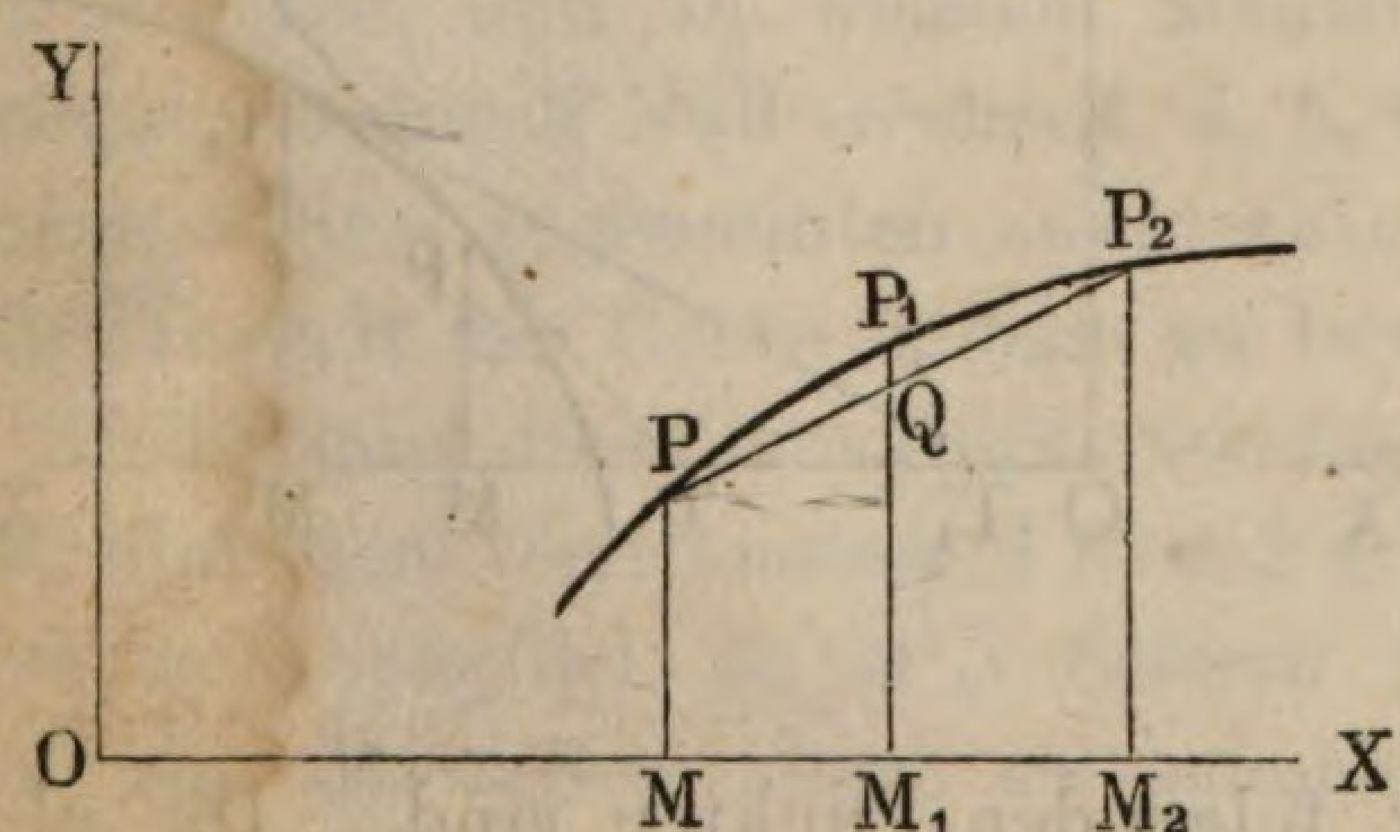


Fig. 16.



$$M_1 Q > M_1 P_1,$$

bei concaver Krümmung

$$M_1 Q < M_1 P_1,$$

und es ist also die Curve convex oder concav gegen die Abscissenachse, je nachdem $M_1 Q - M_1 P_1$ das positive oder negative Vorzeichen hat. Für $OM = x$, $MM_1 = M_1 M_2 = \varDelta x$ und mit Rücksicht darauf, dass $M_1 Q$ das arithmetische Mittel zwischen MP und $M_2 P_2$ darstellt, findet sich

$$M_1 Q - M_1 P_1$$

$$= \frac{f(x+2\varDelta x)+f(x)}{2} - f(x+\varDelta x) = \frac{f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x)}{2};$$

dieser Ausdruck hat immer dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x)}{\varDelta x^2}=\frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x^2}$$

und letzterer ist wieder einerlei mit

$$f''(x)+\varrho,$$

wo ϱ eine gleichzeitig mit $\varDelta x$ gegen die Null convergirende Grösse bezeichnet. Hieraus folgt, dass bei hinreichend kleinen $\varDelta x$ der zweite Differenzenquotient dasselbe Vorzeichen wie der zweite Differentialquotient besitzt, dass mithin die Curve convex oder concav ist, je nachdem $f''(x)$ das positive oder negative Zeichen hat. Diese Bemerkungen sind leicht auf den Fall auszudehnen, wo die Curve unterhalb der Abscissenachse liegt, mithin $f(x)$, $f(x+\varDelta x)$, $f(x+2\varDelta x)$ negativ sind; man findet, dass umgekehrt ein negatives $f''(x)$ die convexe, ein positives $f''(x)$ die concave Krümmung anzeigt. Mit dem Vorigen zusammen giebt dies den Satz, dass die Curve convex oder concav gegen die Abscissenachse gekrümmt ist, je nachdem $f(x)$ und $f''(x)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Zu demselben Resultate führt auch eine andere Bemerkung. Bei einer convex steigenden Curve wachsen nämlich die Tangentenwinkel, bei einer concav steigenden nehmen sie ab, wie man unmittelbar aus Fig. 17 und 18 ersieht, worin PT und $P_1 T_1$ die Tan-

Fig. 17.

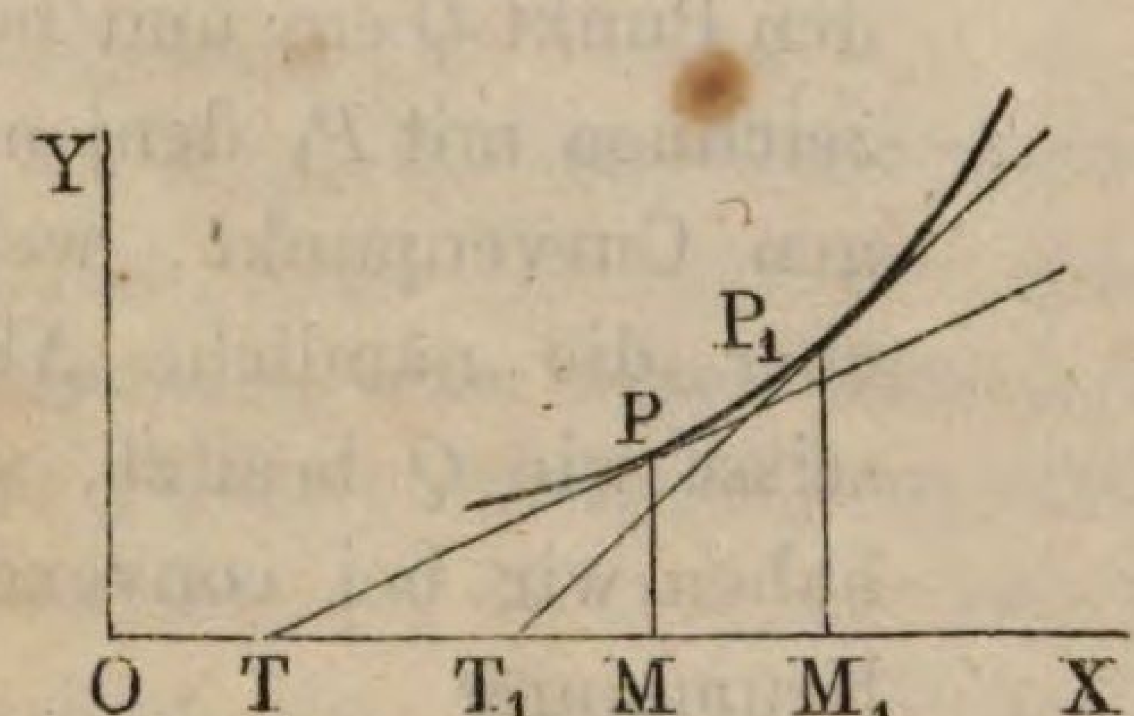
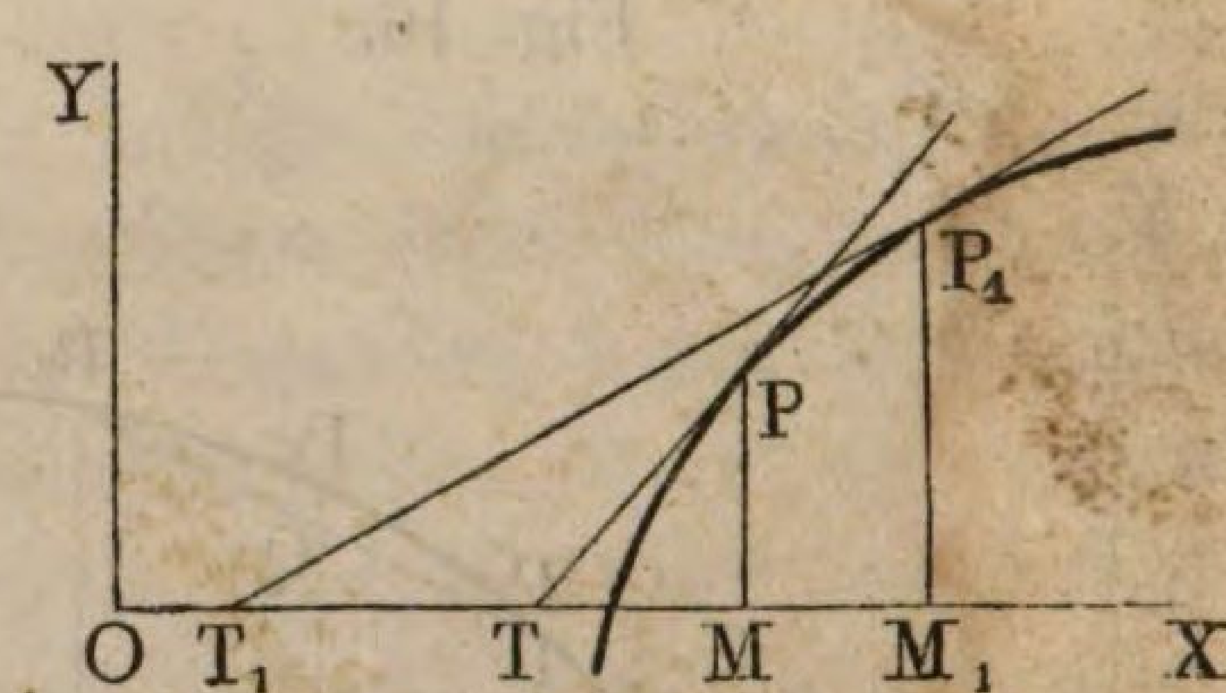


Fig. 18.



genten an zwei aufeinander folgenden Punkten sind. Die gleiche Bemerkung gilt auch für fallende Curven, und daher deutet jederzeit ein wachsendes τ auf convexe, ein abnehmendes τ auf concave Krümmung. Die Zunahme oder Abnahme von τ erkennt man an dem Vorzeichen des Differentialquotienten

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{d\,arctan\,y'}{dx}=\frac{1}{1+y'^2}\,y'';$$

dieses Vorzeichen hängt lediglich von y'' ab, und damit gelangt man wieder zu dem vorigen Satze. Um letzteren etwas einfacher und für Anwendungen bequemer aussprechen zu können, denken wir uns die Abscissenachse so weit abwärts parallel zu sich selbst verscho-

ben, dass alle in Frage kommenden Ordinaten positiv ausfallen; mit anderen Worten, wir vergrössern alle innerhalb des betrachteten Intervalles liegenden Ordinaten um eine constante Strecke, welche mehr als die grösste Ordinate beträgt. Auf y' und y'' hat diese Operation keinen Einfluss; der vorige Satz aber lautet dann:

> Die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, kehrt die convexe oder die concave Seite nach unten, je nachdem $f''(x)$ positiv oder negativ ist.

Aendert $f''(x)$ sein Vorzeichen mittelst Durchganges durch den Werth $f''(x) = 0$, so findet an dieser Stelle ein Krümmungswechsel statt; ein derartiger Punkt heisst ein Inflexionspunkt oder Wendepunkt.

III. Nach diesen Sätzen ist der Lauf einer durch ihre Gleichung gegebenen Curve auf folgende Weise zu untersuchen. Man ermittelt zunächst die Intervalle, innerhalb deren y sein Vorzeichen behält, sowie die Stellen wo $y = 0$ wird; man erhält dadurch die Punkte, welche die Curve mit der Abscissenachse gemein hat, d. h. Durchschnitte oder Berührungspunkte mit der x-Achse. Nachher entscheidet man, wie weit y' positiv, wie weit es negativ ist und wo y' sein Vorzeichen mittelst Durchganges durch Null wechselt; dies giebt die Culminationspunkte. Endlich untersucht man, innerhalb welcher Intervalle y'' positiv bleibt, innerhalb welcher anderen negativ, und an welchen Stellen y'' sein Vorzeichen mittelst Durchganges durch Null wechselt, d. h. wo Inflexionspunkte vorkommen. Diese sogenannten ausgezeichneten Punkte reichen hin, um die Gestalt der Curve kennen zu lernen.

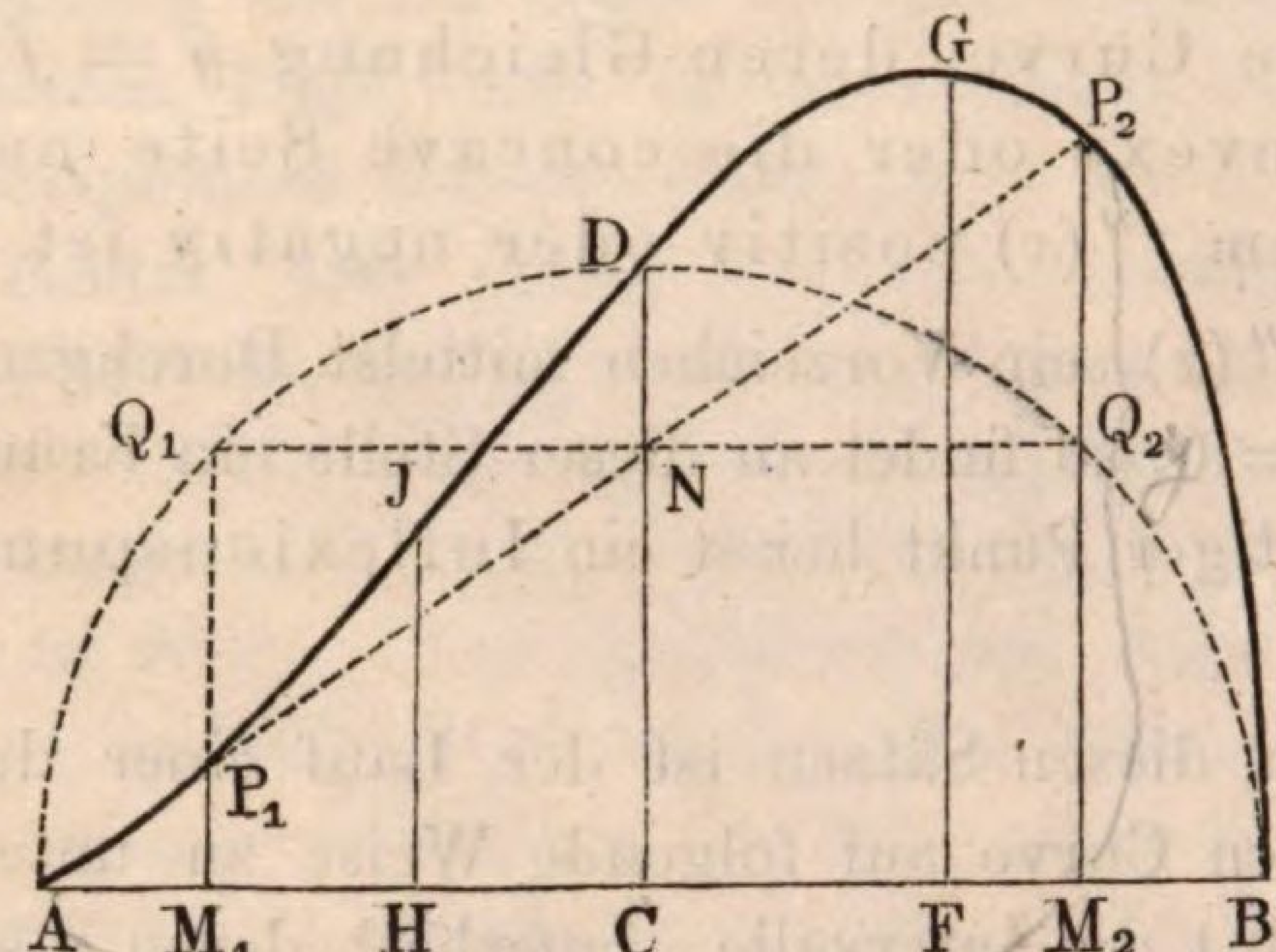
Als Beispiel diene eine Curve von folgender Entstehungsweise. In einem über dem Durchmesser $AB = 2a$, Fig. 19 (a. f. S.), construirten Kreise sind parallel zu AB Sehnen gezogen, von denen $Q_1 Q_2$ irgend eine darstellen möge; sie schneidet den zu AB senkrechten Durchmesser in einem Punkte N. Man legt ferner $M_1 Q_1 \parallel CD \parallel M_2 Q_2$ und zieht die Gerade AN; letztere trifft $M_1 Q_1$ in P_1, $M_2 Q_2$ in P_2, und nun sollen P_1, P_2 Punkte der neuen Curve sein. Bezeichnet man AM_1 oder AM_2 mit x, und die zugehörige Ordinate mit y, so erhält man als Gleichung der krummen Linie

$$y = \frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{a},$$

und hieraus ergiebt sich, das Wurzelzeichen erst als positiv vorausgesetzt, dass zu jedem negativen x ein imaginäres y gehört, dass ferner für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, dass jedem zwischen 0 und $2a$

liegenden x ein positives y entspricht, dass für $x = 2a$ wieder $y = 0$, und für $x > 2a$ jedes y imaginär ist. Die Curve geht demnach von A aus über die x-Achse hinauf und steigt am Ende in B wieder zu

Fig. 19.



ihr herab. Nimmt man das Wurzelzeichen negativ, so erhält man gleich grosse und entgegengesetzte Ordinaten; demnach besteht die Curve aus zwei congruenten, über und unter der Abscissenachse liegenden Zweigen, die zusammen eine geschlossene Figur, ein sogenanntes Blatt bilden.

Man erhält weiter als ersten Differentialquotienten

$$y' = \frac{x(3a - 2x)}{a\sqrt{2ax - x^2}},$$

wobei das Wurzelzeichen positiv genommen werden kann, weil man nur einen der beiden congruenten Zweige zu untersuchen braucht. Für $x = 0$ wird $y' = 0$; so lange $x < \frac{3}{2}a$ bleibt, ist y' positiv, für $x = \frac{3}{2}a$ wird $y' = 0$, bei grösseren x wird y' negativ und zuletzt, d. h. für $x = 2a$, negativ unendlich gross. Demnach hat die Curve in A die Abscissenachse zur Tangente; von A aus steigt sie bis zu dem oberen Culminationspunkte G, dessen Coordinaten $AF = \frac{3}{2}a$, $FG = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$ sind, und fällt dann bis B, wo sie die Abscissenachse rechtwinklig schneidet.

Was ferner den zweiten Differentialquotienten

$$y'' = \frac{x(3a^2 - 6ax + 2x^2)}{a\sqrt{(2ax - x^2)^3}} = \frac{2x[(x - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{3}{4}a^2]}{a\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$$

anbetrifft, so übersieht man leicht, dass derselbe positiv bleibt von $x = 0$ bis zu dem kleineren der beiden Werthe, welche $(x - \frac{3}{2}a)^2 = \frac{3}{4}a^2$

machen, d. h. bis zu $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{2} a - a \cos 30^0$. Beim Ueberschreiten dieses Werthes geht y'' aus dem Positiven in's Negative über und bleibt negativ bis $x = 2a$. Es würde zwar später für $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} a$ wieder ein Zeichenwechsel eintreten; dieser kommt aber nicht in Frage, weil $\frac{3 + \sqrt{3}}{2} a > 2a$ ist und die zugehörigen y, y', y'' imaginär sind. Die Curve ist demnach convex gegen die Abscissenachse von A bis zu dem Inflexionspunkte I, dessen Coordinaten $AH = \frac{3}{2} a - a \cos 30^0$ und HI leicht construirt werden können; darüber hinaus bleibt die Linie concav.

§. 20.

Bogendifferential, Tangenten, Asymptoten und Normalen ebener Curven.

I. Die schon öfter benutzte Gleichung

1) $$\tan \tau = y' = \frac{dy}{dx}$$

bildet die Grundlage für alle Formeln und Constructionen, welche mit dem Probleme des Tangentenziehens in irgend einem Zusammenhange stehen. Zunächst bemerken wir, dass aus Nr. 1) die folgenden Gleichungen entspringen.

2) $$\cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \sin \tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

denen man auch die Gestalt geben kann:

3) $$\cos \tau = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \sin \tau = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Hier besitzt der Nenner eine geometrische Bedeutung. Je kleiner nämlich dx und dy gedacht werden, desto eher ist es erlaubt, das zwischen den Punkten x, y und $x + dx$, $y + dy$ liegende Curvenstück mit seiner Sehne zu verwechseln oder das aus den Katheten dx, dy und dem zugehörigen Bogen, welcher ds heissen möge, gebildete Dreieck als geradliniges Dreieck anzusehen. Dass diese

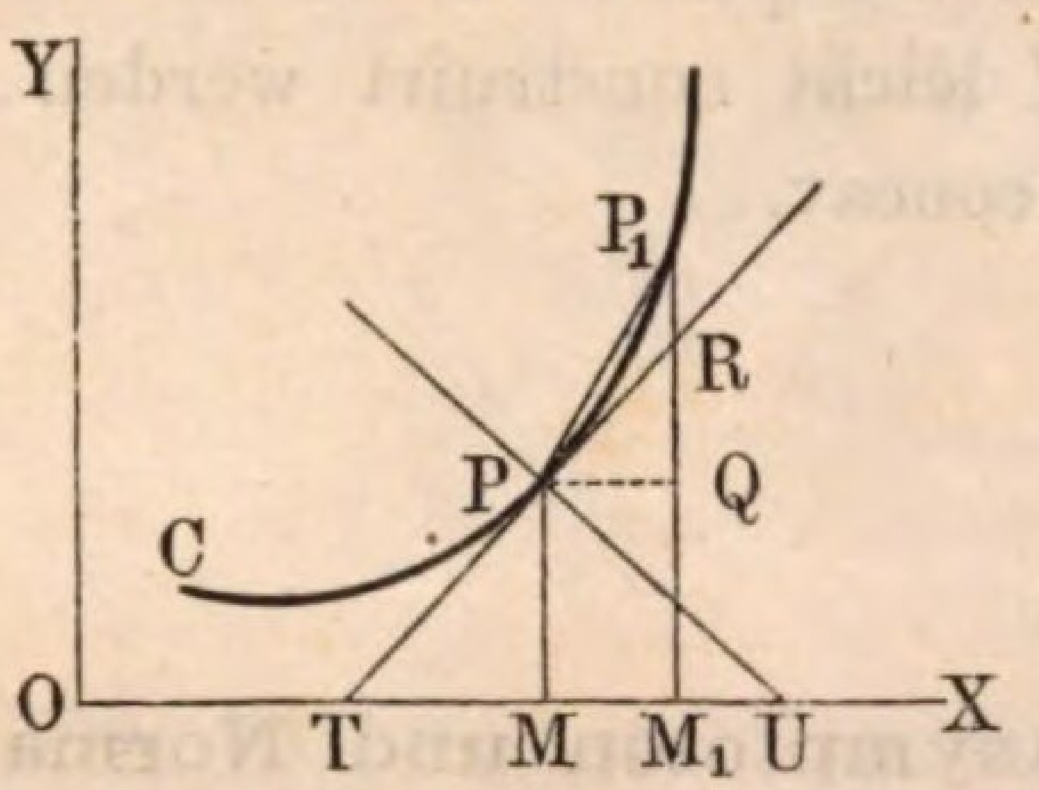
Vorstellung richtig ist, beweist die daraus folgende Gleichung $\tan\tau = \frac{dy}{dx}$, welche mit Nr. 1) übereinstimmt. Dann darf man aber weiter schliessen, dass für das Bogendifferential ds die Gleichung

$$4)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

gelten muss. Dies kann auch direct auf folgende Weise gezeigt werden.

In Fig. 20 sei $OM = x$, $MP = y$, $MM_1 = PQ = \Delta x$, $P_1Q = \Delta y$, $\angle PTX = \tau$, der von einem festen Punkte C an gerechnete Bogen $CP = s$, mithin

Fig. 20.



$$Arc\ PP_1 = \Delta s,$$

endlich R der Punkt, in welchem die Tangente TP die Ordinate M_1P_1 schneidet; wählt man Δx so klein, dass der Bogen PP_1 keinen Inflexionspunkt enthält, also entweder nur convex oder nur concav ist, so hat man folgende Ungleichungen

$$Arc\ PP_1 > PP_1, \text{ d. h. } \Delta s > \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$Arc\ PP_1 < PR + RP_1, \text{ d. h. } \Delta s < \Delta x \sec\tau + \Delta y - \Delta x \tan\tau.$$

Durch beiderseitige Division mit Δx ergiebt sich

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sec\tau + \frac{\Delta y}{\Delta x} - \tan\tau;$$

beim Uebergange zur Grenze für unendlich abnehmende Δx, Δy, Δs erhält man auf der linken Seite als Grenzwerth

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2},$$

und auf der rechten Seite

$$\sec\tau + \frac{dy}{dx} - \tan\tau = \sec\tau = \sqrt{1 + \tan^2\tau} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Beide Seiten convergiren also gegen eine und dieselbe Grenze, daraus folgt

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

was mit der Gleichung 4) übereinstimmt. Auch ist nun

$$5)\quad \begin{cases} \cos\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{dx}{ds}, \\[2ex] \sin\tau = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{dy}{ds}. \end{cases}$$

Wenn die Gleichung der Curve nicht in der expliciten Gestalt $y = f(x)$, sondern implicite unter der Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben ist, so hat man

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

zu setzen, wie in §. 10 gezeigt worden ist.

II. Um durch den Punkt P eine Tangente an die Curve zu legen, kann man entweder den Berührungswinkel τ aus der Formel 1) bestimmen und sein Complement MPT (Fig. 20) an die Ordinate MP antragen, oder eine der Geraden MT, PT berechnen und, wenn möglich, construiren. Die erste dieser Strecken heisst die Subtangente, die zweite die Tangente, und zwar ist

$$6)\quad Sbtg. = y\cot\tau = \frac{y}{\tan\tau} = \frac{y}{y'},$$

$$7)\quad Tang. = \frac{y}{\sin\tau} = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

Bezeichnen ξ und η die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, so gilt die Gleichung

$$\eta - y = (\xi - x)\tan\tau,$$

von deren Richtigkeit man sich durch wirkliche Construction der Differenzen $\xi - x$ und $\eta - y$ leicht überzeugt; demnach lautet die Gleichung der Tangente:

$$8)\quad \eta - y = y'(\xi - x).$$

Für den Fall, dass die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben ist, erhält die Gleichung der Tangente die symmetrische Gestalt

$$9)\quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

III. An die Gleichung 8) oder

$$\eta = y'\xi + y - xy'.$$

knüpft sich noch folgende Bemerkung. Wenn die Curve in's Unendliche geht, so kann es geschehen, dass bei unendlich wachsenden x die Ausdrücke

$$y' \text{ und } y - xy'$$

sich bestimmten Grenzen nähern; es giebt dann eine feste Grenzlage der Tangenten, der sie sich mehr und mehr nähern, je weiter der Punkt xy fortrückt, d. h. eine sogenannte Asymptote der Curve. Setzen wir

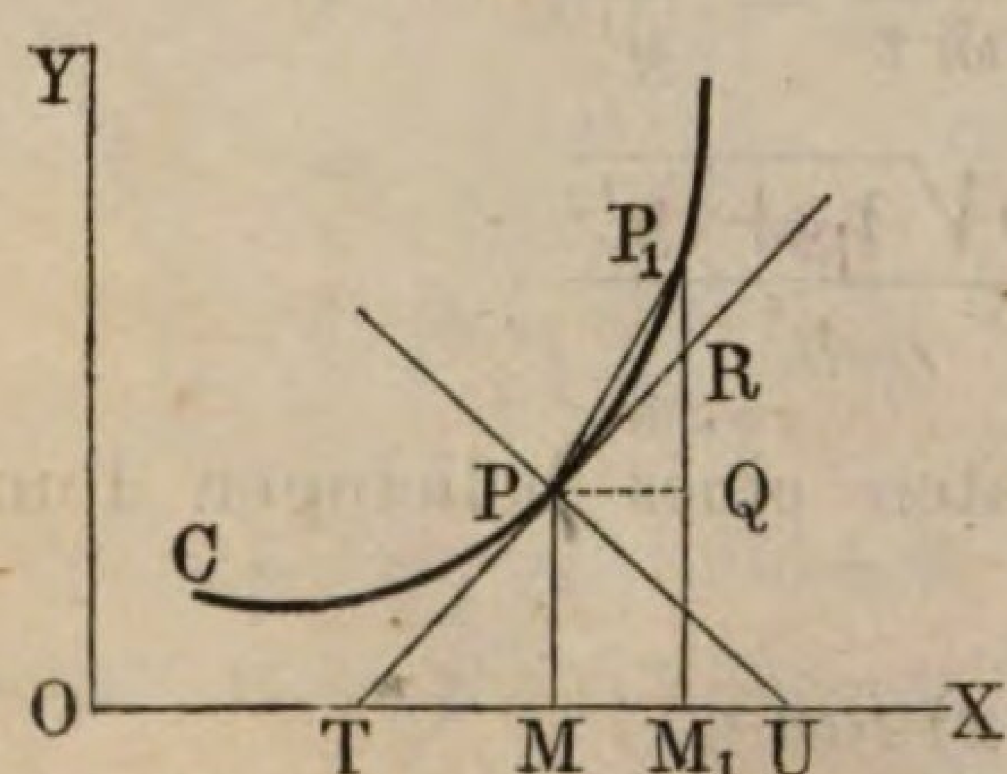
$$\left.\begin{array}{l} Lim\, y' = Lim\, f'(x) = A, \\ Lim(y - xy') = Lim[f(x) - xf'(x)] = B, \end{array}\right\} (x = \infty)$$

so haben wir als Gleichung der Asymptote

10) $$\eta = A\xi + B.$$

Nur für den Fall, dass die Asymptote parallel zur y-Achse liegt, wird diese Gleichung unbrauchbar wegen $A = \infty$ und $B = \infty$; man hat aber dann die vorige Betrachtung nicht nöthig, weil sich eine derartige Asymptote von selbst dadurch bemerklich macht, dass einem endlichen x ein unendliches y entspricht.

Fig. 21.



IV. Errichtet man im Punkte P auf der Tangente eine Senkrechte, welche die Abscissenachse in U schneidet, so erhält man die sogenannte Normale der Curve; MU heisst die Subnormale (Fig. 21). Aus der Bemerkung, dass

$$\angle MPU = \angle MTP = \tau$$

ist, findet man leicht

11) $$Subnorm. = y \tan\tau = yy',$$

12) $$Norm. = \frac{y}{\cos\tau} = y\sqrt{1 + y'^2};$$

ferner ist, wenn ξ und η die Coordinaten eines Punktes der Normale bezeichnen,

$$\eta - y = (x - \xi) \cot\tau,$$

mithin die Gleichung der Normale:

13) $$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x).$$

Der unentwickelten Form der Curvengleichung entspricht als Gleichung der Normale

$$14)\qquad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Anwendungen dieser allgemeinen Vorschriften giebt der nächste Paragraph.

§. 21.

Beispiele von Tangenten- und Normalenconstructionen.

I. Die Kegelschnitte. Nimmt man die Hauptachse eines Kegelschnittes zur x-Achse und einen ihrer Endpunkte zum Coordinatenanfang, so ist bekanntlich

$$1)\qquad y^2 = 2px + qx^2$$

die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, worin p den Halbparameter (die Ordinate im Brennpunkte) bedeutet. Man findet hieraus

$$2)\qquad yy' = p + qx,\quad y' = \frac{p + qx}{y},$$

mithin als Gleichung der Tangente

$$3)\qquad \eta - y = \frac{p + qx}{y}(\xi - x).$$

Für $\xi = 0$ ergiebt sich hieraus ein specielles η, das η_0 heissen möge, und zwar bedeutet es geometrisch die Strecke OT, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet; man hat dafür

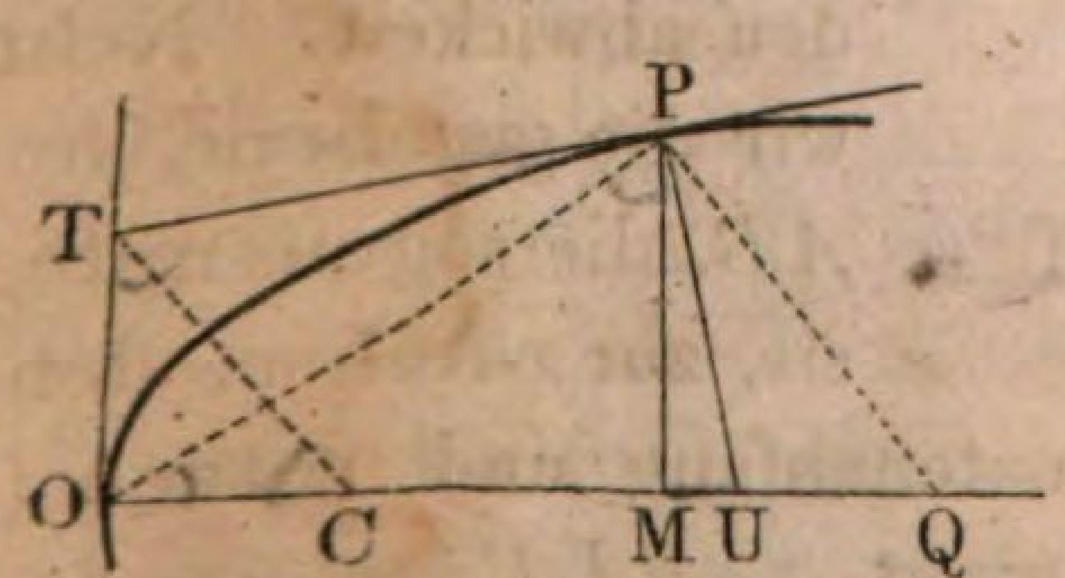
$$\eta_0 = y - \frac{p + qx}{y}x = \frac{y^2 - px - qx^2}{y}$$

oder, vermöge des Werthes von y^2,

$$4)\qquad \eta_0 = \frac{px}{y}.$$

Dies giebt folgende Tangentenconstruction (Fig. 22). Man nehme $OC = p$, fälle von dem festen Punkte C auf den Radiusvector OP eine Senkrechte, welche die Ordinatenachse in T schneidet, und ziehe die Gerade TP.

Fig. 22.



Man hat ferner durch Substitution des Werthes von y

$$y' = \frac{p + qx}{\sqrt{2px + qx^2}} = \frac{\frac{p}{x} + q}{\sqrt{2\frac{p}{x} + q}},$$

$$y - xy' = \eta_0 = \frac{px}{\sqrt{2px + qx^2}} = \frac{p}{\sqrt{2\frac{p}{x} + q}};$$

bei unendlich wachsenden x wird hieraus

$$Lim\, y' = \frac{q}{\sqrt{q}} = \sqrt{q}, \qquad Lim\,(y - xy') = \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Diese Ausdrücke sind reell und von endlichem Werthe, wenn $q > 0$, d. h. der Kegelschnitt eine Hyperbel ist; letztere besitzt daher zwei Asymptoten, deren Gleichungen aus

5) $$\eta = \sqrt{q} \cdot \xi + \frac{p}{\sqrt{q}}$$

hervorgehen, wenn man $\sqrt{q}$ das eine Mal mit dem positiven, das andere Mal mit dem negativen Vorzeichen nimmt.

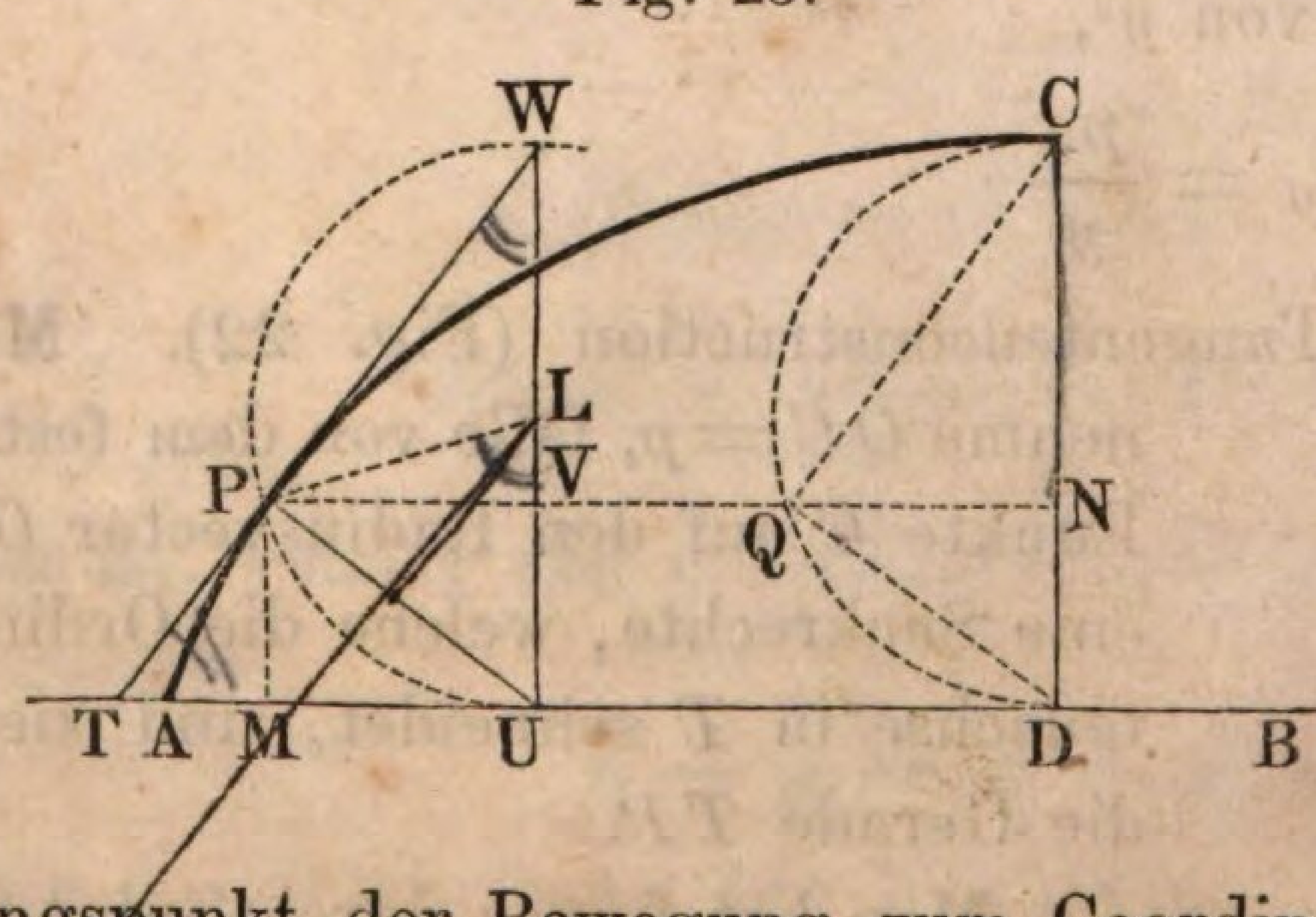
Was endlich die Normale betrifft, so bemerke man, dass die Gleichung 2) linker Hand den Ausdruck yy', d. h. die Subnormale, enthält und dass die Gleichung 2) mit folgender übereinkommt:

6) $$yy' = \frac{y^2}{x} - p.$$

Man kann daher die Normale unabhängig von der Tangente durch folgende Construction erhalten: Auf dem Radiusvector OP errichtet man in P eine Senkrechte, welche der Abscissenachse in Q begegnet, und nimmt $QU = p$; dann ist PU die Normale.

II. Die Cycloide ist bekanntlich der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer Geraden fortrollt, wobei sich die Peripherie des Kreises auf jener Geraden abwickelt. Nehmen wir die gegebene Gerade AB, die sogenannte Basis, zur x-Achse, den Anfangspunkt der Bewegung zum Coordinatenanfang und setzen (Fig. 23) $AM = x$, $MP = y$, $LP = LU = a$, $\angle\, PLU = \omega$, so gelten folgende Gleichungen

Fig. 23.



$$x = AU - MU = Arc\,UP - PV,$$

d. i.

7) $$x = a\omega - a \sin \omega;$$

$$y = UV = LU - LV,$$

d. i.

8) $$y = a - a \cos \omega.$$

Durch Elimination von ω aus 7) und 8) würde man zu einer Gleichung zwischen x und y gelangen, da aber dieselbe etwas complicirt ausfällt, so thut man besser, die obigen zwei Gleichungen beizubehalten und darin den Wälzungswinkel ω als unabhängige Variabele zu betrachten. Dann ist

$$dx = a(1 - \cos \omega)\, d\omega, \qquad dy = a \sin \omega\, d\omega,$$

mithin

9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega} = \cot \tfrac{1}{2}\omega$$

oder, zufolge der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten,

$$\tan \tau = \cot \tfrac{1}{2}\omega = \tan (90^0 - \tfrac{1}{2}\omega).$$

Da während der ersten halben Umwälzung $\omega < 180^0$, mithin $90^0 - \frac{1}{2}\omega$ ein spitzer Winkel und ebenso τ jedenfalls $< 90^0$ ist, so schliesst man aus der vorigen Gleichung

$$\tau = 90^0 - \tfrac{1}{2}\omega \text{ oder } 90^0 - \tau = \tfrac{1}{2}\omega,$$

d. h. $\angle MPT =$ dem Peripheriewinkel UWP; es ist folglich WPT die Tangente und die darauf senkrechte PU die Normale.

Nicht selten nimmt man den höchsten Punkt C der Cycloide zum Coordinatenanfang und den Pfeil CD zur Abscissenachse. Für $CN = x_1$, $NP = y_1$ ist dann

10) $$\begin{cases} x_1 = CD - DN = 2a - y = a(1 + \cos \omega) \\ y_1 = AD - AM = \pi a - x = a(\pi - \omega + \sin \omega) \end{cases}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dx}{dy} = \tan \tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}},$$

oder wegen $\cos \omega = \dfrac{x_1}{a} - 1$,

11) $$\frac{dy_1}{dx_1} = \sqrt{\frac{2a - x_1}{x_1}} = \frac{\sqrt{2ax_1 - x_1^2}}{x_1}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorigen überein. Die linke Seite bedeutet nämlich geometrisch den Winkel τ_1, den die Tangente PT mit der neuen Abscissenachse einschliesst, es ist daher

$$tan\, \tau_1 = \frac{NQ}{NC} \text{ oder } tan\, MPT = \frac{NQ}{NC},$$

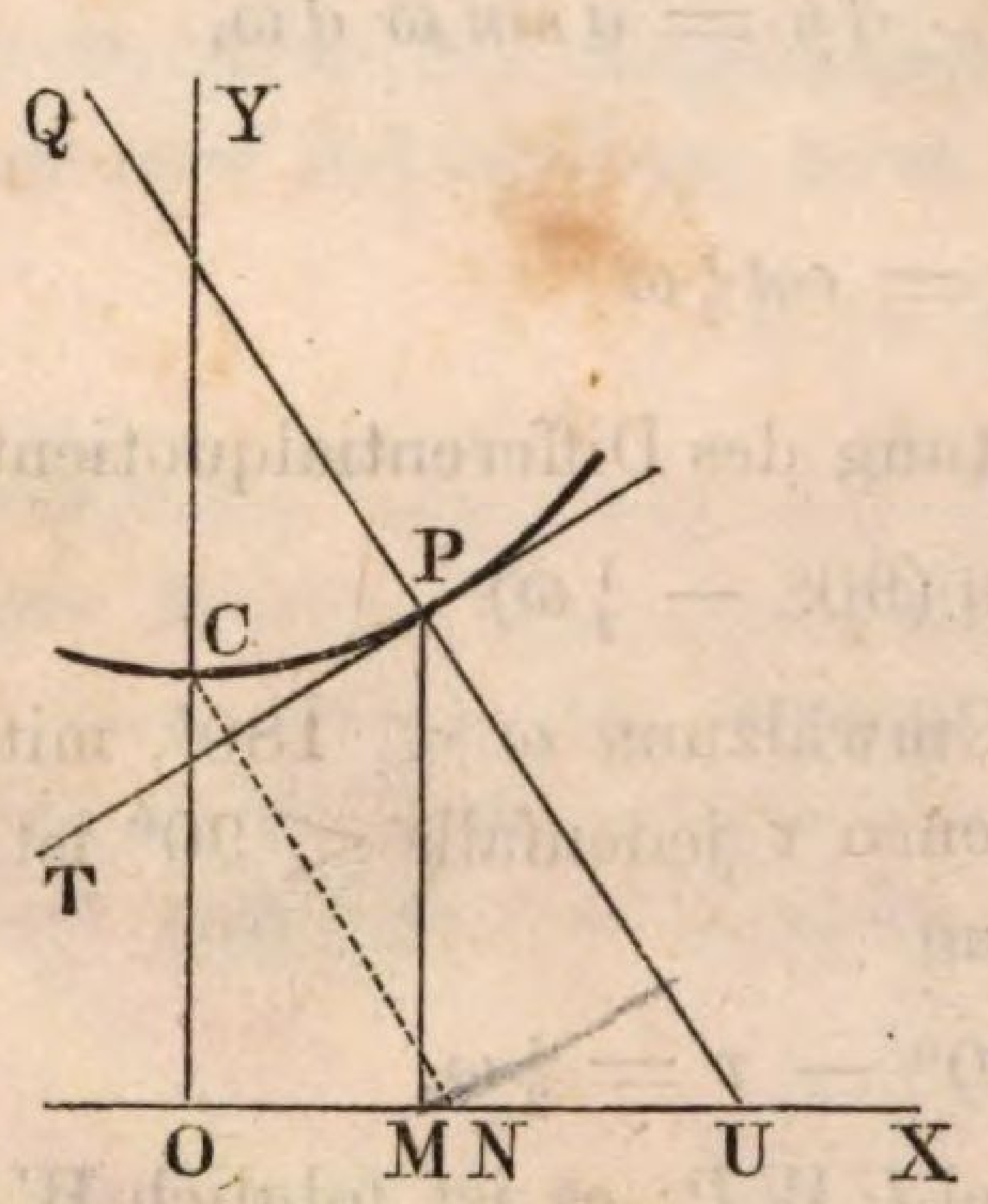
woraus wieder folgt, dass $PW \parallel CQ$ die Tangente sein muss.

III. Die Kettenlinie. Aus statischen Gründen bildet ein vollkommen biegsamer homogener Faden, frei aufgehangen und nur der Einwirkung seines Gewichtes unterworfen, eine krumme Linie von folgender Gleichung

$$12) \qquad y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

wobei die Abscissenachse horizontal in der Entfernung k unter dem Scheitel der Curve liegt, und die Ordinatenachse vertical durch den Scheitel geht (Fig. 24). Aus Nr. 12) folgt

Fig. 24.



$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

und es ist vermöge der Werthe von y und y'

$$\left(\frac{y}{k}\right)^2 - y'^2 = 1,$$

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1}$$

oder zufolge der geometrischen Bedeutung von y'

$$tan\, \tau = \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k}.$$

Um hiernach die Tangente am Punkte P zu construiren, beschreibt man aus dem Scheitel C mit MP als Halbmesser einen Kreis, welcher die Abscissenachse in N schneidet, zieht die Gerade CN, die mit OC einen Winkel $= \tau$ bildet, und legt PT senkrecht zu CN; die Normale PU ist parallel zu CN.

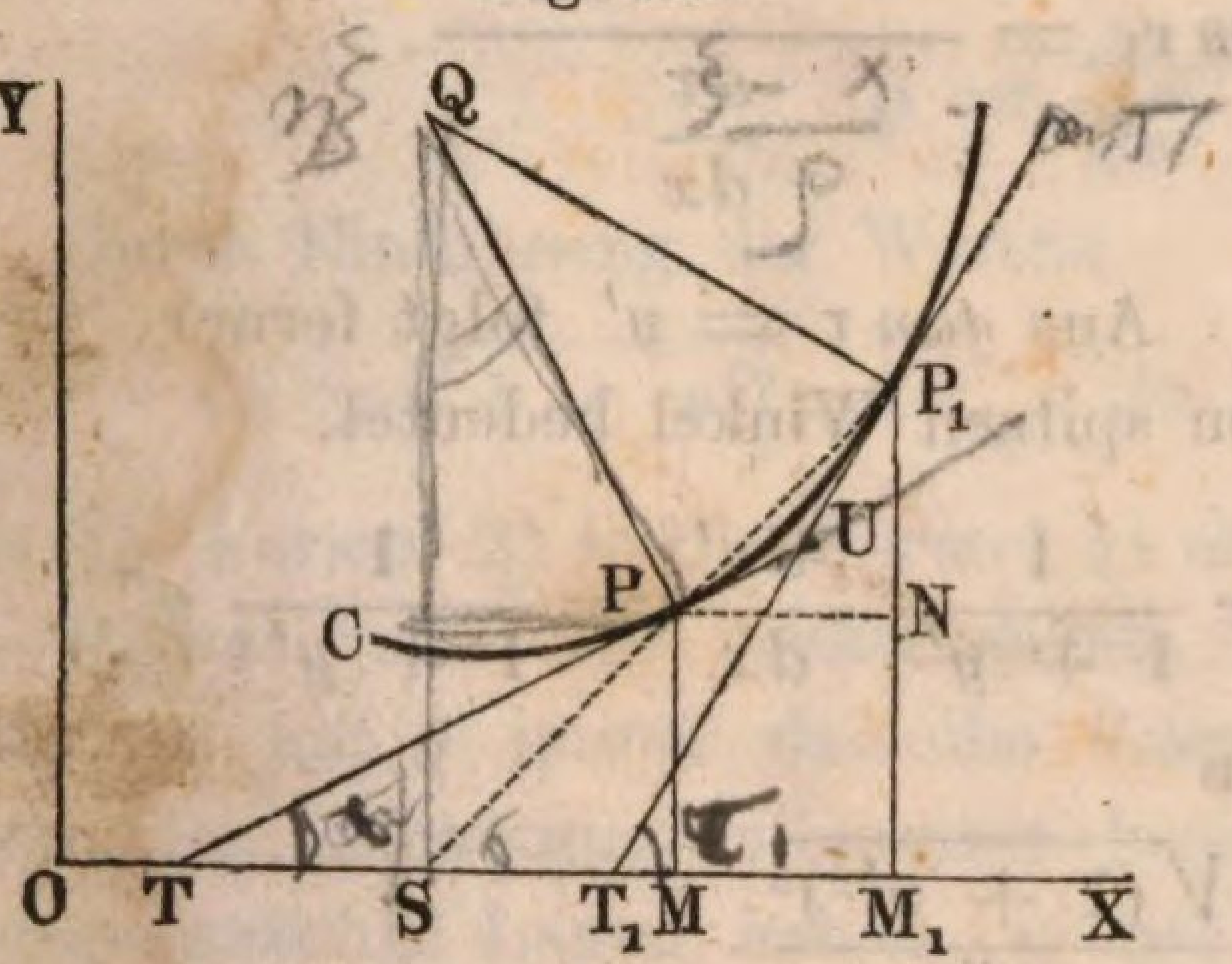
§. 22.

Krümmungskreis, Krümmungsmittelpunkt und Evolute.

I. An zwei Punkte P und P_1 einer Curve CPP_1 (Fig. 25) denken wir uns die Tangenten TP und T_1P_1 gelegt, die sich in U schneiden, und die zugehörigen Normalen construirt, deren Durchschnitt Q heissen möge; in dem Sehnenvierecke PQP_1U ist dann

$$\angle PQP_1 = \angle TUT_1 = \angle M_1T_1P_1 - \angle MTP = \tau_1 - \tau,$$

Fig. 25.



der Winkel PQP_1 giebt also den Zuwachs des Tangentenwinkels τ an und kann daher mit $\varDelta\tau$ bezeichnet werden. Ziehen wir ferner die Secante P_1PS und setzen

$$\angle PSM = \sigma,$$

so haben wir im Dreiecke PP_1Q

$$\angle PQP_1 = \varDelta\tau,$$

$$\angle P_1PQ = 90^0 - \angle P_1PU = 90^0 - \angle SPT = 90^0 - (\sigma - \tau),$$

$$\angle PP_1Q = 90^0 - \angle PP_1U = 90^0 - \angle SP_1T_1 = 90^0 - (\tau_1 - \sigma),$$

$$PP_1 = \sqrt{(\overline{PN}^2 + \overline{P_1N}^2)} = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2};$$

vermöge der Proportionalität der Seiten und der Sinus der Gegenwinkel können wir hieraus die Strecken $PQ = r$ und $P_1Q = r_1$ berechnen und finden

$$r = \frac{\sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}}{\sin \varDelta\tau} \sin PP_1Q$$

oder

$$r = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}}{\frac{\sin \varDelta\tau}{\varDelta\tau} \cdot \frac{\varDelta\tau}{\varDelta x}} \cos(\tau + \varDelta\tau - \sigma)$$

und dem entsprechend

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}}{\frac{\sin \varDelta\tau}{\varDelta\tau} \cdot \frac{\varDelta\tau}{\varDelta x}} \cos(\sigma - \tau).$$

Lassen wir jetzt den Punkt P_1 immer näher an P rücken, mithin $\varDelta x$, $\varDelta\tau$ und $\sigma - \tau$ gleichzeitig gegen die Null convergiren, so verändert der Durchschnitt Q seine Lage, geht aber nicht in's Unendliche hinaus; vielmehr nähern sich r und r_1 der gemeinschaftlichen Grenze

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

$$Lim\, r = Lim\, r_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d\tau}{dx}},$$

welche wir ϱ nennen wollen. Aus $\tan\tau = y'$ folgt ferner, weil τ einen positiven oder negativen spitzen Winkel bedeutet,

$$\tau = arctan\, y',\ \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2}\, y'',$$

daher ist zusammengenommen

$$1)\qquad \varrho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}.$$

Das für den ersten Augenblick überraschende Resultat, dass der Durchschnitt zweier Normalen beim Zusammenfallen der letzteren nicht in's Unendliche, sondern nur bis zu einem bestimmten Grenzpunkte fortrückt, ist übrigens geometrisch leicht zu erklären. Je weniger nämlich die Entfernung der Punkte P und P_1 beträgt, um so kleiner ist auch die Differenz der Längen von PQ und P_1Q, mithin lässt sich näherungsweis $PQ = P_1Q$ als Halbmesser eines Kreises ansehen, welcher sowohl die Punkte P und P_1 als die zugehörigen Tangenten PT und P_1T_1 mit der Curve gemein hat. Eben desswegen schliesst sich dieser Kreis genauer an die Curve an als jeder andere, dessen Mittelpunkt willkührlich auf der Normale PQ gewählt wäre und der nur die eine Tangente PT mit der Curve gemein hätte, oder kurz ausgedrückt, jener Kreis hat nahezu dieselbe Krümmung wie die Curve von P bis P_1. Diese Schlüsse erhalten ihre volle Gültigkeit beim Zusammenfallen der Punkte P und P_1; der Grenzpunkt des Normalendurchschnittes heisst dann der **Krümmungsmittelpunkt**, die Strecke ϱ, als Radius eines Kreises gedacht, der **Krümmungshalbmesser**, und der mit ϱ aus jenem Punkte beschriebene Kreis der **Krümmungskreis**; er schliesst sich der Curve genauer an als jeder andere in P sie berührende Kreis und hat durchweg dieselbe Krümmung, wie die Curve in P.

Diese Vorstellungsweise führt auch sehr rasch zur Formel 1). Setzt man nämlich $Arc\, CP = s$, so ist $Arc\, PP_1 = \Delta s$, ferner näherungsweis, indem man Δs wie einen mit dem Halbmesser $PQ = P_1Q = r$ beschriebenen und zum Centriwinkel $PQP_1 = \Delta\tau$ gehörigen Kreisbogen berechnet,

$$\Delta s = r \,.\, \Delta\tau \text{ oder } r = \frac{\Delta s}{\Delta\tau}$$

folglich genau beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta \tau$

2) $$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Durch Einführung der Werthe

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \,.\, dx, \quad d\tau = \frac{1}{1 + y'^2}\, y''\, dx$$

geht die Formel 2) in die Formel 1) über.

Nimmt man das vorkommende Wurzelzeichen im absoluten Sinne, so hat ϱ immer dasselbe Vorzeichen wie y''; d. h. geometrisch, der Krümmungshalbmesser kann zwei verschiedene einander entgegengesetzte Lagen haben, je nachdem die Curve die convexe oder die concave Seite nach unten kehrt; im ersten Falle ist er positiv, im zweiten negativ.

Für die Construction des Krümmungshalbmessers ist in manchen Fällen die Bemerkung von Nutzen, dass

3) $$\varrho = \frac{u^3}{y^3 y''}$$

gesetzt werden kann, wo u die Normale im Punkte P bezeichnet.

Aus der Gleichung der Kegelschnitte

$$y = \sqrt{2px + qx^2}$$

erhält man z. B. durch zweimalige Differentiation

$$y'' = -\frac{p^2}{\sqrt{(2px + qx^2)^3}} = -\frac{p^2}{y^3}$$

und daher ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{u^3}{p^2} = -u\left(\frac{u}{p}\right)^2,$$

was sich ohne Schwierigkeit construiren lässt, wenn man z. B. $\frac{u}{p}$ als Tangente eines Winkels betrachtet. Die eleganteste Construction der Formel werden wir im §. 24 zeigen.

Für die Cycloide ist nach §. 21

$$dx = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega\, d\omega, \qquad y' = \cot \tfrac{1}{2}\omega,$$

mithin

$$dy' = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\omega}\, d\omega,$$

woraus durch Division mit dx und dessen Werthe folgt

$$y'' = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{1}{2}\omega}.$$

Dies giebt den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -4a \sin\tfrac{1}{2}\omega = -2\,PU$$

oder gleich dem Doppelten der Normale; der Krümmungsmittelpunkt wird demnach erhalten, wenn man die Normale PU um ihre eigene Grösse verlängert.

Für die Kettenlinie ist nach §. 21

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right), \quad u = y \sec\tau = \frac{y^2}{k}$$

ferner

$$y'' = \frac{1}{2k}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) = \frac{y}{k^2}$$

mithin nach Nr. 3)

$$\varrho = \frac{y^2}{k} = u.$$

Die Kettenlinie hat also mit dem Kreise die Eigenschaft gemein, dass der Krümmungshalbmesser gleich der Normale ist; die Lagen sind aber einander entgegengesetzt.

II. Um die Coordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen, braucht man nur zu berücksichtigen, dass der gesuchte Punkt auf der Normale um ϱ vom Punkte P entfernt liegt; daher ist aus einfachen geometrischen Gründen

$$x - \xi = \varrho \sin\tau, \quad \eta - y = \varrho \cos\tau$$

oder vermöge der Werthe von ϱ, $\sin\tau$ und $\cos\tau$

4) $$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\,y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Für die Parabel, deren Gleichung

$$y = \sqrt{2px}$$

ist, findet man hiernach

$$\xi = 3x + p, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{p}}.$$

Wenn die Gleichung der Curve nicht in entwickelter Form gegeben ist, so müssen y' und y'' nach den Lehren des §. 16 berechnet werden.

III. Die Formeln 4) enthalten in letzter Instanz nur die drei Variabelen ξ, η und x, da man, wenigstens bei entwickelten Gleichungen von der Form $y = f(x)$, sowohl y als y' und y'' durch x ausdrücken kann. Denkt man sich aus den obigen Gleichungen x eliminirt, so bleibt nur eine Gleichung zwischen ξ und η übrig, d. h. die Gleichung derjenigen Curve, welche von den stetig aufeinanderfol-

genden Krümmungsmittelpunkten gebildet wird. Dieser geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte heisst die Evolute der gegebenen Curve, und zwar kommt diese Benennung daher, dass man sich die ursprügliche Curve durch Abwickelung eines um die Evolute gelegten Fadens entstanden denken kann.

Als Gleichung der Parabelevolute findet man mittelst der angegebenen Elimination

$$\eta^2 = \tfrac{8}{27}\,\frac{(\xi - p)^3}{p}$$

also eine Curve dritten Grades (die sogenannte semicubische Parabel).

Für die Ellipse, deren Gleichung unter der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

dargestellt wird, erhält man als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Für die Hyperbel ist die Mittelpunktsgleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

daraus ergiebt sich als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$a_1 = \frac{a^2 + b^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Für die Cycloide gilt der bemerkenswerthe Satz, dass die Evolute eine mit ihr congruente Cycloide ist, die jedoch eine andere Lage besitzt.

§. 23.

Formeln für Polarcoordinaten.

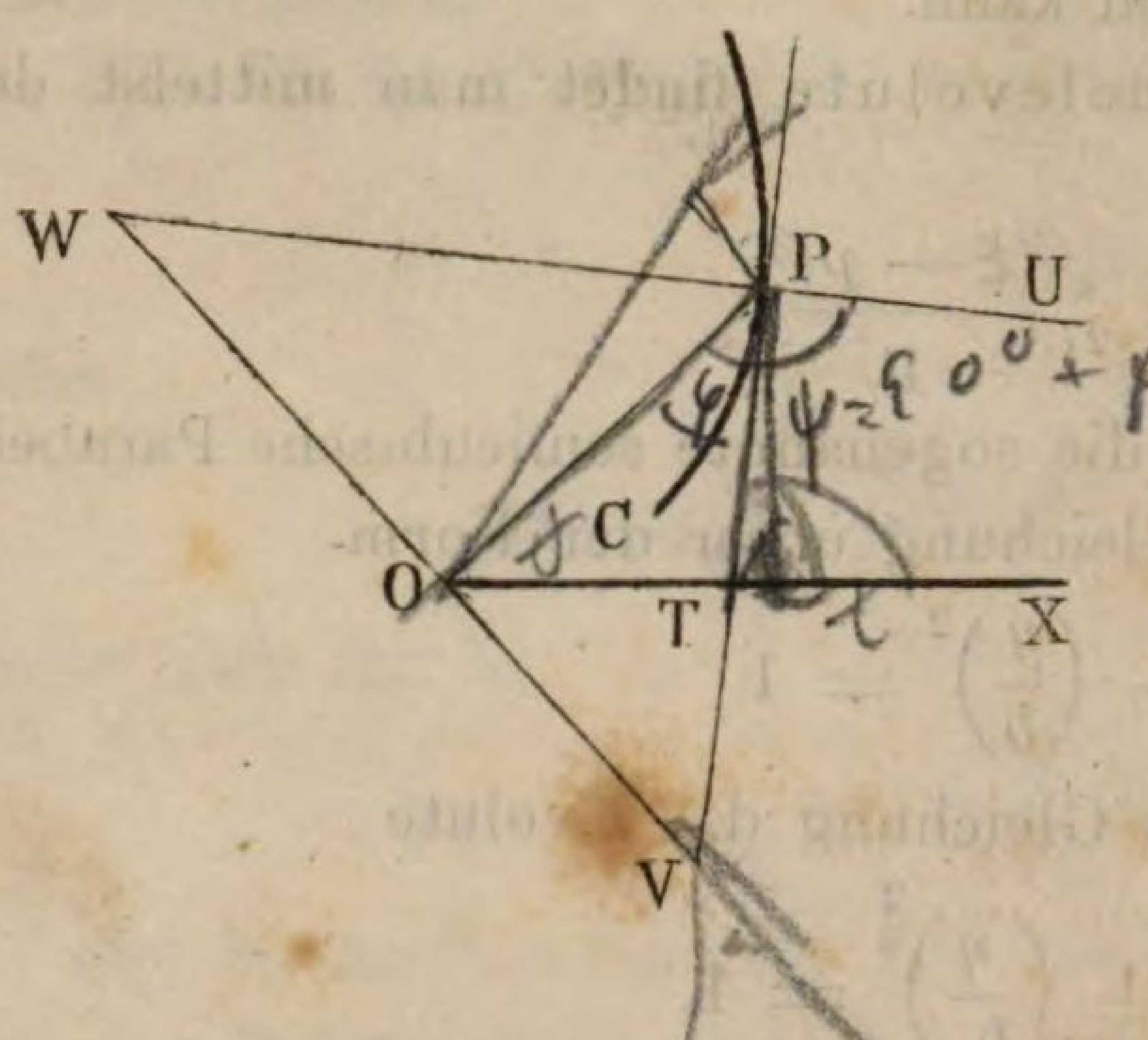
Bei dem Gebrauche von Polarcoordinaten wird meistentheils der Winkel zwischen dem Radiusvector und der Abscissenachse als unabhängige Variabele betrachtet und jener Vector als abhängige Variabele; für $\angle XOP = \theta$ und $OP = r$ (Fig. 26 a. f. S.) ist demnach die entwickelte Gleichung der Curve von der Form

1) $$r = f(\theta),$$

woraus sich die Differentialquotienten

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = f'(\theta),\ \frac{d^2 r}{d\theta^2} = r'' = f''(\theta) \text{ u. s. w.}$$

Fig. 26.



leicht ableiten lassen. Es fragt sich nun, welche neue Formeln an die Stelle der früheren treten, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführt. Der Uebergang von dem einen zum anderen Coordinatensysteme geschieht bekanntlich mittelst der Formeln

2) $$x = r \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta;$$

eine Aenderung des θ hat nun gleichzeitige Aenderungen von r, x und y zur Folge, mithin ist

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta,$$

und durch Division unter Berücksichtigung der Formel $\frac{dy}{dx} = \tan\tau$,

$$\tan\tau = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\tan\theta + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\tan\theta}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dr}{d\theta} = r\,\frac{1 + \tan\tau\tan\theta}{\tan\tau - \tan\theta} = r\,\frac{1}{\tan(\tau - \theta)}$$

oder, wenn $\tau - \theta = \varphi$ gesetzt wird,

3) $$\cot\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{r}.$$

Diese Formel, die man auch durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung finden kann, löst das Problem des Tangentenziehens, denn es ist φ der Winkel zwischen der Tangente PT und dem Radiusvector OP.

Nennen wir ψ den Winkel OPU, welchen die Normale mit dem Radiusvector einschliesst, so ist $\psi = 90^0 + \varphi$, folglich

4) $$\tan\psi = -\frac{r'}{r}.$$

Eine im Coordinatenanfange auf dem Vector errichtete Senkrechte wird von der Tangente in einem Punkte V, von der Normale in einem Punkte W geschnitten; die Strecke OV heisst dann die Polarsubtangente, OW die Polarsubnormale. Man findet $OV = r \tan\varphi$ oder

5) $$Polarsubtg. = \frac{r^2}{r'},$$

6) $$Polarsubn. = r';$$

die letzte Gleichung lässt die geometrische Bedeutung von r' erkennen.

Die Formel für das Bogendifferential

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

verwandelt sich nach Substitution der Werthe von dx und dy in die folgende

7) $$ds^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2$$

oder

8) $$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = d\theta \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Zu demselben Resultate führt auch eine einfache geometrische Betrachtung.

Um endlich den Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten auszudrücken, halten wir uns an die Formel

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau},$$

worin ds schon durch Nr. 8) bekannt und daher noch $d\tau$ zu berechnen ist. Die Formel 3) liefert

$$\tau - \theta = arccot\,\frac{r'}{r},$$

daher ist

$$d\tau - d\theta = -\frac{\dfrac{r\,dr' - r'\,dr}{r^2}}{1 + \left(\dfrac{r'}{r}\right)^2} = -\frac{r\,dr' - r'\,dr}{r^2 + r'^2}$$

$$= -\frac{r\dfrac{dr'}{d\theta} - r'\dfrac{dr}{d\theta}}{r^2 + r'^2}\,d\theta = -\frac{rr'' - r'^2}{r^2 + r'^2}\,d\theta$$

oder
$$d\tau = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\, d\theta,$$

und nun ergiebt sich vermöge der Werthe von ds und $d\tau$

9)
$$\varrho = \frac{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Für den Fall, dass die Gleichung der Curve unentwickelt in Polarcoordinaten gegeben ist, hat man r' und r'' nach §. 16 zu berechnen.

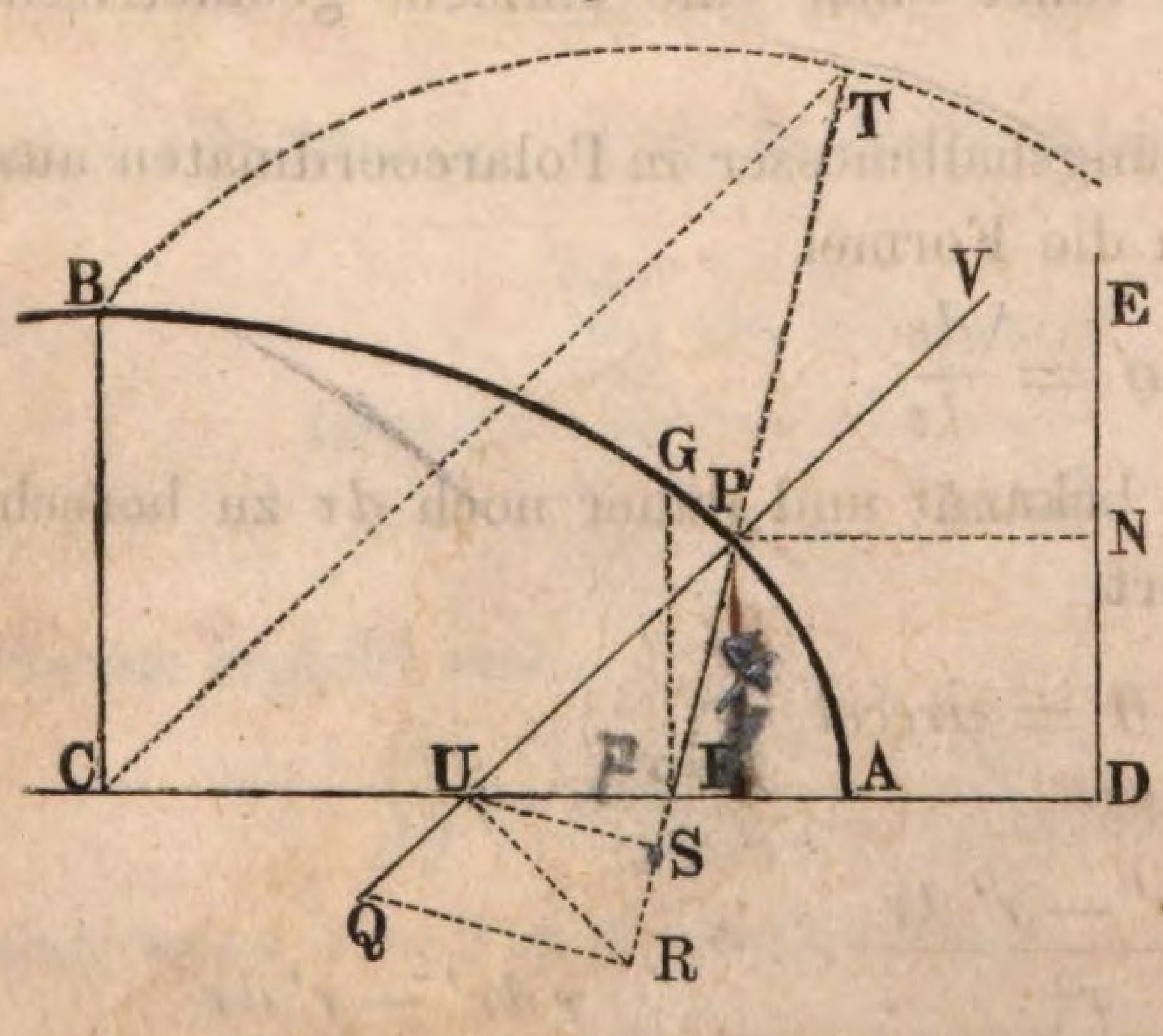
§. 24.

Beispiele zu den vorigen Formeln.

I. Die Kegelschnitte. Nimmt man den einen Brennpunkt des Kegelschnitts zum Pol, die Hauptachse zur Abscissenachse und rechnet den Winkel θ vom nächsten Scheitel aus, so ist bekanntlich die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

1)
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

Fig. 27.



und in Beziehung auf Fig. 27,
$FP = r$, $\angle AFP = \theta$;
dabei bedeutet p den Halbparameter gleich der Brennpunktsordinate FG und ε die numerische Exentricität, d. h. das Verhältniss von r zum Abstande PN des Punktes P von der Directrix DE. Aus Nro. 1) erhält man für den Winkel $FPV = \psi$ zwischen Vetcor und Normale die Formel

$$\tan\psi = -\frac{\varepsilon \sin\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

und für dessen Supplement FPU, welches χ heissen möge,

$$tan\,\chi = \frac{\varepsilon\,sin\,\theta}{1 + \varepsilon\,cos\,\theta},$$

$$cos\,\chi = \frac{1 + \varepsilon\,cos\,\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\,cos\,\theta + \varepsilon^2}}, \quad sin\,\chi = \frac{\varepsilon\,sin\,\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\,cos\,\theta + \varepsilon^2}}.$$

Hieraus kann der Winkel zwischen der Normale und der Hauptachse abgeleitet werden; es ist nämlich $\angle\,FUP = \theta - \chi$,

$$sin\,FUP = sin\,\theta\,cos\,\chi - cos\,\theta\,sin\,\chi$$

und nach Substitution der Werthe von $cos\,\chi$ und $sin\,\chi$

$$sin\,FUP = \frac{sin\,\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\,cos\,\theta + \varepsilon^2}}.$$

In dem Dreiecke FPU kennt man jetzt eine Seite $FP = r$ und alle Winkel, woraus die übrigen Seiten FU und $PU = u$ leicht zu berechnen sind. Man hat zunächst

$$FU = \frac{r\,sin\,\chi}{sin\,FUP} = \varepsilon\,r$$

mithin

$$\frac{FU}{r} = \varepsilon = \frac{r}{PN}, \quad FU = \frac{r^2}{PN};$$

dies giebt eine neue Normalenconstruction entweder mit Hülfe der Directrix oder bequemer in der Weise, dass man auf dem Vector die Strecke FT gleich der grossen Halbachse des Kegelschnitts nimmt, T mit dem Mittelpunkte C verbindet und nachher die Normale $PU \parallel TC$ legt. Für die Normale u erhält man

$$u = \frac{r\,sin\,\theta}{sin\,FUP} = r\sqrt{1 + 2\varepsilon\,cos\,\theta + \varepsilon^2}$$

mithin

$$u\,cos\,\chi = r(1 + \varepsilon\,cos\,\theta) = p;$$

hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass die Projection der Normale auf den Vector eine constante Grösse und zwar gleich dem Halbparameter ist. Nimmt man demgemäss auf dem Vector die Strecke $PS = FG$ und errichtet in S auf PS eine Senkrechte, so bestimmt letztere auf der Achse den Punkt U, durch welchen die Normale geht. Aus der obigen Gleichung ersieht man ferner die geometrische Bedeutung von $\frac{u}{p}$, und hierdurch wird die in §. 22 für den Krümmungshalbmesser entwickelte Formel zur folgenden

$$\varrho = -\,u\,sec^2\chi,$$

deren Construction einfach darin besteht, dass man in U auf der Nor-

male eine Senkrechte errichtet, welche den Vector in R schneidet, und nachher durch R eine zu PR senkrechte Gerade legt, welche der Normalen im Krümmungsmittelpunkte Q begegnet.

II. Die Lemniscate. Auf einer Geraden sind zwei feste Punkte F und G im Abstande $FG = 2c$ gegeben, und es wird der geometrische Ort des beweglichen Punktes P für den Fall gesucht, dass das Rechteck $FP \,.\, GP$ von constantem Inhalte und zwar gleich dem Quadrate über $\frac{1}{2} FG = c$ ist. Auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen x-Achse die Gerade FG (Fig. 28) und dessen Anfang der Mittelpunkt von FG ist, lautet die Gleichung der Curve

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2} \cdot \sqrt{(c+x)^2+y^2} = c^2$$

und nach gehöriger Reduction

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Durch Einführung von Polarcoordinaten ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) wird die Gleichung einfacher

$$r^4 = 2c^2r^2\cos 2\theta$$

oder, wenn $c\sqrt{2} = a$ gesetzt wird,

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Hieraus ergiebt sich augenblicklich

$$\tan\psi = \tan 2\theta;$$

der spitze Winkel zwischen Vector und Normale beträgt also das Doppelte von θ, wonach die Normale sehr leicht zu construiren ist.

Fig. 28.

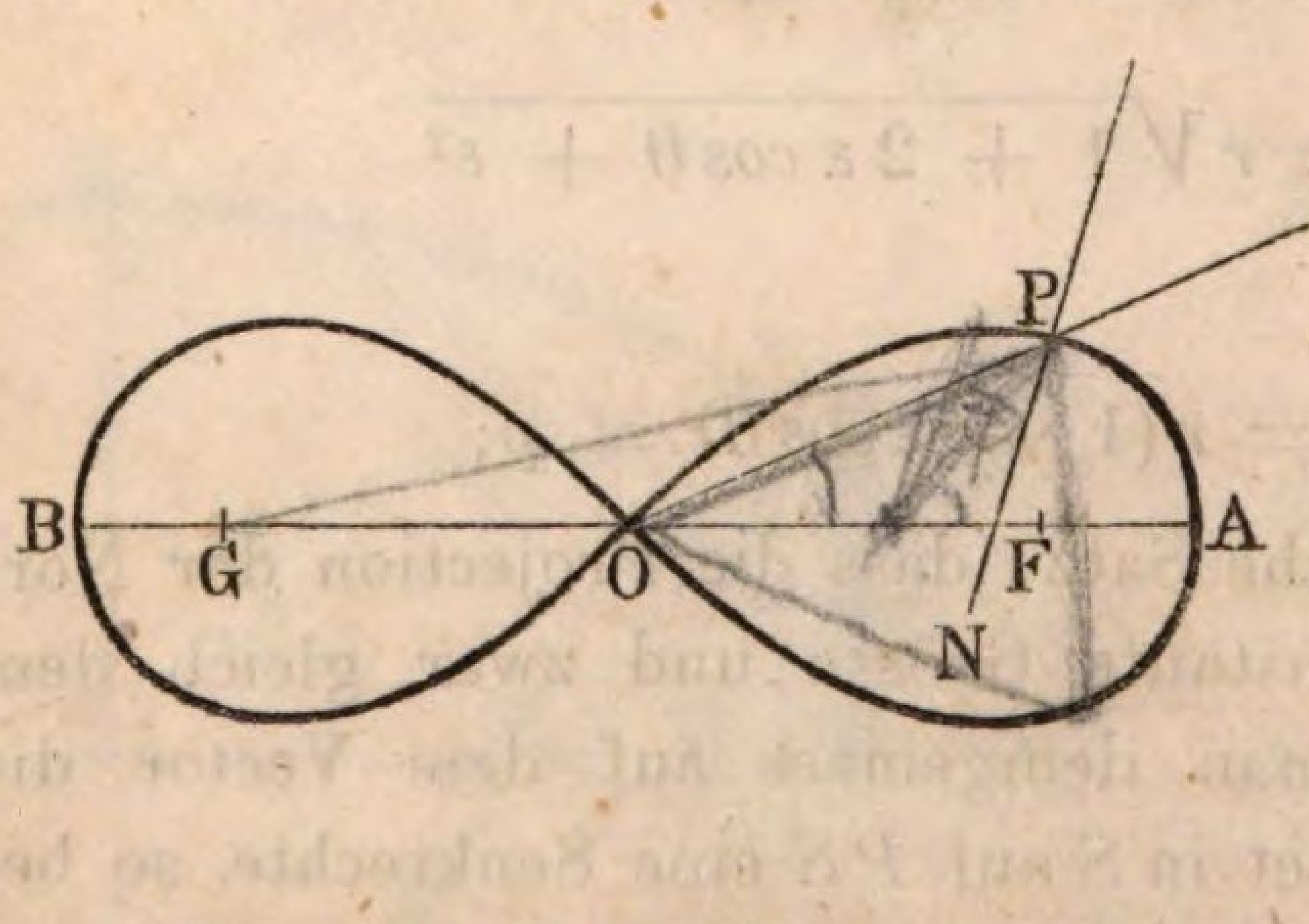
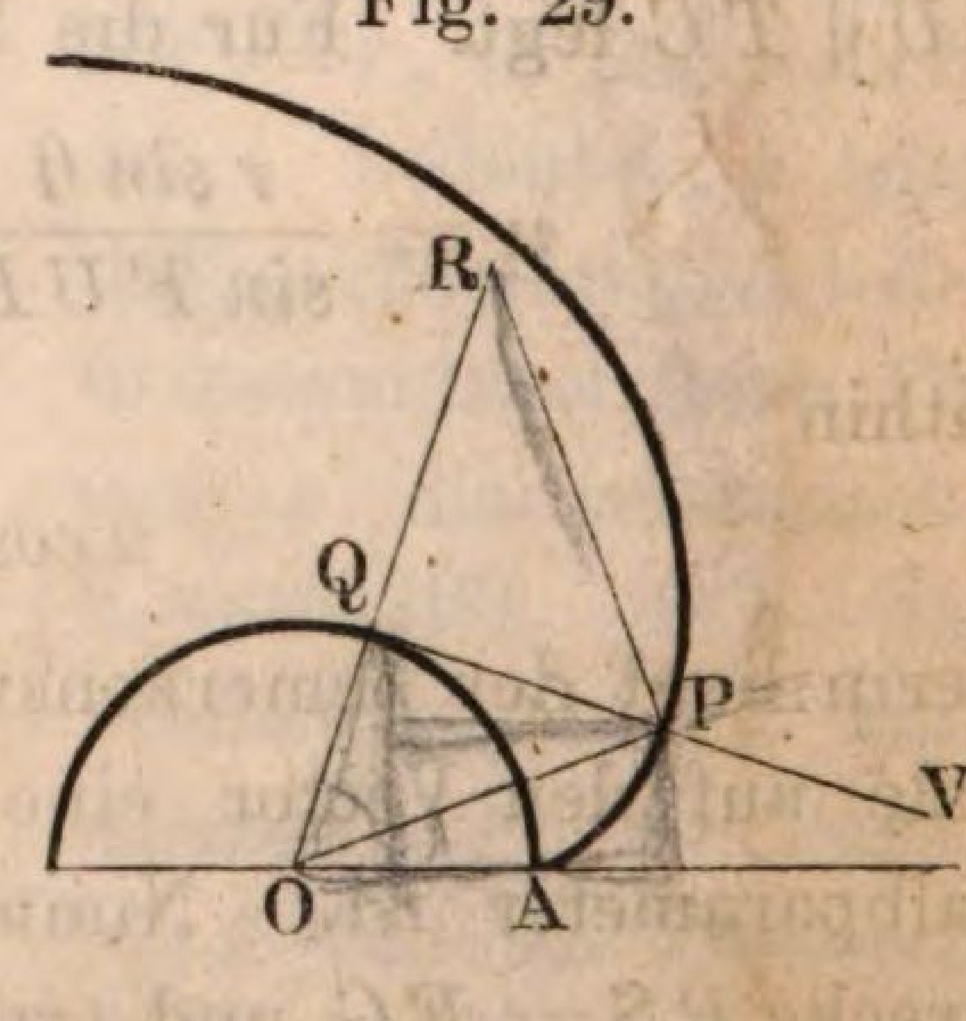


Fig. 29.



III. Die Kreisevolvente. Wenn eine Gerade ohne zu gleiten so um einen Kreis herumgedreht wird, dass sie denselben immer berührt, so beschreibt ein bestimmter Punkt der Geraden die genannte Curve. Bei der Anfangslage der Geraden sei A jener Punkt und zugleich Berührungspunkt, eine spätere Lage der Geraden sei QP, der Wälzungswinkel $AOQ = \omega$, $\angle AOP = \theta$, $AO = a$ (Fig. 29), es ist dann

$$QP = arc\, QA = a\omega,$$

mithin in dem Dreiecke OPQ

$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad tan(\omega - \theta) = \omega.$$

Durch Elimination von ω würde man aus diesen Gleichungen eine Gleichung zwischen r und θ ableiten können, doch ist es bequemer, die obigen Gleichungen ungeändert beizubehalten und ω als unabhängige Variabele zu betrachten. Man hat jetzt

$$dr = \frac{a\omega\, d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \frac{d\omega - d\theta}{cos^2(\omega - \theta)} = d\omega$$

und aus der zweiten Gleichung

$$d\theta = sin^2(\omega - \theta)\, d\omega = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega,$$

mithin durch Division

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}.$$

Setzt man wie früher $\angle\, OPV = \psi$, $\angle\, OPQ = \chi$, so ergiebt sich

$$tan\,\psi = -\frac{r'}{r} = -\frac{1}{\omega}, \quad tan\,\chi = \frac{1}{\omega} = cot(\omega - \theta),$$

es ist folglich $\chi = 90^0 - \angle\, POQ$ oder PQ die Normale, wie zu erwarten war.

Man hat ferner

$$dr' = d\left(\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}\right) = -\frac{a}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2}}\, d\omega$$

und durch Division mit $d\theta$

$$r'' = -\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^4};$$

nach Formel 9) des vorigen Paragraphen ergiebt sich

$$\varrho = a\omega = PQ,$$

mithin ist Q der Krümmungsmittelpunkt, wie sich nach der Entstehungsweise der Curve erwarten liess.

§. 25.

Tangenten und Normalebenen an doppelt gekrümmten Linien.

I. Eine Curve doppelter Krümmung hat bekanntlich zwei Gleichungen, weil sie als Durchschnitt zweier Flächen angesehen werden kann; sind die Gleichungen der letzteren gegeben, etwa in der Gestalt

$$1) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0,$$

so kann man aus ihnen einmal z, einmal y eliminiren und erhält dann zwei neue Gleichungen von der Form

$$2) \qquad y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

womit die Projectionen der Curve auf die xy- und auf die xz-Ebene bestimmt sind. Es mögen nun zwei Curvenpunkte P und P_1 betrachtet werden, deren Coordinaten x, y, z und $x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z$ heissen sollen. Die Länge der Sehne PP_1 ist

$$PP_1 = \sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}$$

und wenn wir die Winkel, welche PP_1 mit den Coordinatenachsen einschliesst, durch σ_x, σ_y, σ_z bezeichnen, so haben wir

$$\cos\sigma_x = \frac{\varDelta x}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)^2}},$$

$$\cos\sigma_y = \frac{\varDelta y}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}} = \frac{\frac{\varDelta y}{\varDelta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)^2}},$$

$$\cos\sigma_z = \frac{\varDelta z}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}} = \frac{\frac{\varDelta z}{\varDelta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)^2}}.$$

Bei unendlich abnehmenden $\varDelta x$ rücken die Punkte P und P_1 einander immer näher, die Secante dreht sich um den fest bleibenden Punkt P und geht schliesslich in die Tangente über, deren Richtung durch drei neue Winkel τ_x, τ_y, τ_z bestimmt wird; aus den vorigen Gleichungen erhalten wir jetzt die folgenden

$$3)\begin{cases} \cos\tau_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \\[2ex] \cos\tau_y = \dfrac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \\[2ex] \cos\tau_z = \dfrac{\dfrac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}} = \dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}. \end{cases}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der drei Brüche hat einen geometrischen Sinn. Bezeichnen wir nämlich den Bogen PP_1 mit Δs und die gleichnamige Sehne mit $\Delta\sigma$, so findet die Gleichung statt

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2};$$

bei verschwindenden Δx convergirt $\dfrac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ gegen die Grenze 1 und aus der vorigen Gleichung wird

$$4)\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

oder

$$5)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Durch Substitution von Nro. 4) in Nro. 3) erhalten wir für die Richtungswinkel der Tangente folgende Formeln:

$$(6\qquad \cos\tau_x = \frac{dx}{ds},\quad \cos\tau_y = \frac{dy}{ds},\quad \cos\tau_z = \frac{dz}{ds}.$$

Um die Gleichungen der Tangente im Punkte xyz aufzustellen, nennen wir ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, r seinen Abstand vom Punkte xyz und haben

$$\xi - x = r\cos\tau_x,\quad \eta - y = r\cos\tau_y,\quad \zeta - z = r\cos\tau_z$$

mithin

$$\frac{\xi - x}{\cos\tau_x} = \frac{\eta - y}{\cos\tau_y} = \frac{\zeta - z}{\cos\tau_z}$$

oder vermöge der drei angegebenen Cosinuswerthe

$$7)\qquad \frac{\xi - x}{\dfrac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\dfrac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\dfrac{dz}{ds}}.$$

Denkt man sich die Tangente auf die Ebenen xy und xz projicirt, so gelten für die Projectionen die Gleichungen

$$8)\qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \qquad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x)$$

d. h. die Projectionen der Tangente sind die Tangenten an den gleichnamigen Projectionen der Curve, was geometrisch unmittelbar einleuchtet.

II. Eine Ebene, die senkrecht zur Tangente durch den Berührungspunkt der letzteren gelegt ist, heisst eine Normalebene der doppelt gekrümmten Curve; ihre Gleichung findet sich auf folgendem Wege. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Normalebene, so muss die gesuchte Gleichung von der Form

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

sein, weil die fragliche Ebene den Punkt xyz enthalten muss. Da ferner die Normalebene senkrecht zur Tangente liegen soll, so müssen ihre Stellungswinkel identisch mit den Winkeln τ_x, τ_y, τ_z sein, woraus nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie folgt

$$A : B : C = \cos\tau_x : \cos\tau_y : \cos\tau_z.$$

Die Gleichung der Normalebene ist daher

$$\cos\tau_x(\xi - x) + \cos\tau_y(\eta - y) + \cos\tau_z(\zeta - z) = 0$$

d. h.

$$9)\qquad \frac{dx}{ds}(\xi - x) + \frac{dy}{ds}(\eta - y) + \frac{dz}{ds}(\zeta - z) = 0$$

oder auch

$$10)\qquad \xi - x + \frac{dy}{dx}(\eta - y) + \frac{dz}{dx}(\zeta - z) = 0.$$

Die in den vorigen Formeln auftretenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ kann man aus den Gleichungen 2) unmittelbar erhalten, wenn die Gleichungen der Curve in dieser Form gegeben sind; kennt man aber nur die beiden Flächen, als deren Durchschnitt die Linie angesehen wird, und lässt sich die im Anfange dieses Paragraphen angedeutete Elimination nicht ausführen, so muss man die Gleichungen 1) zur Entwickelung von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ benutzen. Die Differentiation derselben giebt unter Rücksicht auf den Umstand, dass eine unabhängige Variabele x und zwei abhängige Variabelen y, z vorhanden sind,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

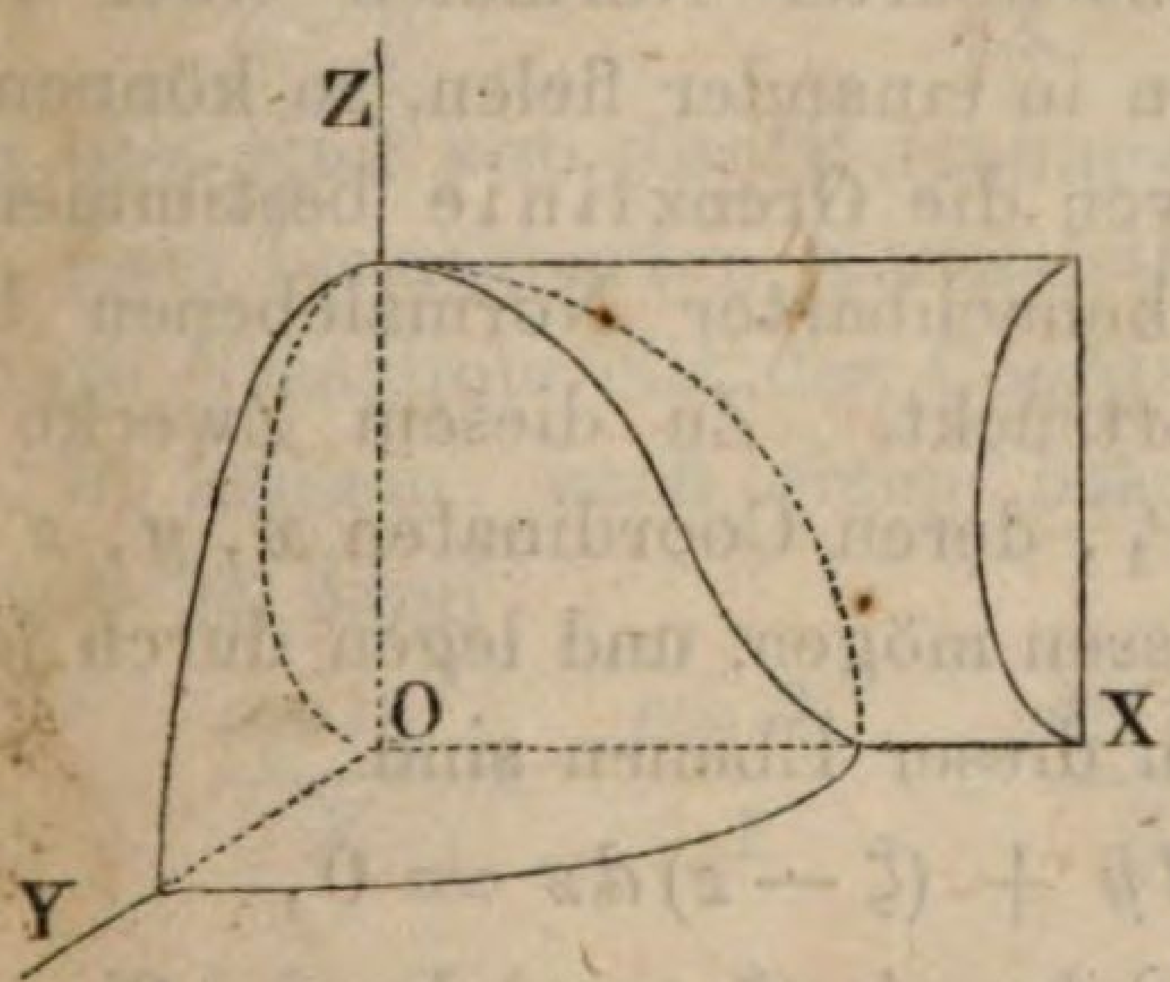
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

und hieraus findet sich durch Elimination

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= + \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}}, \\ \frac{dz}{dx} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}}. \end{aligned} \right.$$

Als Beispiel diene der Durchschnitt einer Kugelfläche mit einem Cylinder, dessen kreisförmiger Querschnitt den Kugelhalbmesser zum Durchmesser haben, und dessen Mantel durch den Kugelmittelpunkt gehen möge. Nennen wir $2a$ den Kugelhalbmesser und legen die x-Achse in die erzeugende Gerade, welche durch das Kugelcentrum geht (Fig. 30), so gelten für unsere Curve folgende Gleichungen

Fig. 30.



$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0,$$

$$F(x, y, z) = y^2 - 2az + z^2 = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - a)$$

und mittelst der Formeln in Nro. 11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(z-a)}{ay}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{a};$$

demnach sind die Gleichungen der Tangente

$$\eta - y = \frac{x(z-a)}{ay}(\xi - x), \quad \zeta - z = -\frac{x}{a}(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\xi - x + \frac{x(z-a)}{ay}(\eta - y) - \frac{x}{a}(\zeta - z) = 0$$

und bei gehöriger Reduction

$$\frac{a}{x}\xi + \frac{z-a}{y}\eta - \zeta = 0;$$

man ersieht hieraus, dass die Normalebene immer durch den Coordinatenanfang (den Kugelmittelpunkt) geht, was bei einer sphärischen Curve zu erwarten war.

§. 26.

Die Krümmung räumlicher Curven.

I. So wie wir in §. 22 den Grenzpunkt aufsuchten, in welchen der Durchschnitt zweier benachbarter Normalen einer Plancurve überging, wenn die Normalen in einander fielen, so können wir auch bei doppelt gekrümmten Curven die Grenzlinie bestimmen, in welche der Durchschnitt zweier benachbarter Normalebenen beim Zusammenfallen dieser Ebenen fortrückt. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Punkte P und P_1, deren Coordinaten x, y, z und $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ heissen mögen, und legen durch jeden eine Normalebene; die Gleichungen dieser Ebenen sind

1) $$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$
$$(\xi - x_1)\,dx_1 + (\eta - y_1)\,dy_1 + (\zeta - z_1)\,dz_1 = 0.$$

In Beziehung auf x, y, z betrachtet, ist die erste Gleichung unter der allgemeinen Form $\mathfrak{f}(x, y, z) = 0$ enthalten, die zweite unter der entsprechenden Form $\mathfrak{f}(x_1, y_1, z_1) = 0$ oder $\mathfrak{f}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0$; es gilt aber immer die Gleichung

$$\mathfrak{f}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \mathfrak{f}(x, y, z) + \Delta\mathfrak{f}(x, y, z),$$

worin $\Delta\mathfrak{f}(x, y, z)$ die totale Differenz der Function $\mathfrak{f}$ bedeutet, ferner ist $\mathfrak{f}(x, y, z) = 0$, mithin lässt sich die Gleichung der zweiten Normalebene durch

2) $$\Delta[(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz] = 0$$

darstellen. Um noch auszudrücken, dass später die zweite Normalebene mit der ersten zusammenfallen soll, schreiben wir d statt Δ, und erhalten durch Ausführung der angedeuteten totalen Differentiation

$$\left.\begin{matrix}(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2\end{matrix}\right\} = 0$$

oder kürzer

3) $$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2.$$

Die Gleichungen des Durchschnittes beider Normalebenen würden sich jetzt dadurch finden, dass man einmal $\zeta - z$, das andere Mal $\eta - y$ aus den Gleichungen 1) und 2) eliminirte, da es uns aber nur auf die Grenzlinie des Durchschnittes ankommt, so nehmen wir die Gleichung 3) statt Nro. 2), wobei der beabsichtigte Uebergang zur Grenze schon durch den Gebrauch von d statt Δ ausgesprochen ist. Indem wir die Abkürzungen

4) $$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,\quad Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

einführen, erhalten wir mittelst der angedeuteten Elimination

5) $$\left\{\begin{aligned} \eta - y &= \frac{Y}{X}(\xi - x) - \frac{ds^2\,dz}{X}, \\ \zeta - z &= \frac{Z}{X}(\xi - x) + \frac{ds^2\,dy}{X}, \end{aligned}\right.$$

und dies sind nun die Gleichungen der Grenzlinie des Durchschnittes von zwei benachbarten Normalebenen. Die Winkel, welche die genannte Grenzlinie mit den Coordinatenachsen einschliesst, mögen ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z heissen; nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist dann

6) $$\frac{\cos\vartheta_x}{X} = \frac{\cos\vartheta_y}{Y} = \frac{\cos\vartheta_z}{Z} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Auf die hiermit bestimmte Grenzlinie fällen wir vom Punkte P eine Senkrechte PQ; den Fusspunkt Q nennen wir den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt, die Länge $PQ = \varrho$ den Krümmungshalbmesser. Sind nun ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z die Winkel, welche ϱ mit den Coordinatenachsen bildet, so gelten erstens die drei Gleichungen

7) $$\xi - x = \varrho\cos\varrho_x,\quad \eta - y = \varrho\cos\varrho_y,\quad \zeta - z = \varrho\cos\varrho_z,$$

ferner ist, weil die Grenzlinie und der Krümmungshalbmesser einen rechten Winkel einschliessen,

$$\cos\vartheta_x\cos\varrho_x + \cos\vartheta_y\cos\varrho_y + \cos\vartheta_z\cos\varrho_z = 0,$$

oder auch durch Substitution der sechs Cosinuswerthe aus 6) und 7)

8) $$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0.$$

Zur Bestimmung von ξ, η, ζ führt nun die Bemerkung, dass der Krümmungsmittelpunkt sowohl in der Grenzlinie 5) als auch in der Senkrechten PQ liegt, dass also ξ, η, ζ den Gleichungen 5), 7) und 8) genügen müssen; hieraus findet man

$$9)\quad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{Y\,dz - Z\,dy}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2, \\[2ex] \eta - y = \dfrac{Z\,dx - X\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2, \\[2ex] \zeta - z = \dfrac{X\,dy - Y\,dx}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2. \end{cases}$$

Für die Grösse des Krümmungshalbmessers erhält man

$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

und nach Substitution der vorigen Werthe

$$10)\quad \varrho = \frac{\sqrt{(Y\,dz - Z\,dy)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (X\,dy - Y\,dx)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2.$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, entwickeln wir die unter dem Wurzelzeichen stehende Quadratsumme, geben ihr die neue Form

$$X^2(dy^2 + dz^2) + Y^2(dz^2 + dx^2) + Z^2(dx^2 + dy^2)$$
$$- 2(XY\,dx\,dy + ZX\,dz\,dx + YZ\,dy\,dz)$$

und ersetzen die Coefficienten von X^2, Y^2, Z^2 durch die gleichgeltenden Werthe

$$ds^2 - dx^2, \quad ds^2 - dy^2, \quad ds^2 - dz^2;$$

die vorige Quadratsumme geht dann über in

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2 - (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2,$$

und hier verschwindet der Subtrahend vermöge der in Nro. 4) angegebenen Werthe von X, Y, Z. Damit verwandelt sich die Formel 10) in die folgende

$$11)\quad \varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Ferner überzeugt man sich durch gewöhnliche Ausrechnung von der Richtigkeit der Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]\,ds^2,$$

und kann daher statt der Formel 11) auch die folgende schreiben

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}};$$

diese ist wieder einerlei mit

$$12)\quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\dfrac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}},$$

wie man durch Ausführung der angedeuteten Differentiationen finden

wird. Endlich kann man die Formeln 9) durch die folgenden ersetzen

13) $\xi - x = \varrho^2 \dfrac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}, \quad \eta - y = \varrho^2 \dfrac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \dfrac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}.$

Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass man zu diesen Formeln auch auf einem anderen Wege gelangen kann, wobei der Krümmungshalbmesser als der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\varDelta s}{\varDelta \tau}$ angesehen wird, wenn $\varDelta \tau$ den Winkel zwischen den Tangenten in den Punkten P und P_1 bedeutet. Wir wollen diese Betrachtung kurz durchführen, weil sie das stereometrische Seitenstück zu der auf S. 98. gegebenen Entwickelung ist. Die Tangente im Punkte P bildet mit den drei Coordinatenachsen die Winkel τ_x, τ_y, τ_z, deren Cosinus an die Gleichung

14) $$(\cos \tau_x)^2 + (\cos \tau_y)^2 + (\cos \tau_z)^2 = 1$$

gebunden sind; die Tangente im nächsten Punkte P_1 schliesst mit den Achsen drei neue Winkel ein, deren Cosinus von den vorigen Cosinus verschieden sind und durch

$$\cos \tau_x + \varDelta \cos \tau_x, \quad \cos \tau_y + \varDelta \cos \tau_y, \quad \cos \tau_z + \varDelta \cos \tau_z$$

bezeichnet werden können; für dieselben gilt die entsprechende Gleichung

15) $$(\cos \tau_x + \varDelta \cos \tau_x)^2 + (\cos \tau_y + \varDelta \cos \tau_y)^2 + (\cos \tau_z + \varDelta \cos \tau_z)^2 = 1.$$

Beide Tangenten bilden mit einander den Winkel $\varDelta \tau$, welcher bestimmt wird durch die Formel

$$\cos \varDelta \tau = \cos \tau_x (\cos \tau_x + \varDelta \cos \tau_x) + \cos \tau_y (\cos \tau_y + \varDelta \cos \tau_y) + \cos \tau_z (\cos \tau_z + \varDelta \cos \tau_z).$$

Subtrahirt man das Doppelte dieser Gleichung von der Summe der Gleichungen 14) und 15), so bleibt

$$2(1 - \cos \varDelta \tau) = (\varDelta \cos \tau_x)^2 + (\varDelta \cos \tau_y)^2 + (\varDelta \cos \tau_z)^2,$$

woraus folgt

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \varDelta \tau = \sqrt{(\varDelta \cos \tau_x)^2 + (\varDelta \cos \tau_y)^2 + (\varDelta \cos \tau_z)^2}.$$

Ferner ist, wenn der Bogen PP_1 mit $\varDelta s$ bezeichnet wird,

$$\frac{\varDelta s}{\varDelta \tau} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varDelta \tau}{\frac{1}{2} \varDelta \tau} \cdot \frac{\varDelta s}{2 \sin \frac{1}{2} \varDelta \tau}$$

und nach dem Vorigen

$$\frac{\varDelta s}{\varDelta \tau} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varDelta \tau}{\frac{1}{2} \varDelta \tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\varDelta \cos \tau_x}{\varDelta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\varDelta \cos \tau_y}{\varDelta s}\right)^2 + \left(\dfrac{\varDelta \cos \tau_z}{\varDelta s}\right)^2}}.$$

Gehen wir nun zur Grenze für verschwindende $\varDelta s$ und $\varDelta \tau$ über, so erhalten wir linker Hand

$$Lim \frac{\varDelta s}{\varDelta \tau} = \frac{ds}{d\tau} = \varrho,$$

rechter Hand convergirt der erste Bruch gegen die Einheit, und damit gelangen wir zu der Formel

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d \cos \tau_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \tau_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \tau_z}{ds}\right)^2}},$$

welche nach Substitution der Werthe von $\cos \tau_x$, $\cos \tau_y$, $\cos \tau_z$ (Nro. 6 in §. 25) mit Formel 12) identisch wird.

Die obigen Formeln zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes sowie des Krümmungshalbmessers gelten völlig allgemein, welche auch die unabhängige Variabele sein möge; sie vereinfachen sich aber, wenn man eine der Grössen x, y, z, s als unabhängige Veränderliche betrachtet. Wird z. B. die Curve durch ihre Horizontal- und Verticalprojection bestimmt, so ist x die unabhängige Variabele, dx ein irgendwie beliebig gegen die Null convergirender und eben desshalb von x unabhängiger Zuwachs des x, folglich $d^2x = 0$; unter Benutzung der gewöhnlichen Zeichen

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \varphi''(x) \text{ u. s. w.}$$

erhält man jetzt aus den Formeln 11) und 9)

$$17) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - y''z')^2 + y''^2 + z''^2}},$$

$$18) \quad \begin{cases} \xi - x = -\varrho^2 \dfrac{y'y'' + z'z''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}, \\ \eta - y = \varrho^2 \dfrac{y'' - (y'z'' - y''z')z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}, \\ \zeta - z = \varrho^2 \dfrac{z'' + (y'z'' - y''z')y'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 18) enthalten nach Substitution der Werthe von y, y', y'', z, z', z'' und ϱ nur die vier Variabelen x, ξ, η, ζ; man kann daher durch Elimination von x zwei Gleichungen zwischen ξ, η, ζ bilden. Diese neuen Gleichungen bestimmen den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Besonders symmetrisch gestalten sich die Formeln, wenn man s als unabhängige Variabele, mithin x, y, z als Functionen von s ansieht; es ist dann $d^2 s = 0$ und

$$19) \qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

$$20) \quad \xi - x = \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

II. Wir kehren wieder zu den Formeln 6) zurück, um eine weitere Bemerkung daran zu knüpfen. Legt man durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zur Grenzlinie 6), so erhält man die Ebene des Krümmungskreises, die sogenannte Krümmungsebene; ihre Gleichung ist bereits in Nro. 8) gefunden worden, nämlich

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0.$$

Diese Ebene ändert ihre Lage von Punkt zu Punkt, und man kann daher den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Berührungsebenen bestimmen. Da der Winkel zwischen zwei Ebenen derselbe ist wie der Winkel zwischen zwei auf diesen Ebenen errichteten Perpendikeln, so brauchen wir nur den Winkel zu ermitteln, welchen zwei aufeinander folgende Grenzlinien einschliessen. Die Richtungswinkel ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z der ersten Grenzlinie befriedigen die Gleichung

$$(\cos\vartheta_x)^2 + (\cos\vartheta_y)^2 + (\cos\vartheta_z)^2 = 1;$$

die zweite Grenzlinie hat andere Richtungswinkel, deren Cosinus durch $\cos\vartheta_x + \varDelta\cos\vartheta_x$, $\cos\vartheta_y + \varDelta\cos\vartheta_y$, $\cos\vartheta_z + \varDelta\cos\vartheta_z$ dargestellt werden können, und für welche die Gleichung gilt

$$(\cos\vartheta_x + \varDelta\cos\vartheta_x)^2 + (\cos\vartheta_y + \varDelta\cos\vartheta_y)^2 + (\cos\vartheta_z + \varDelta\cos\vartheta_z)^2 = 1;$$

endlich bilden die beiden Grenzlinien mit einander einen Winkel $\varDelta\omega$, dessen Cosinus durch folgende Formel bestimmt wird:

$$\cos\varDelta\omega = \cos\vartheta_x(\cos\vartheta_x + \varDelta\cos\vartheta_x) + \cos\vartheta_y(\cos\vartheta_y + \varDelta\cos\vartheta_y) + \cos\vartheta_z(\cos\vartheta_z + \varDelta\cos\vartheta_z).$$

Subtrahirt man das Doppelte dieser Gleichung von der Summe der beiden vorigen Gleichungen, so erhält man

$$2(1 - \cos\varDelta\omega) = (\varDelta\cos\vartheta_x)^2 + (\varDelta\cos\vartheta_y)^2 + (\varDelta\cos\vartheta_z)^2,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\varDelta\omega = \sqrt{(\varDelta\cos\vartheta_x)^2 + (\varDelta\cos\vartheta_y)^2 + (\varDelta\cos\vartheta_z)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\varDelta s}{\varDelta\omega} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varDelta\omega}{\frac{1}{2}\varDelta\omega} \cdot \frac{\varDelta s}{2\sin\frac{1}{2}\varDelta\omega}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\varDelta\omega}{\frac{1}{2}\varDelta\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varDelta\cos\vartheta_x}{\varDelta s}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta\cos\vartheta_y}{\varDelta s}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta\cos\vartheta_z}{\varDelta s}\right)^2}};$$

beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta\omega$ wird $Lim\,\frac{\Delta s}{\Delta\omega} = \frac{ds}{d\omega}$ und diese Grösse nennt man den **Halbmesser der zweiten Krümmung** oder den **Torsionshalbmesser**; er liegt senkrecht zum Krümmungshalbmesser und bestimmt sich durch die Formel

21) $$\varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\vartheta_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\vartheta_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\vartheta_z}{ds}\right)^2}}.$$

Differenzirt man $\cos\vartheta_x$, $\cos\vartheta_y$, $\cos\vartheta_z$, indem man ihre Werthe aus Nro. 6) nimmt und die Abkürzungen

22) $$U = YdZ - ZdY,\ V = ZdX - XdZ,\ W = XdY - YdX,$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

einführt, so findet man leicht

$$d\cos\vartheta_x = \frac{VZ - WY}{R^3},\ d\cos\vartheta_y = \frac{WX - UZ}{R^3},\ d\cos\vartheta_z = \frac{UY - VX}{R^3},$$

$$(d\cos\vartheta_x)^2 + (d\cos\vartheta_y)^2 + (d\cos\vartheta_z)^2$$
$$= \frac{(U^2 + V^2 + W^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (UX + VY + WZ)^2}{R^6};$$

zufolge der Werthe von U, V, W ist aber $UX + VY + WZ = 0$, mithin

$$(d\cos\vartheta_x)^2 + (d\cos\vartheta_y)^2 + (d\cos\vartheta_z)^2 = \frac{U^2 + V^2 + W^2}{R^4},$$

23) $$\varrho_1 = \frac{R^2\,ds}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Um U, V, W weiter zu entwickeln, berechnen wir zuerst

$$dX = dy\,d^3z - dz\,d^3y,\ dY = dz\,d^3x - dx\,d^3z,$$
$$dZ = dx\,d^3y - dy\,d^3x,$$

und leiten hieraus U, V, W nach Nro. 22) ab, indem wir zur Abkürzung setzen

24) $$S = (d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)\,dz + (d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)\,dy$$
$$+ (d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y)\,dz;$$

wir erhalten

$$U = S\,dx,\quad V = S\,dy,\quad W = S\,dz,$$
$$\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} = S\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = S\,ds,$$

mithin nach Nro. 23)

25) $$\varrho_1 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{S}.$$

Wenn für alle Punkte einer Curve die Gleichung $S = 0$ besteht, so ist $\varrho_1 = \infty$, d. h. je zwei auf einander folgende Krümmungsebenen fallen zusammen. Die Gleichung $S = 0$ spricht also die allgemeine Bedingung aus, unter welcher eine im Raume liegende Curve eben ist.

§. 27.

Tangentialebenen und Normalen an Flächen.

Die Gleichung einer Fläche kann entweder in der unentwickelten Form

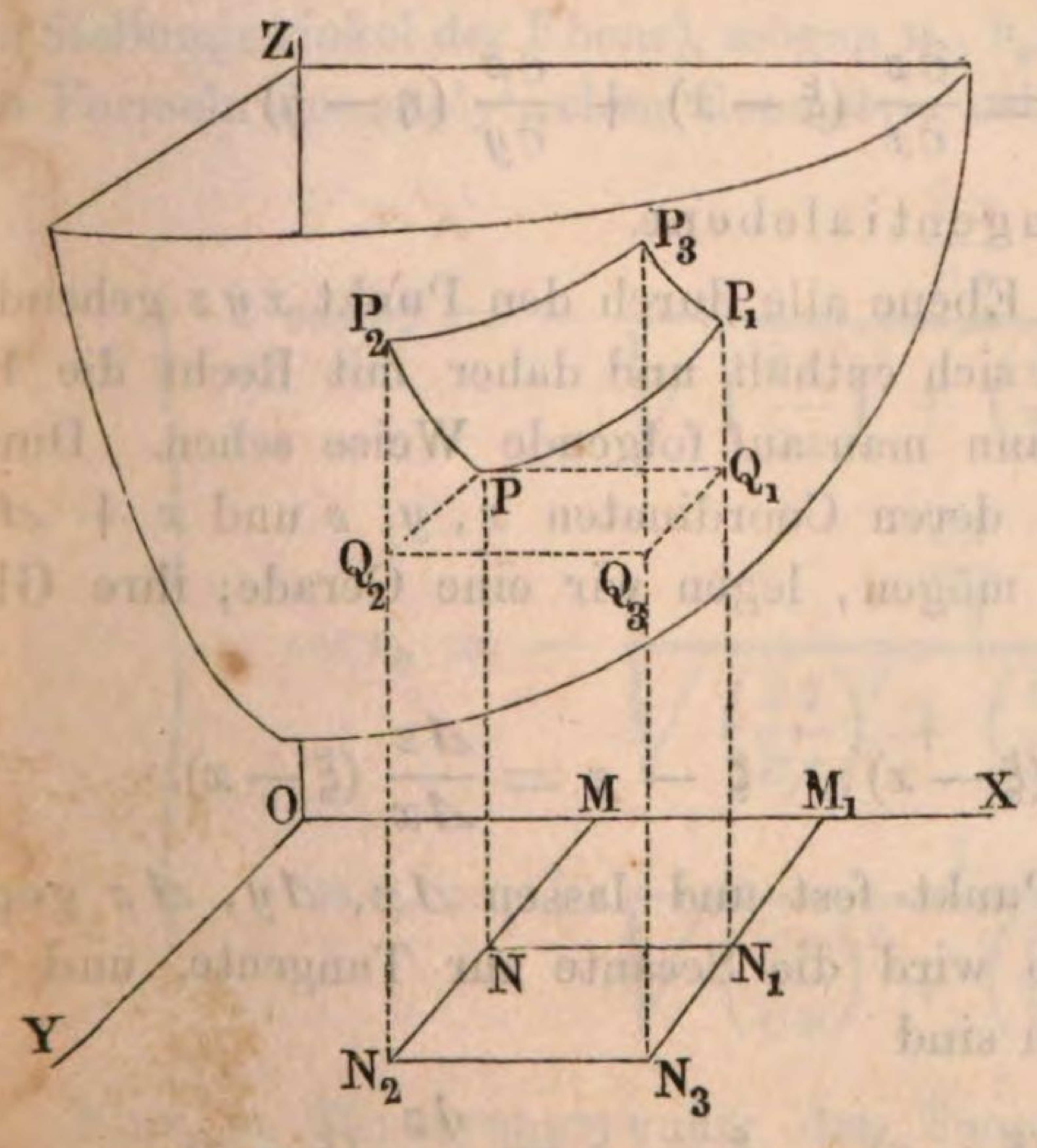
1) $$F(x, y, z) = 0$$

oder in der entwickelten Form

2) $$z = f(x, y)$$

gegeben sein, jedenfalls enthält sie zwei unabhängige Variabele, welche in Fig. 31 durch die Coordinaten $OM = x$ und $MN = y$ dargestellt sind, während die dritte Coordinate $NP = z$ von x und y abhängt. Einer partiellen Aenderung des x um $MM_1 = NN_1 = \Delta x$ entspricht eine partielle Aenderung des z, welche durch Δz_x bezeichnet werden möge; ebenso führt die partielle Aenderung des y, nämlich $NN_2 = \Delta y$, zu einer zweiten partiellen Aenderung des z, die Δz_y heissen möge. Durch die drei

Fig. 31.



Punkte P, P_1, P_2, deren Coordinaten sind

$$x, y, z; \quad x + \Delta x, y, z + \Delta z_x; \quad x, y + \Delta y, z + \Delta z_y,$$

legen wir eine Ebene, und es sei die Gleichung der letzteren

3) $$\zeta = A\xi + B\eta + C;$$

die Coefficienten A, B, C müssen dann folgende Bedingungen erfüllen

4)
$$z = Ax + By + C,$$
$$z + \Delta z_x = A(x + \Delta x) + By + C,$$
$$z + \Delta z_y = Ax + B(y + \Delta y) + C.$$

Hieraus erhält man leicht

$$A = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}, \quad B = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}, \quad C = z - \frac{\Delta z_x}{\Delta x} x - \frac{\Delta z_y}{\Delta y} y,$$

mithin ist die Gleichung der Schnittebene $P P_1 P_2$

$$\zeta - z = \frac{\Delta z_x}{\Delta x} (\xi - x) + \frac{\Delta z_y}{\Delta y} (\eta - y).$$

Bei verschwindenden Δx und Δy fallen die Punkte P, P_1, P_2 in einander, die von der Ebene abgeschnittene Kappe zieht sich auf einen Punkt zusammen, die Schnittebene wird zur Berührungsebene, die partiellen Differenzenquotienten $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ gehen in die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ über, und daher ergiebt sich

5)
$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (\eta - y)$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Dass wirklich diese Ebene alle durch den Punkt xyz gehenden Tangenten der Fläche in sich enthält und daher mit Recht die Berührungsebene heisst, kann man auf folgende Weise sehen. Durch zwei Punkte der Fläche, deren Coordinaten x, y, z und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sein mögen, legen wir eine Gerade; ihre Gleichungen sind

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x} (\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x} (\xi - x).$$

Halten wir den ersten Punkt fest und lassen Δx, Δy, Δz gegen die Null convergiren, so wird die Secante zur Tangente, und die Gleichungen der letzteren sind

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx} (\xi - x).$$

Der Uebergang von einem Flächenpunkte zum anderen geschieht nun im Allgemeinen auf die Weise, dass man sowohl Δx als Δy willkührlich wählt und die entsprechende totale Aenderung des z berechnet; es ist daher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mithin auch $\frac{dy}{dx}$ eine ganz beliebige Grösse q und zwar, geometrisch betrachtet, die trigonometrische Tan-

gente des Winkels zwischen der x-Achse und der Horizontalprojection der Tangente. Andererseits hat man

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,q,$$

folglich als Gleichungen irgend einer durch den Punkt xyz gelegten Tangente

$$\eta - y = q(\xi - x), \quad \zeta - z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,q\right)(\xi - x).$$

Lässt man den Winkel zwischen der x-Achse und der Horizontalprojection der Tangente von 0^0 bis 360^0 gehen, mithin q alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man rings um den Punkt xyz herum alle Tangenten der Fläche; die Gleichung des geometrischen Ortes jener Tangenten ergiebt sich durch Elimination von q aus den beiden vorigen Gleichungen, und sie ist identisch mit der Gleichung 5).

Die Winkel, welche irgend eine auf der Tangentialebene errichtete Senkrechte mit den Coordinatenachsen einschliesst (die sogenannten Stellungswinkel der Ebene), mögen ν_x, ν_y, ν_z heissen; nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie erhält man dafür aus Nr. 5)

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\nu_x &= -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \\ \cos\nu_y &= -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \\ \cos\nu_z &= +\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \end{aligned}\right.$$

Eine im Berührungspunkte der Tangentialebene auf letzterer errichtete Senkrechte wird die Normale der Fläche genannt; ihre Richtungswinkel sind identisch mit ν_x, ν_y, ν_z und daher durch die Formeln 6) gegeben. Da ausserdem die Normale durch den Punkt xyz gehen muss, so sind ihre Gleichungen nach bekannten Regeln leicht aufzustellen; man findet

$$7)\quad \xi - x = -\frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z),$$

wobei man sich die Normale auf die Ebenen xz und yz projicirt zu denken hat.

Die in den Formeln 5), 6) und 7) vorkommenden partiellen Differentialquotienten berechnet man entweder direct aus Nro. 2) oder aus Nro. 1) nach den Formeln

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Im letzteren Falle nimmt die Gleichung der Berührungsebene folgende symmetrische Gestalt an

8) $$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

9) $$N = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

so erhält man aus Nro. 6)

10) $$\cos \nu_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{N}, \quad \cos \nu_y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N}, \quad \cos \nu_z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{N},$$

und als Gleichungen der Normale:

11) $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Passende Beispiele für alle diese Formeln bieten die Flächen zweiten Grades; bei den Flächen ohne Mittelpunkt, deren Gleichungen von der Form $z = Ax^2 + By^2$ sind, wird man sich der Formeln 5), 6) und 7) bedienen; bei den centralen Flächen, deren Gleichungen in dem Schema $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ enthalten sind, ist die Anwendung der Formeln 8) bis 11) bequemer, weil man damit Wurzelzeichen vermeidet. Für das dreiachsige Ellipsoid z. B., dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist, findet man als Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1,$$

woraus folgt, dass die Strecken, welche die Berührungsebene von den Coordinatenachsen abschneidet, der Reihe nach $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$ und $\frac{c^2}{z}$ sind.

§. 28.

Die Krümmung der Flächen.

Um die in einem bestimmten Punkte stattfindende Krümmung einer Fläche kennen zu lernen, ist es das Natürlichste, durch jenen Punkt eine Normale auf die Fläche, durch diese Normale eine Reihe von sonst beliebigen Ebenen zu legen und die Krümmungen zu untersuchen, welche die Durchschnitte dieser Ebenen und der Fläche besitzen. Dieser Gedanke lässt sich auf folgende Weise ausführen. Die Gleichungen der Normale im Punkte xyz mögen sein

1) $\xi - x + p(\zeta - z) = 0$ und $\eta - y + q(\zeta - z) = 0$,

wobei wir zur Abkürzung

2) $$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt haben; die Gleichung einer beliebigen Ebene sei

3) $$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1;$$

soll diese Ebene die Normale in sich enthalten, so muss die Gleichung 3) auch dann noch bestehen, wenn man statt ξ und η die aus Nro. 1) entnommenen Werthe einsetzt; dies giebt

$$(\gamma - \alpha p - \beta q)\,\zeta + \alpha x + \beta y + (\alpha p + \beta q)\,z = 1,$$

und diese Gleichung kann für jedes ζ nur dann erfüllt sein, wenn gleichzeitig die Beziehungen

4) $$\gamma = \alpha p + \beta q,$$

5) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

stattfinden. Die so bestimmte durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittslinie, die wir einen Normalschnitt nennen wollen; die Gleichungen desselben würde man dadurch finden, dass man erstlich in Nro. 3) x, y, z für ξ, η, ζ setzte, wodurch man auf die Gleichung 5) kommt, und dann aus dieser und der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ einmal z, das andere Mal y eliminirte. Für die Krümmung des Schnittes hat man, x als unabhängige Variabele angesehen,

6) $$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(dy\, d^2z - d^2y\, dz)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3};$$

ferner durch Differentiation der Gleichungen der Fläche und der Ebene:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = p\, dx + q\, dy,$$

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0,$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$d^2z = r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2 + q\, d^2y,$$

$$\beta\, d^2y + \gamma\, d^2z = 0,$$

wobei von folgenden Abkürzungen Gebrauch gemacht worden ist:

7) $$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Aus den obigen Gleichungen erhält man durch gewöhnliche Elimination:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + p\gamma}{\beta + q\gamma}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{p\beta - q\alpha}{\beta + q\gamma}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

8) $$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = M,$$

so findet sich für die zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M\gamma}{\beta + q\gamma}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M\beta}{\beta + q\gamma}.$$

Bevor wir diese Werthe in die Formel 6) einsetzen, bemerken wir noch folgende Transformationen:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\beta + q\gamma)^2 + (\alpha + p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2}{(\beta + q\gamma)^2}$$

wobei sich der Zähler mit Rücksicht auf $\gamma = p\alpha + q\beta$ in die Form bringen lässt:

$$\alpha^2(1 + q^2) + \beta^2(1 + p^2) + 2(\alpha p + \beta q)\gamma + (p^2 + q^2)\gamma^2 - 2\alpha\beta pq$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2) - \alpha^2p^2 - \beta^2q^2 - 2\alpha\beta pq + \gamma^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2);$$

demnach ist also

9) $$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)N^2}{(\beta + \gamma q)^2},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

10) $$N^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Man hat nun weiter

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx^3} = \frac{-\beta(\alpha+\gamma p)+\gamma(p\beta-q\alpha)}{(\beta+\gamma q)^2}M = -\frac{\alpha M}{\beta+\gamma q}$$

und zufolge der oben bestimmten zweiten Differentialquotienten von y und x:

$$\left(\frac{dy\,d^2x - dz\,d^2y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)M^2}{(\beta+\gamma q)^2}.$$

Mittelst dieses Werthes und der in Nro. 9) bemerkten Substitution erhält man für die Krümmung des Normalschnittes:

11) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M(\beta+\gamma q)^2}{N^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$

oder auch durch Elimination von $\beta + \gamma q$ aus 9) und 11):

12) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M\,dx^2}{N(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ kurz mit y', setzt für dz seinen Werth $p\,dx + q\,dy = (p+qy')\,dx$, und für M den ursprünglichen Ausdruck $r + 2sy' + ty'^2$, so hat man noch

13) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{N[1+y'^2+(p+qy')^2]}.$$

In diesem Ausdrucke für die Krümmung eines Normalschnittes sind die partiellen Differentialquotienten p, q, r, s, t von der Natur der Fläche einzig und allein abhängig, unabhängig dagegen von α, β, γ, d. h. von der Lage des Schnittes gegen die Normale oder gegen die Tangentialebene, nur y' enthält α, β, γ; denn es ist

$$y' = -\frac{\alpha+\gamma p}{\beta+\gamma q} = -\frac{\alpha+(\alpha p+\beta q)p}{\beta+(\alpha p+\beta q)q} = -\frac{1+p+\frac{\beta}{\alpha}pq}{\frac{\beta}{\alpha}(1+q^2)+pq}$$

und es hängt demnach y', mithin auch die Krümmung des Normalschnittes, von dem Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ ab. Aendert man dieses fortwährend, so dreht sich die Ebene des Normalschnittes um die Normale, zugleich erhalten y' und $\frac{1}{\varrho}$ andere Werthe und man kann demnach die Krümmung als Function von y' ansehen. Nach dem Theoreme in §. 8, I. nimmt dieselbe zu, so lange der Differentialquotient $d\left(\frac{1}{\varrho}\right):dy'$ positiv bleibt, und sie nimmt ab, so lange

er negativ ist; ein Wechsel der Krümmung findet also in dem Falle statt, wo

$$\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dy'} = 0$$

wird; durch Ausführung dieser Differentiation erhält man als Bedingung dafür

14) $$\varrho\,(s + ty') = N[y' + (p + qy')\,q].$$

Eliminirt man ϱ aus dieser und der Krümmungsgleichung, so folgt

$$\frac{r + 2\,s\,y' + t\,y'^2}{s + ty'} = \frac{1 + y'^2 + (p + qy')^2}{pq + (1 + q^2)\,y'}$$

und durch Entwickelung nach Potenzen von y':

15) $$[(1 + q^2)\,s - pqt]\,y'^2 + [(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t]\,y' + pqr - (1 + p^2)\,s = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt nun diejenigen Werthe von y', mithin auch die Werthe des Verhältnisses $\frac{\beta}{\alpha}$, für welche ein Wechsel der Krümmung, also eine grösste oder kleinste Krümmung stattfindet. Vorausgesetzt wird dabei nur, dass die Differentialquotienten p, q, r, s, t in dem Punkte xyz endliche bestimmte Werthe haben, dass also xyz keinen ausgezeichneten Punkt (wie z. B. eine Spitze) bedeutet. Die Gleichung 15) zeigt nun die Existenz von zwei Hauptnormalschnitten, deren gegenseitige Lage man dadurch erfahren kann, dass man die Gleichung vereinfacht, indem man den Punkt xyz zum Anfangspunkte der Coordinaten und die Tangentialebene im Punkte xyz zur Ebene xy nimmt. Es ist in diesem Falle $x = y = z = 0$, ferner constant $\zeta = 0$; die Gleichung der Tangentialebene wird $p\,\xi + q\,\eta = 0$ und diese kann für alle η und ζ nur bestehen, wenn $p = q = 0$ ist. Die Gleichung 15) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$y'^2 + \frac{r - t}{s}\,y' - 1 = 0,$$

welche immer zwei reelle Wurzeln besitzt. Ist nun weiter $y = x\,tan\,\omega$ die Gleichung der Spur, welche ein Hauptnormalschnitt mit der Coordinatenebene xy (der Tangentialebene) bildet, so hat man

$$y' = \frac{dy}{dx} = tan\,\omega,$$

mithin statt der vorigen Gleichung die folgende:

$$tan^2\omega + \frac{r-t}{s} tan\,\omega - 1 = 0,$$

deren Wurzeln $tan\,\omega_1$ und $tan\,\omega_2$ heissen mögen; für diese gelten die beiden Beziehungen

$$tan\,\omega_1 + tan\,\omega_2 = \frac{t-r}{s}, \quad tan\,\omega_1\, tan\,\omega_2 = -1,$$

deren letztere identisch mit der Gleichung $cos(\omega_1 - \omega_2) = 0$ ist. Daraus folgt $\omega_1 - \omega_2 = \pm \frac{1}{2}\pi$, oder mit anderen Worten, dass die Hauptnormalschnitte auf einander senkrecht stehen.

Statt der Gleichung 15) kann man auch eine quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln der grösste und kleinste Krümmungshalbmesser selbst sind; sie ergiebt sich, wenn man aus den Gleichungen 13) und 14) nicht ϱ, sondern y' eliminirt, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{N} = \lambda$$

gesetzt werden möge. Die fraglichen Gleichungen sind dann

$$\lambda(r + 2sy' + ty'^2) = 1 + y'^2 + (p + qy')^2$$
$$\lambda(s + ty') \quad = pq + (1 + q^2)y',$$

und wenn man y' aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzt, so erhält man zunächst:

$$\lambda[r(1 + q^2 - \lambda t)^2 + 2s(1 + q^2 - \lambda t)(\lambda s - pq) + t(\lambda s - pq)^2]$$
$$= (1 + p^2)(1 + q^2 - \lambda t)^2 + 2pq(1 + q^2 - \lambda t)(\lambda s - pq)$$
$$+ (1 + q^2)(\lambda s - pq)^2,$$

oder durch Reduction auf Null:

$$(1 + q^2 - \lambda t)[(1 + p^2 - \lambda r)(1 + q^2 - \lambda t) - (pq - \lambda s)^2] = 0.$$

Hier kann nun der erste Factor nicht $= 0$ sein, weil sonst der vorhin substituirte Werth von y', nämlich

$$y' = \frac{\lambda s - pq}{1 + q^2 - \lambda t}$$

unendlich oder unbestimmt (wenn zugleich der Zähler verschwände) werden würde, was Beides im Allgemeinen nicht der Fall ist. Es muss daher der zweite Factor $= 0$ gesetzt werden und dies giebt bei Entwickelung der Potenzen von λ:

$$(rt - s^2)\lambda^2 - [r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)]\lambda + 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

und vermöge des Werthes von λ und der Bedeutung von N:

16) $$(rt - s^2)\varrho^2 - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + q^2)t]N\varrho + N^4 = 0.$$

Nennen wir ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so finden zwischen dem grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser im Punkte xyz die Beziehungen statt:

$$17)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2}N,$$

$$18)\qquad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{N^4}{rt - s^2}.$$

Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte standen sowohl aufeinander als auch auf der Tangentialebene senkrecht; es liegt daher nahe, diese drei Ebenen zu Coordinatenebenen zu wählen, so dass nunmehr die vorhin betrachteten Winkel ω_1 und ω_2 die Werthe $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = \frac{1}{2}\pi$ erhalten müssen. Die Gleichung

$$tan\,\omega_1 + tan\,\omega_2 = \frac{r-t}{s}$$

wird jetzt $\infty = \frac{r-t}{s}$ und zeigt, dass für diesen Fall $s = 0$ sein muss, weil im Allgemeinen r und t endliche Werthe besitzen. Die Formel 13) wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r + ty'^2}{1 + y'^2},$$

oder wenn $y' = tan\,v$ gesetzt wird, wo v die Neigung der Ebene irgend eines Normalschnittes gegen die Ebene des ersten Hauptschnittes (ϱ_1) bezeichnet:

$$\frac{1}{\varrho} = r\,cos^2 v + t\,sin^2 v.$$

Für die Hauptschnitte ist $v = 0$ und $v = \frac{1}{2}\pi$, also

$$\frac{1}{\varrho_1} = r, \qquad \frac{1}{\varrho_2} = t,$$

mithin durch Substitution in die vorhergehende Gleichung:

$$19)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{cos^2 v}{\varrho_1} + \frac{sin^2 v}{\varrho_2}.$$

Die Gleichungen 17), 18) und 19) bestimmen vollständig die Krümmungen der verschiedenen durch einen Punkt xyz gelegten Normalschnitte; aus 17) und 18) erhält man die Krümmungen der Hauptschnitte, aus 19) die Krümmung eines beliebigen anderen Normalschnittes, welcher mit dem ersten Hauptschnitte den Winkel v bildet.

Bemerkenswerth ist noch der specielle Fall, in welchem man en x, y, z solche Werthe ertheilt, dass

20) $$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

wird; es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{rt} = \frac{p^2q^2}{s^2}, \quad \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{p^2q^2} = \frac{rt}{s^2},$$

woraus man leicht findet:

$$1 + p^2 + q^2 = N^2 = p^2q^2\,\frac{rt - s^2}{s^2}.$$

Die Gleichung 16) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$\varrho^2 - \frac{2pqN}{s}\,\varrho + \frac{p^2q^2N^2}{s^2} = 0,$$

welche die gleichen Wurzeln

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{pq}{s}\,N$$

besitzt. Aus Nro. 19) erkennt man weiter, dass jeder Normalschnitt durch diesen Punkt dieselbe Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}$ besitzt; der fragliche Punkt heisst dann ein Kreispunkt der Fläche. Durch Verbindung der zwei in Nro. 20) aufgestellten Gleichungen mit der Gleichung der Fläche erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z.

Besitzen die Krümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ der beiden Hauptschnitte dasselbe Vorzeichen, so kommt dieses auch der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ jedes anderen durch denselben Punkt gelegten Normalschnittes zu, wie man aus Nro. 19) augenblicklich ersieht. Dann kehren sämmtliche Normalschnitte des Punktes ihre convexen Seiten derselben Gegend des Raumes zu und die Berührungsebene liegt gänzlich auf der einen Seite der Fläche. Wenn dagegen ϱ_1 und ϱ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist (nach derselben Gegend des Raumes hin) der eine Hauptschnitt convex, der andere concav, und die Krümmung wechselt zwischen beiden Schnitten ihr Zeichen; die Tangentialebene liegt in diesem Falle nicht auf einer Seite der Fläche, sondern schneidet dieselbe in ihrem späteren Verlaufe. Eine derartige Fläche entsteht z. B. durch Umdrehung einer ebenen Curve, die der Drehungsachse ihre convexe Seite zuwendet.

Ausser den obigen zwei Gattungen von Flächen, welche die Namen der concav-concaven und der convex-concaven Flächen führen,

giebt es noch eine dritte Art, welche den Uebergang von der einen zur anderen Gattung bildet; es sind dies die Flächen, an denen der eine Hauptschnitt in jedem Punkte die Krümmung Null besitzt, d. h. eine gerade Linie ist. Da in jedem Falle die Tangentialebene die Tangenten der Normalschnitte, also auch die Tangente des geradlinigen Normalschnittes enthält, so ist unmittelbar klar, dass den genannten Flächen die Eigenschaft zukommt, von einer Ebene nicht nur in einem Punkte, sondern in einer Geraden berührt zu werden. Nennen wir $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ die Krümmung einer Fläche, so ist für diese Flächen die Krümmung gleich Null; als analytisches Kennzeichen dafür ergiebt sich aus Nr. 18) $rt - s^2 = 0$, oder:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0.$$

Die durch diese Gleichung charakterisirten Flächen sind übrigens sämmtlich abwickelbar, und darin unterscheiden sie sich geometrisch von den vorigen Flächenarten. Weitere Auseinandersetzungen hierüber gehören in die höhere Geometrie.

§. 29.

Einhüllende Curven.

In der Gleichung einer ebenen krummen Linie kommen ausser den Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes gewöhnlich noch constante Grössen (sogenannte Parameter) vor, wodurch sich die Dimensionen, Gestalt oder Lage der Linie bestimmen; eine solche Constante sei h und

1) $$F(x, y, h) = 0$$

die Gleichung der betreffenden Curve. Giebt man dem h verschiedene Werthe δ, 2δ, 3δ, 4δ etc., so erhält man eine Reihenfolge von Curven derselben Art, die sich aber in ihren Dimensionen, Gestalten oder Lagen von einander unterscheiden. Hierbei kann es geschehen, dass jede solche Curve die nächste schneidet, und in diesem Falle entsteht die Frage nach dem geometrischen Orte der Durchschnittspunkte. Nennen wir k irgend einen individuellen Werth des h, und $k + \delta$ den nächsten Werth von h, so gelten für den Durchschnitt der beiden entsprechenden Curven gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$F(x, y, k) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y, k + \delta) = 0$$

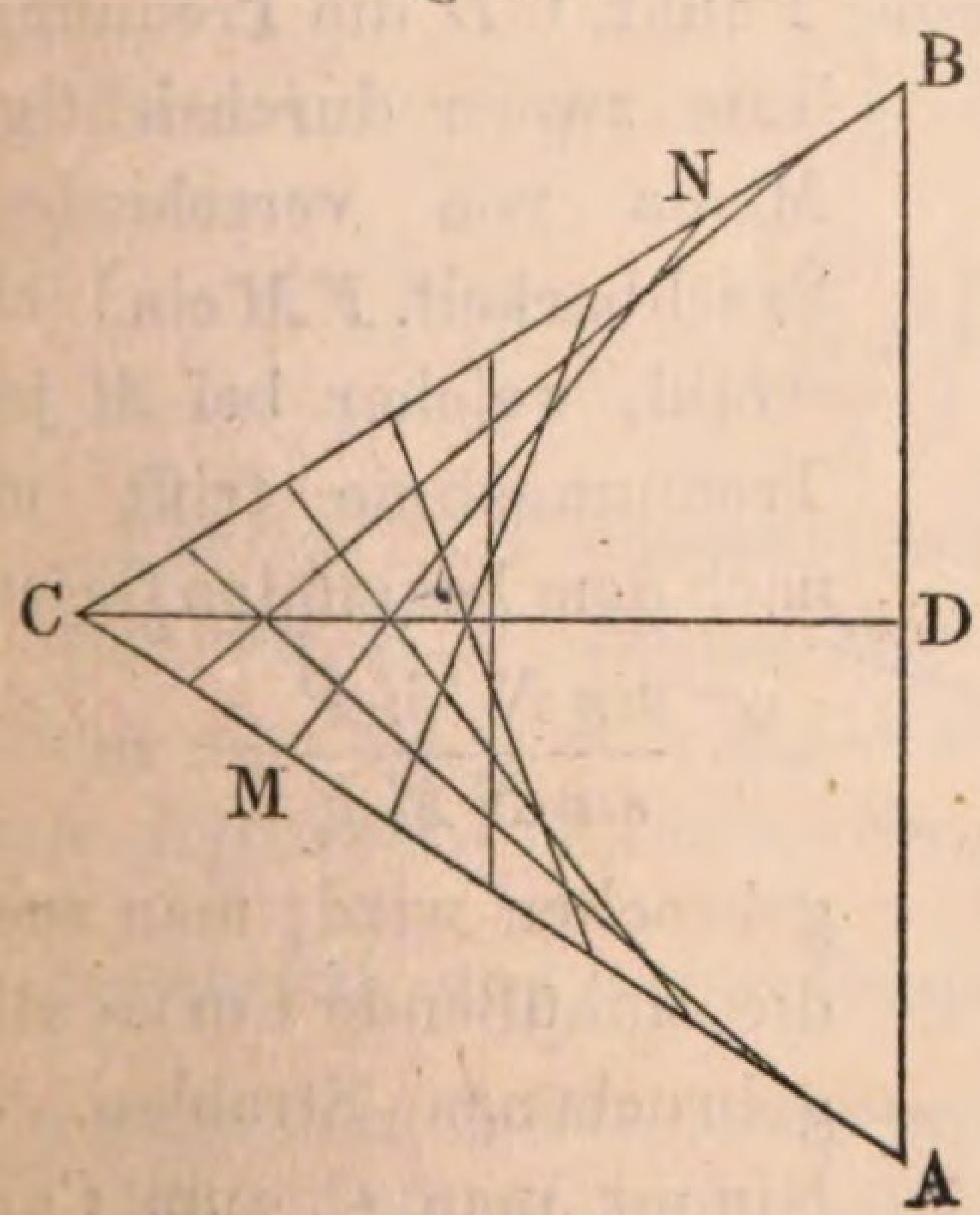
oder auch

$$2) \qquad F(x, y, k) = 0 \text{ und } \frac{F(x, y, k + \delta) - F(x, y, k)}{\delta} = 0;$$

die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes findet sich nun durch Elimination von k aus diesen beiden Gleichungen und würde von der Form $f(x, y, \delta) = 0$ sein. Lassen wir δ gegen die Null convergiren, so folgen die anfangs genannten Curven stetig aufeinander und die Grenzgleichung $f(x, y) = 0$ bestimmt den geometrischen Ort ihrer gleichfalls continuirlich aufeinander folgenden Durchschnittspunkte. Dieser geometrische Ort heisst die einhüllende Curve jener Schaar von Linien; ihre Gleichung ergiebt sich durch Elimination von k aus den beiden Gleichungen

$$3) \qquad F(x, y, k) = 0 \text{ und } \frac{\partial F(x, y, k)}{\partial k} = 0.$$

Fig. 32.



I. Das erste Beispiel hierzu mag etwas ausführlicher betrachtet werden. In einem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Figur 32), dessen Schenkel $AC = BC = c$ sein mögen, zieht man die Geraden MN so, dass immer $CM = BN$ ist; man sucht die Einhüllende aller dieser Geraden. Nehmen wir AC als Abscissen-, BC als Ordinatenachse und setzen

$$CM = BN = k,$$

so sind die Gleichungen zweier solchen Geraden

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{c-k} = 1, \qquad \frac{x}{k+\delta} + \frac{y}{c-(k+\delta)} = 1,$$

oder auch, wenn man die Brüche wegschafft, die zweite Gleichung von der ersten abzieht und mit δ dividirt,

$$(c-k)\,x + ky = k(c-k),$$
$$2k - c - x + y + \delta = 0.$$

Der zweiten Gleichung kann man den Werth von k entnehmen und in die erste substituiren; die Gleichung des gesuchten Ortes lautet dann

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 - \delta^2 = 0,$$

und bestimmt eine Parabel, auf welcher die Durchschnitte aller Geraden liegen, welche dadurch entstehen, dass M und N jedesmal um δ fortrücken. Für stetig nach einander folgende Gerade hat man daher als Gleichung der einhüllenden Curve

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0$$

oder

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}.$$

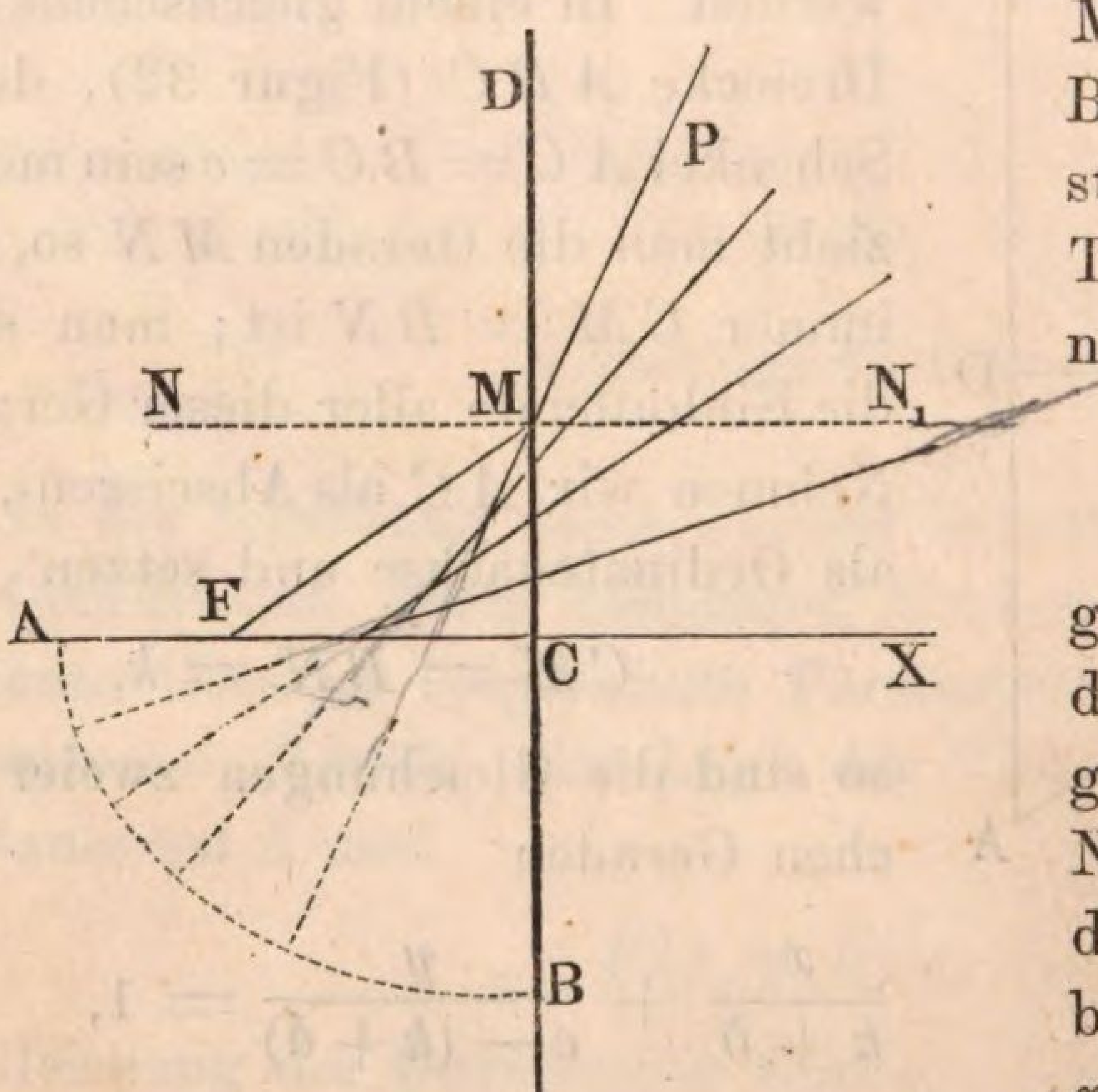
Dasselbe findet man unmittelbar, wenn man k aus den Gleichungen

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{c-k} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{x}{k^2} + \frac{y}{(c-k)^2} = 0$$

eliminirt*). Beiläufig werde noch bemerkt, dass der Scheitel dieser Parabel in der Mitte der Dreieckshöhe CD liegt, dass sie von AC und BC berührt wird, und dass ihr Halbparameter $= \frac{\overline{BD^2}}{CD}$ ist.

II. In Fig. 33 sei F ein leuchtender Punkt, CD die Trennungslinie zweier durchsichtigen Media von verschiedener Brechbarkeit, FM ein Lichtstrahl, welcher bei M jene Trennungslinie trifft und nach dem bekannten Gesetze

Fig. 33.



$$\frac{\sin N_1 MP}{\sin NMF} = m$$

gebrochen wird; man sucht die einhüllende Curve aller gebrochenen Strahlen. — Nimmt man C zum Coordinatenanfang, den ungebrochenen Strahl CX zur x-Achse, CD zur y-Achse und setzt $FC = c$, $CM = k$, $1 - m^2 = n^2$, so ist die Gleichung irgend eines gebrochenen Strahles MP

*) Man ersieht hieraus sehr klar die Bedeutung des Differentiales. Denkt man sich nämlich die verschiedenen Punkte M in gleichen Abständen, so ist δ ein aliquoter Theil von c, etwa $\delta = \frac{c}{n}$; andererseits muss δ, insofern es einen Zuwachs von k darstellt, mit Δk bezeichnet

$$y = \frac{mk}{\sqrt{c^2 + n^2 k^2}} x + k$$

oder

4) $$m^2 k^2 x^2 - (c^2 + n^2 k^2)(y - k)^2 = 0.$$

Partiell in Beziehung auf k differenzirt giebt dies

5) $$m^2 k x^2 + (c^2 + n^2 k^2)(y - k) - n^2 k (y - k)^2 = 0;$$

multiplicirt man dies mit k und subtrahirt von dem Producte die Gleichung 4), so lässt sich der Rest mit $y - k$ dividiren und bleibt

$$c^2 y + n^2 k^3 = 0 \quad \text{oder} \quad k = -\sqrt[3]{\frac{c^2 y}{n^2}};$$

multiplicirt man dagegen Nr. 5) mit $y - k$ und addirt Nr. 4), so kommt

$$m^2 x^2 y - n^2 (y - k)^3 = 0 \quad \text{oder} \quad y - k = \sqrt[3]{\frac{m^2 x^2 y}{n^2}}.$$

Indem man hierzu den vorigen Werth von k addirt, erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve

$$y = -\sqrt[3]{\frac{c^2 y}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{m^2 x^2 y}{n^2}}$$

oder

6) $$\left(\frac{mx}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Für $m > 1$ charakterisirt diese Gleichung die Evolute einer Ellipse, für $m < 1$ eine Hyperbelevolute; die gebrochenen Strahlen stehen also im ersten Falle auf einer Ellipse, im zweiten Falle auf einer Hyperbel senkrecht. In jedem Falle ist F ein Brennpunkt des Kegelschnitts und seine Hauptthalbachse $= mc$ oder $= \frac{c}{\mu}$, wenn μ den sogenannten Brechungsexponenten bezeichnet.

III. Man sucht die einhüllende Curve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Peripherien durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen. Nimmt man die Achsen der Ellipse $CA = a$, $CB = b$ (Fig. 34 a. f. S.) zu Coordinatenachsen und bezeichnet die Coordinaten eines Ellipsenpunktes mit p und q, sowie mit r den Radius eines Kreises, welcher pq zum Mittelpunkte hat und durch C geht, so gelten, den angegebenen Bedingungen gemäss, folgende Gleichungen:

werden, und es ist daher $\Delta k = \frac{c}{n}$. Bei unendlich wachsenden n, d. h. bei stetiger Aufeinanderfolge der Punkte M, convergirt Δk gegen den asymptotischen Werth Null und in diesem Falle tritt dk an die Stelle von Δk.

$$7)\qquad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1,$$

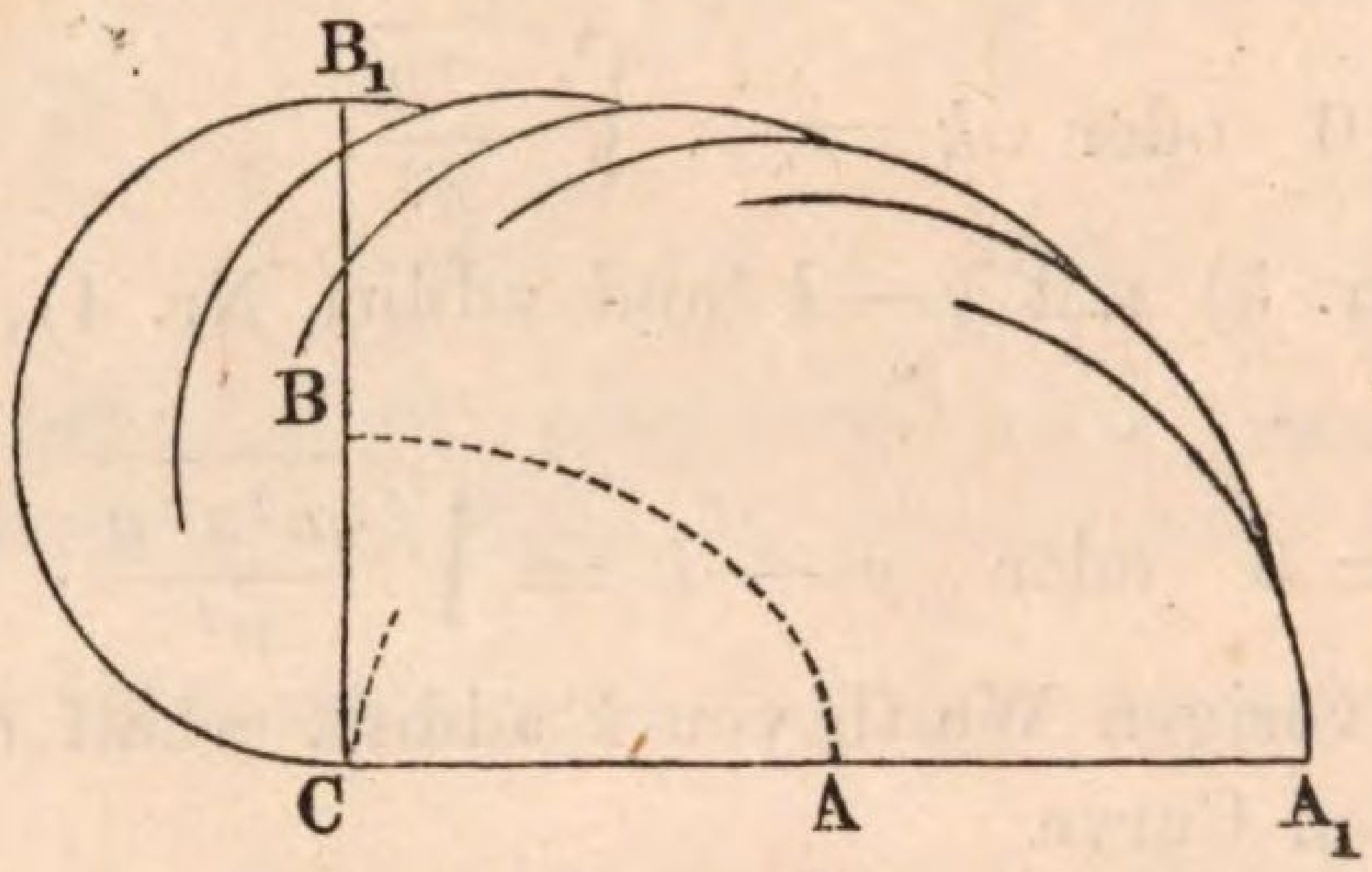
$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

$$p^2+q^2=r^2;$$

aus den beiden letzten folgt

$$8)\qquad x^2+y^2-2px-2qy=0.$$

Fig. 34.



Der veränderliche Parameter ist hier p, und für q wäre sein Werth aus Nro. 7) zu substituiren, doch bleibt die Rechnung symmetrischer, wenn man die zwei Gleichungen 7) und 8) mit p und q beibehält. Durch partielle Differentiation derselben erhält man

$$\frac{p}{a^2}+\frac{q}{b^2}\frac{\partial q}{\partial p}=0,\qquad x+y\frac{\partial q}{\partial p}=0,$$

und nach Elimination von $\dfrac{\partial q}{\partial p}$

$$9)\qquad \frac{py}{a^2}-\frac{qx}{b^2}=0.$$

Aus den Gleichungen 7) und 9) finden sich p und q, und wenn man deren Werthe in Nro. 8) substituirt, so ergiebt sich

$$10)\qquad (x^2+y^2)^2=(2a)^2x^2+(2b)^2y^2$$

als Gleichung der gesuchten Curve; letztere ist die Fusspunktlinie einer aus den Halbachsen $2a$ und $2b$ construirten Ellipse.

IV. Die Modification des allgemeinen Verfahrens, welche im letzten Beispiele benutzt wurde, kann allgemein auf folgende Weise dargestellt werden. Die Gleichung der veränderlichen Curve sei

$$11)\qquad F(x,y,\varkappa,\lambda)=0$$

und enthalte zwei veränderliche Parameter $\varkappa$ und λ, welche aber nicht von einander unabhängig, sondern durch die Bedingungsgleichung

$$12)\qquad \varphi(\varkappa,\lambda)=0$$

verbunden sein mögen. Das Nächstliegende wäre nun, erst λ aus 11) und 12) zu eliminiren und dann partiell in Beziehung auf $\varkappa$ zu differenziren; man kann aber auch den umgekehrten Weg gehen,

wenn man die Aenderung beachtet, welche λ in Folge der Aenderung von $\varkappa$ erleidet. Aus Nro. 11) folgt nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} = 0,$$

andererseits ist nach Nro. 12)

$$\frac{d\lambda}{d\varkappa} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung substituirt, so erhält man

$$13)\qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}.$$

Durch Elimination von $\varkappa$ und λ aus den drei Gleichungen 11), 12) und 13) gelangt man wieder zur Gleichung der einhüllenden Curve.

§. 30.

Einhüllende Flächen.

I. Die im Eingange von §. 29 angestellten Betrachtungen sind fast wörtlich auf den Fall ausdehnbar, wo die einhüllende Fläche einer Schaar von Flächen gesucht wird, welche dadurch entstehen, dass man in der Flächengleichung

$$F(x, y, z, \varkappa) = 0$$

der Constanten $\varkappa$ stetig aufeinander folgende verschiedene Werthe beilegt; die Gleichung der einhüllenden Fläche ergiebt sich nämlich, indem man aus den Gleichungen

$$1)\qquad F(x, y, z, \varkappa) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, z, \varkappa)}{\partial \varkappa} = 0$$

die Grösse $\varkappa$ eliminirt.

Lässt man z. B. den Mittelpunkt einer Kugelfläche auf der z-Achse fortrücken und gleichzeitig den Radius proportional dem Abstande des Centrums vom Coordinatenanfange wachsen, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + (z - \varkappa)^2 = (q\varkappa)^2;$$

partiell in Beziehung auf $\varkappa$ differenzirt giebt dies

$$-(z-\varkappa) = q^2 \varkappa$$

und durch Elimination von $\varkappa$ findet sich

$$x^2 + y^2 = \frac{q^2}{1-q^2} z^2$$

als Gleichung der einhüllenden Fläche. Für $q^2 < 1$ ist letztere ein Rotationskegel, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt, und dessen Seite mit der Achse den Winkel $\arcsin q$ einschliesst.

Auch in dem Falle, wo die Gleichung der gegebenen Fläche zwei Parameter enthält und letztere einer bestimmten Bedingung genügen müssen, kommt man wieder auf ähnliche Erörterungen, wie in Nro. IV. des vorigen Paragraphen; aus den gegebenen Gleichungen

$$2) \qquad F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\varkappa, \lambda) = 0$$

folgt nämlich durch Differentiation

$$3) \qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda}},$$

und nachher sind $\varkappa$ und λ aus allen drei Gleichungen zu eliminiren.

Endlich kann es auch vorkommen, dass die gegebene Flächengleichung drei veränderliche Parameter enthält, welche an zwei Bedingungen gebunden sind, dass also folgende drei Gleichungen vorliegen

$$4) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, \varkappa, \lambda, \mu) = 0, \\ \varphi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0, \qquad \psi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0. \end{cases}$$

In diesem Falle sind λ und μ implicite Functionen von $\varkappa$ und daher führt die Aenderung von $\varkappa$ zu den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen bestimmen $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \varkappa}$ und $\dfrac{\partial \mu}{\partial \varkappa}$; setzt man deren Werthe in die erste Differentialgleichung ein, so geht diese über in

$$5)\quad \frac{\partial F}{\partial \varkappa}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \mu}-\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)+\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa}-\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}-\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa}\right)=0,$$

und die Gleichung der einhüllenden Fläche ergiebt sich nun durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus den vier Gleichungen 4) und 5).

II. Bei den vorigen Untersuchungen wurde immer nur ein Parameter ($\varkappa$) als willkührlich betrachtet, denn in den Fällen, wo mehre Parameter vorkamen, waren auch soviel Bedingungsgleichungen vorhanden, dass die übrigen Parameter als implicite Functionen von $\varkappa$ gelten mussten. Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Gleichung der Fläche zwei von einander unabhängige Parameter enthält, die sich gleichzeitig ändern.

Die gegebene Gleichung sei

$$6)\qquad F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0,$$

und es werde zunächst $\varkappa$ allein um δ geändert; die neue Gleichung

$$F(x, y, z, \varkappa+\delta, \lambda) = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$7)\qquad \frac{F(x, y, z, \varkappa+\delta, \lambda) - F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\delta} = 0,$$

charakterisirt dann eine zweite Fläche derselben Art, nur von anderer Lage und von anderen Dimensionen. Dasselbe gilt für den Fall, dass λ allein um ε geändert wird, wodurch die Gleichung entsteht

$$8)\qquad \frac{F(x, y, z, \varkappa, \lambda+\varepsilon) - F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\varepsilon} = 0.$$

Im Allgemeinen schneiden sich die drei Flächen, welche den Gleichungen 6), 7), 8) correspondiren, in einem Punkte xyz, und wenn man aus jenen Gleichungen die beiden Grössen $\varkappa$ und λ eliminirt, so gelangt man zur Gleichung des geometrischen Ortes aller Durchschnittspunkte, vorausgesetzt, dass sich $\varkappa$ jedesmal um $\Delta\varkappa = \delta$, und λ immer um $\Delta\lambda = \varepsilon$ ändert. Bei gleichzeitig gegen die Null convergirenden δ und ε folgen die erwähnten Durchschnittspunkte stetig aufeinander und erzeugen die einhüllende Fläche. Die Gleichung der letzteren wird demnach gefunden, wenn man aus den Gleichungen

$$9)\quad \begin{cases} F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa} = 0, \qquad \dfrac{\partial F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

die beiden veränderlichen Parameter $\varkappa$ und λ eliminirt.

Beispielweis suchen wir die einhüllende Fläche aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem elliptischen Paraboloid liegen, und deren Oberflächen durch den Scheitel des Paraboloides gehen. Nennen wir a, b die Halbparameter des Paraboloides, und $\varkappa$, λ, μ die Coordinaten des Mittelpunktes irgend einer jener Kugeln, so haben wir als Gleichung der beweglichen Fläche

$$(x-\varkappa)^2 + (y-\lambda)^2 + (z-\mu)^2 = \varrho^2,$$

wobei noch die Bedingungen zu erfüllen sind:

$$\mu = \frac{\varkappa^2}{2a} + \frac{\lambda^2}{2b}, \qquad \varrho^2 = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2.$$

Setzt man die Werthe von ϱ^2 und μ in die erste Gleichung ein, so wird letztere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varkappa x - 2\lambda y - \left(\frac{\varkappa^2}{a} + \frac{\lambda^2}{b}\right) z = 0;$$

durch partielle Differentiationen in Beziehung auf $\varkappa$ und λ ergiebt sich

$$x + \frac{\varkappa}{a} z = 0, \qquad y + \frac{\lambda}{b} z = 0,$$

und durch Elimination von $\varkappa$ und λ

$$(x^2 + y^2 + z^2) z + a x^2 + b y^2 = 0.$$

Die einhüllende Fläche ist hier dieselbe wie die Fusspunktfläche eines elliptischen Paraboloides mit doppelten Parametern *). Für das hyperbolische Paraboloid gilt ein analoger Satz.

Wir wollen noch den Fall betrachten, wo die Gleichung der gegebenen Fläche drei Parameter $\varkappa$, λ, μ enthält, welche an eine bestimmte Bedingung gebunden sind. Man hat jetzt zwei Gleichungen

$$10) \qquad F(x, y, z, \varkappa, \lambda, \mu) = 0, \qquad \varphi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$$

und könnte hieraus (wie im vorigen Beispiele) μ eliminiren, um nur zwei von einander unabhängige Parameter übrig zu behalten. Dagegen wird die Rechnung eleganter, wenn man diese Elimination bis zuletzt aufspart und berücksichtigt, dass μ eine implicite Function von $\varkappa$ und λ ist. Durch partielle Aenderung von $\varkappa$ erhält man nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa} = 0$$

mithin, wenn man den Werth von $\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa}$ aus der zweiten Gleichung

*) Siehe des Verfassers Analytische Geometrie des Raumes, S. 239.

in die erste einsetzt,

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} = 0.$$

Die partielle Aenderung von λ führt zu der analogen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0;$$

beide Differentialgleichungen können in der Form

$$11)\qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \mu}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}$$

zusammengefasst werden, und man findet nun die Gleichung der einhüllenden Fläche durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus Nro. 10) und 11).

Beispielweis suchen wir die einhüllende Fläche aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegen, und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehen. Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoides, $\varkappa$, λ, μ die Coordinaten eines Kugelcentrums, so hat man als Gleichung der beweglichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varkappa x - 2\lambda y - 2\mu z = 0,$$

wobei $\varkappa$, λ, μ der Bedingung

$$\frac{\varkappa^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0$$

genügen müssen. Die Gleichungen 11) sind hier

$$\frac{a^2 x}{\varkappa} = \frac{b^2 y}{\lambda} = \frac{c^2 z}{\mu}$$

und durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ ergiebt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2).$$

Die einhüllende Fläche ist demnach die Fusspunktfläche für ein aus den doppelten Achsen construirtes Ellipsoid. Für die übrigen centralen Flächen zweiten Grades gelten analoge Sätze.

Cap. IV.

Die vieldeutigen Symbole.

§. 31.

Die Formen $\frac{0}{0}$ und $\infty - \infty$.

I. Wenn die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen speciellen Werth von x, etwa für $x = a$, gleichzeitig Null werden, so nimmt der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in diesem besonderen Falle die Form $\frac{0}{0}$ an, die bekanntlich vieldeutig ist. Um den wahren Werth dieses Bruches zu finden, betrachten wir den Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ als die Grenze, welcher sich $\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)}$ bei verschwindenden δ nähert. Wegen der Voraussetzung $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ ist nun

$$\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)} = \frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\psi(a+\delta) - \psi(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\delta}}{\dfrac{\psi(a+\delta) - \psi(a)}{\delta}},$$

und hieraus folgt durch Uebergang zur Grenze für verschwindende δ

1) $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

d. h. in dem besonderen Falle $x = a$, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich annulliren, werden die sonst sehr verschiedenen Quotienten $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ und $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ einander gleich. Kann man also

den Werth des zweiten Quotienten ermitteln, so hat man auch den des ersten. Einige Beispiele werden dies zeigen.

Der Quotient

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

nimmt für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an; hier ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

und da dieser Bruch für $x = a$ den bestimmten Werth $\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{6}}$ erhält, so ist auch

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{2}{3}a^{-\frac{1}{6}}.$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird der Bruch

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$$

unbestimmt $= \frac{0}{0}$, dagegen erhält

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\sin x}{1}$$

in demselben Falle den bestimmten Werth 1, der nun auch dem ersten Bruche zukommt.

Nicht selten trifft es sich, dass der neue Quotient $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x = a$ gleichfalls verschwindet; dann muss man auf ihn wieder dasselbe Verfahren anwenden. Nehmen wir z. B.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x - \sin x}{x^3},$$

so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{\sin x}{6x}, \quad \frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{\cos x}{6};$$

für $x = 0$ verschwinden $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ sowie $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, und daher giebt erst der letzte Quotient den wahren Werth des ursprünglichen Bruches $= \frac{1}{6}$.

II. Wenn die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält die Differenz $F(x) - f(x)$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$; ihr wahrer Werth findet sich dann auf folgende Weise. Man setze

$$\frac{1}{F(x)} = F_1(x), \quad \frac{1}{f(x)} = f_1(x),$$

so ist identisch

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{F_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - F_1(x)}{F_1(x) f_1(x)};$$

für $x = a$ verschwinden $F_1(x)$ und $f_1(x)$, mithin geht der letzte Bruch in $\frac{0}{0}$ über und kann nach der vorigen Regel untersucht werden.

So ist z. B.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

wobei die linke Seite für $x = 0$ die Form $\infty - \infty$ annimmt, und die rechte Seite $= \frac{0}{0}$ wird. Setzen wir

$$\varphi(x) = e^x - 1 - x, \quad \psi(x) = x(e^x - 1)$$

so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{1}{x + 2},$$

und hier liefert der letzte Bruch den wahren Werth $= \frac{1}{2}$.

§. 32.

Die Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞.

I. Wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so stellt sich in diesem Falle der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahrer Werth q auf folgende Weise ermittelt werden kann. Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

der neue Quotient erhält für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ und kann daher nach der Regel des vorigen Paragraphen behandelt werden. Dies giebt

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2$$

und für $x = a$, wo $\frac{f(a)}{F(a)}$ den Werth q annimmt,

$$q = \frac{F'(a)}{f'(a)} q^2 \text{ oder } q = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Die Regel zur Bestimmung des wahren Werthes eines vieldeutigen Bruches bleibt also bei der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe wie bei der Form $\frac{0}{0}$.

So wird z. B. der Quotient

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\log x}{\cot x}$$

für $x = 0$ unbestimmt $= \frac{\infty}{\infty}$; sein wahrer Werth ist dann einerlei mit dem Werthe von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{M}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -M \frac{\sin x}{x} \sin x,$$

welcher in jenem Falle $= -M \cdot 1 \cdot 0 = 0$ ist.

Nach derselben Regel findet man auch, dass der Bruch

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{l \sin x}{l x}$$

für $x = 0$ denselben Werth erlangt wie

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\cot x}{\frac{1}{x}} = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}},$$

und zwar ist dieser Werth $= 1$.

II. Sind zwei Functionen vorhanden, von denen die eine $\varphi(x)$ für $x = a$ verschwindet, während die andere $f(x)$ für $x = a$ unendlich wird, so nimmt das Product $\varphi(x) \cdot f(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an; den wahren Betrag desselben kann man auf zweierlei Weise finden. Entweder setzt man

$$\frac{1}{f(x)} = \psi(x)$$

und hat dann

$$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

für $x = a$ wird der Quotient $= \frac{0}{0}$ und gestattet die in §. 31 angegebene Behandlung. Oder man setzt

$$\frac{1}{\varphi(x)} = F(x)$$

mithin
$$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{f(x)}{F(x)};$$
der Quotient stellt sich dann unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ und ist nach I. zu beurtheilen. Von beiden Methoden wählt man im concreten Falle diejenige, welche die wenigste Rechnung verursacht.

So wird man z. B. an die Stelle des Productes
$$l\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot \tan \frac{\pi x}{2a},$$
welches für $x = a$ in $0 \cdot \infty$ übergeht, den Quotienten
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{l\left(2 - \frac{x}{a}\right)}{\cot \frac{\pi x}{2a}}$$
treten lassen, weil der Differentialquotient des Logarithmus eine einfache algebraische Function ist; man erhält
$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{1}{2a - x}}{-\frac{\pi}{2a} \cdot \csc^2 \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2a}}{2a - x},$$
und für $x = a$ den wahren Werth $\frac{2}{\pi}$.

Bei dem Producte
$$\tan x \,.\, \log x\,, \text{ für } x = 0,$$
ist es von Vortheil, die Form
$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\log x}{\cot x}$$
zu wählen, deren wahrer Werth bereits in Nro. I. bestimmt und $= 0$ gefunden wurde; demnach verschwindet jenes Product gleichzeitig mit x.

III. Wenn ein Ausdruck von der Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der vieldeutigen Gestalten 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt, so beachte man zunächst die identische Gleichung
$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{l f(x) \cdot \varphi(x)}$$
und untersuche das Product $l f(x) \,.\, \varphi(x)$; ist w der wahre Werth desselben, so geht die gegebene Function in e^w über.

So erhält z. B. der Ausdruck
$$(\sin x)^{\frac{1}{l x}}$$

für $x = 0$ die Form 0^0; schreibt man aber statt desselben die gleichgeltende Exponentialgrösse

$$\left(e^{l\sin x}\right)^{\frac{1}{lx}} = e^{\frac{l\sin x}{lx}},$$

so hat man im Exponenten den nämlichen Bruch, dessen Werth in Nro. I. untersucht und $= 1$ gefunden wurde; der Werth der ursprünglichen Potenz ist also $= e^1 = e$.

Für $x = 0$ wird ferner

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \infty^0;$$

beachtet man aber die identische Gleichung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{-\,lx\,.\,\tan x}$$

und erinnert sich, dass $lx\,.\,\tan x$ für $x = 0$ verschwindet (s. II.), so erhält man $e^0 = 1$ als wahren Werth der in Rede stehenden Potenz.

Für $x = a$ verwandelt sich der Ausdruck

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}.$$

in 1^∞; andererseits ist die gegebene Function gleich

$$e^{l\left(2-\frac{x}{a}\right)\,.\,\tan\frac{\pi x}{2a}},$$

wobei der Exponent für $x = a$ den Werth $\frac{2}{\pi}$ annimmt (s. II.); demnach ergiebt sich $e^{\frac{2}{\pi}}$ als wahrer Werth des ursprünglichen Ausdrucks.



Cap. V.

Maxima und Minima.

§. 33.

Maxima und Minima der Functionen einer Variabelen.

Wenn eine stetige Function $f(x)$ abwechselnd steigt und fällt, so giebt es in ihrem Verlaufe Stellen, wo die Uebergänge von Wachsthum zu Abnahme oder umgekehrt von Abnahme zu Wachsthum statt finden. Bei einem Uebergange der ersten Art, welcher etwa für $x = a$ eintreten möge, ist der entsprechende Functionswerth $f(a)$ grösser als die Nachbarwerthe $f(a - h)$ und $f(a + h)$, sobald nur h hinreichend klein genommen wird; dann heisst $f(a)$ ein Maximum der Function $f(x)$. Erfolgt dagegen an der Stelle $x = a$ ein Uebergang von Abnahme zu Wachsthum, so ist $f(a)$ kleiner als seine Nachbarwerthe $f(a - h)$ und $f(a + h)$, und dann heisst $f(a)$ ein Minimum von $f(x)$. Nach dieser Erklärung versteht es sich von selbst, dass derartige Maxima und Minima nur relativ sind und nicht immer den absolut grössten oder absolut kleinsten Werth der Function darstellen.

Für welche Werthe von x dergleichen Maxima und Minima eintreten, das entscheidet sich durch ein früheres Theorem (§. 8, I.), demzufolge die Function $f(x)$ wächst oder abnimmt je nachdem ihre Derivirte $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Aendert sich nun $f'(x)$ continuirlich, so kann der Uebergang von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werthen der Derivirten $f'(x)$ nur mittelst Durchganges durch Null geschehen; die Werthe von x, welche $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind also Wur-

zeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Dies bedeutet geometrisch, dass die Tangente an jedem Culminationspunkte einer Curve parallel zur Abscissenachse liegt.

Hat man die Gleichung $f'(x) = 0$ aufgelöst, so bedarf es noch der Entscheidung, ob die gefundenen Werthe von x Maxima oder Minima der Function liefern. Zu diesem Zwecke erinnern wir an die in §. 18 bewiesene Gleichung

$$\frac{f(a+h) - f(a) - h\,f'(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a + \vartheta h),$$

woraus bei verschwindenden h folgt

$$Lim \frac{f(a+h) - f(a) - h f'(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a).$$

Im vorliegenden Falle ist a eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, mithin $f'(a) = 0$ und

$$Lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a)$$

ebenso, wenn man $-h$ an die Stelle von h treten lässt,

$$Lim \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a).$$

Ist nun $f''(a)$ positiv, so müssen bei hinreichend kleinen h die beiden Quotienten

$$1)\qquad \frac{f(a+h) - f(a)}{h^2}, \qquad \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2}$$

positiv sein und es bleiben, wenn h gegen die Null convergirt, weil ausserdem der gemeinschaftliche Grenzwerth jener Quotienten nicht positiv werden könnte; hieraus folgt

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h),$$

mithin ist $f(a)$ ein Minimum. Wenn dagegen $f''(a)$ einen negativen Werth hat, so müssen bei hinreichend kleinen h die unter Nro. 1) angegebenen Quotienten negativ sein und bleiben; daraus folgt

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h)$$

d. h. $f(a)$ ist ein Maximum. Die Entscheidung besteht also darin, dass $f(a)$ ein Minimum oder Maximum ist je nachdem $f''(a)$ positiv oder negativ ausfällt. Geometrisch heisst dies: ein Minimum kann nur auf einem convexen Bogen, ein Maximum nur auf einem concaven Bogen vorkommen.

Das angegebene Criterium verliert seine Anwendbarkeit, wenn $f''(a)$ selber $= 0$ ist (wie z. B. wenn die Tangente an einem Inflexionspunkte parallel zur Abscissenachse liegt); man muss in diesem

Falle die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ zu Rathe ziehen, indem man den in §. 18 bewiesenen Satz

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1.2}f''(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)}{h^n}$$
$$=\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2.3\ldots n}$$

anwendet. Unter der Voraussetzung, dass nicht nur $f'(a)=0$ ist, sondern auch $f''(a), f'''(a), \ldots f^{(n-1)}(a)$ verschwinden, mithin $f^{(n)}(a)$ der erste nicht verschwindende Differentialquotient ist, vereinfacht sich die vorige Gleichung und giebt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2\ldots n},$$

woraus folgt, wenn h gegen die Null convergirt,

$$Lim\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}.$$

Hier unterscheiden wir die beiden Fälle eines ungeraden und eines geraden n. Bei ungeraden n ist

$$Lim\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$
$$Lim\,\frac{f(a-h)-f(a)}{h^n}=-\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

mithin für ein positives $f^{(n)}(a)$ und hinreichend kleine h

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h),$$

dagegen bei negativen $f^{(n)}(a)$

$$f(a-h)>f(a)>f(a+h).$$

Beide Ungleichungen stimmen darin überein, dass $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Wenn dagegen n eine gerade Zahl bedeutet, so gelten die Gleichungen

$$Lim\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}=+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$
$$Lim\,\frac{f(a-h)-f(a)}{h^n}=+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n};$$

mithin ist bei positivem $f^{(n)}(a)$ und für hinreichend kleine h

$$f(a-h)>f(a)<f(a+h),$$

d. h. $f(a)$ ein Minimum; ferner erhält man bei negativen $f^{(n)}(a)$

$$f(a-h)<f(a)>f(a+h),$$

wodurch ein Maximum angezeigt wird. Alles zusammen giebt folgenden Satz:

Ein aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmter Werth von x macht $f(x)$ nur dann zu einem Maximum oder Minimum, wenn in der Reihe der Differentialquotienten $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. der erste für jenen Werth nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar findet ein Minimum oder Maximum statt, je nachdem der genannte Differentialquotient für jenen Werth von x positiv oder negativ ausfällt.

Den Mechanismus der Rechnung werden die folgenden Beispiele zeigen.

1. Handelt es sich um das Maximum oder Minimum der Function

$$f(x) = x^a\, e^{-x},$$

so entwickelt man erst die Differentialquotienten

$$f'(x) = (a - x)\, x^{a-1}\, e^{-x},$$
$$f''(x) = [a(a-1) - 2ax + x^2]\, x^{a-2}\, e^{-x}$$
u. s. w.

Nun wird $f'(x) = 0$ für $x = a$; dieser Werth giebt $f''(a) = -a^a\, e^{-a}$ also ein negatives Resultat, mithin ist

$$f(a) = a^a\, e^{-a} = \left(\frac{a}{e}\right)^a$$

das Maximum der Function $x^a\, e^{-x}$.

2. Es mögen $k_1, k_2, \ldots k_n$ gegebene Zahlen sein und es soll x so bestimmt werden, dass die Quadratsumme

$$f(x) = (x - k_1)^2 + (x - k_2)^2 + \cdots + (x - k_n)^2$$

zu einem Maximum oder Minimum wird. Man hat in diesem Falle

$$f'(x) = 2[nx - (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)],$$
$$f''(x) = 2n;$$

$f'(x)$ verschwindet, wenn

$$x = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n}$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel aus den gegebenen Zahlen ist, $f''(x)$ bleibt immer positiv, mithin wird $f(x)$ bei dem angegebenen Werthe zu einem Minimum. Dies war übrigens vorauszusehen, da jene Summe von Quadraten zwar beliebig gross aber nicht beliebig klein gemacht werden kann.

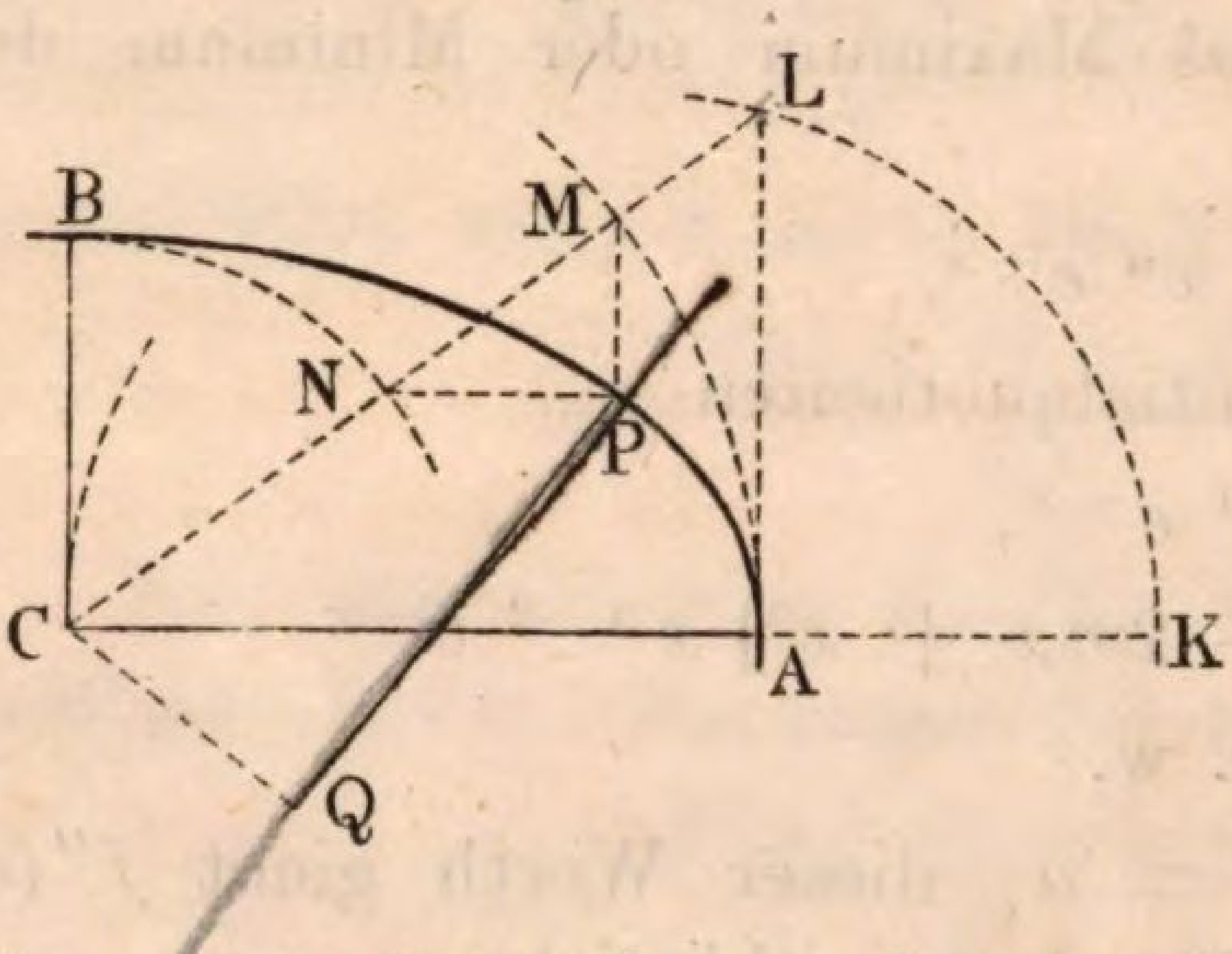
3. Auf dem ersten Quadranten einer Ellipse soll man denjenigen Punkt bestimmen, dessen Normale am weitesten vom Centrum entfernt ist. Geht überhaupt durch den Punkt xy einer Curve eine Normale, so hat letztere vom Coordinatenanfange die Entfernung

$$p = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, mithin

$$p = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}}.$$

Fig. 35.



Dieser Ausdruck vereinfacht sich durch Einführung des Winkels $ACM = \omega$, welcher unter dem Namen der excentrischen Anomalie bekannt ist (Fig. 35); man hat nämlich $x = a \cos \omega$, mithin

$$p = \frac{(a^2 - b^2) \sin \omega}{\sqrt{a^2 \tan^2 \omega + b^2}}$$

oder, wenn $\tan \omega$ kurz mit t bezeichnet wird,

$$p = \frac{(a^2 - b^2)\, t}{\sqrt{(1 + t^2)\,(a^2 t^2 + b^2)}}.$$

Wir betrachten nun t als unabhängige Variabele und erhalten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(a^2 - b^2)\,(b^2 - a^2 t^4)}{\sqrt{[b^2 + (a^2 + b^2)\, t^2 + a^2 t^4]^3}},$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\frac{(a^2 - b^2)\, t\,[3(a^2 + b^2)\, b^2 + 10\, a^2 b^2 t^2 + a^2 (a^2 + b^2)\, t^4 - 2 a^4 t^6]}{\sqrt{[b^2 + (a^2 + b^2)\, t^2 + a^2 t^4]^5}};$$

der erste Differentialquotient verschwindet für

$$t = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \tan \omega = \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a},$$

und der zweite Differentialquotient erhält dadurch den negativen Werth

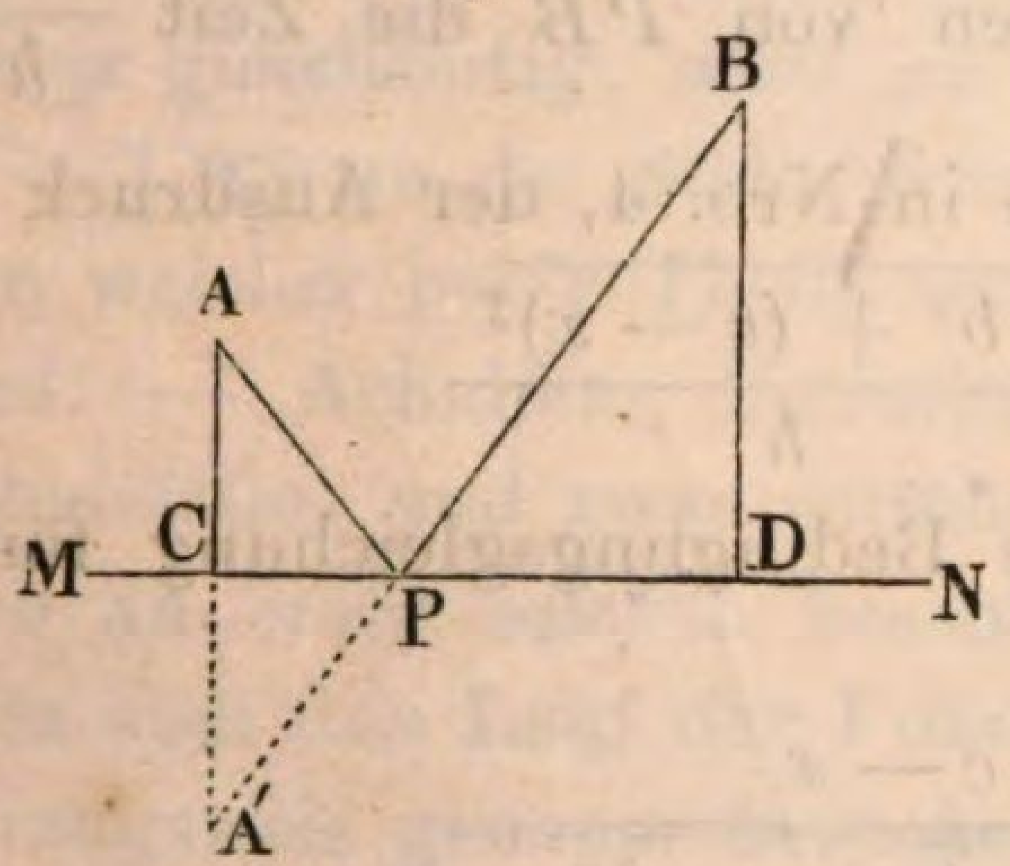
$$-\frac{4\, a^2 (a - b)}{(a + b)^2},$$

mithin entspricht der obige Werth von t dem Maximum von p. Uebrigens konnte man sich die Entwickelung des zweiten Differen-

tialquotienten ersparen; da nämlich für $\omega = 0$ und für $\omega = 90^0$ jedesmal p den Minimalwerth $p = 0$ erreicht, so muss der gefundene Werth ein Maximum liefern.

Behufs der Construction nimmt man $AK = BC = b$, sucht zwischen $AC = a$ und AK die mittlere Proportionale AL, zieht CL, welche den umschriebenen Kreis in M, den eingeschriebenen in N schneidet, legt durch M eine Parallele zu BC, durch N eine Parallele zu AC und erhält dann den gesuchten Ellipsenpunkt P als Durchschnitt der genannten Parallelen. Construirt man die Normale PU, so ist deren Abstand von C das Maximum von p, und zwar $CQ = a - b$; gleichzeitig ist Q der Krümmungsmittelpunkt für P, PQ der Krümmungshalbmesser, mithin die Fläche des Krümmungskreises gleich der Ellipsenfläche.

Fig. 36.



4. Ueber einer Geraden MN (Fig. 36) sind zwei Punkte A und B gegeben, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie ABP verbunden werden sollen; man fragt nach dem Minimum des Weges $AP + BP$. Für $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$, $CP = x$, $AP + BP = s$ ist

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

$$s' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

$$s'' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{[b^2 + (c - x)^2]^3}}.$$

Aus $s' = 0$ ergiebt sich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

der aus ihr folgende Werth gehört zu einem Minimum, weil s'' immer positiv bleibt. Geometrisch bedeutet die vorige Gleichung

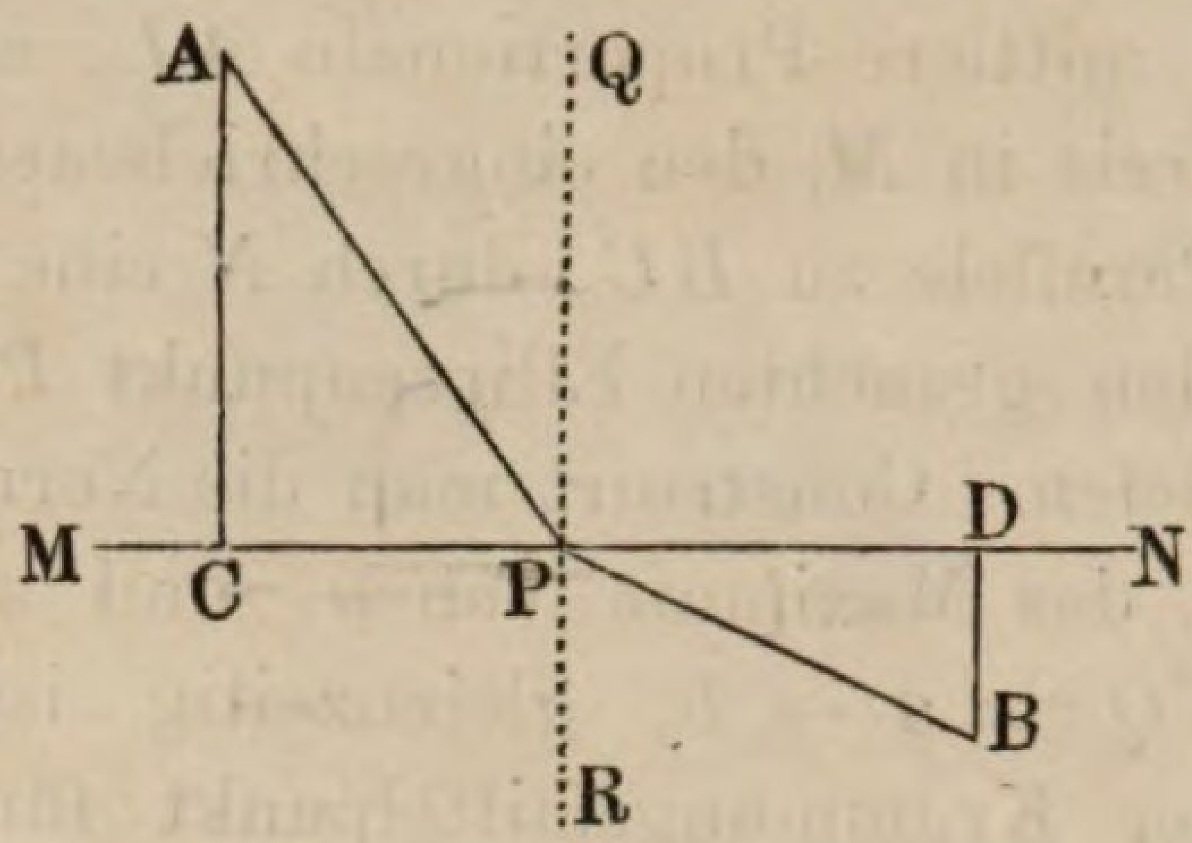
$$\cos MPA = \cos NPB \text{ d. i. } \angle MPA = \angle NPB,$$

und hiernach ist die Construction leicht, indem man $CA' = CA$ nimmt und die Gerade $A'B$ zieht, welche MN in P schneidet (Spiegelungsgesetz).

5. Auf entgegengesetzten Seiten der Geraden MN (Fig. 37 a. f. S.) befinden sich die gegebenen Punkte A und B, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie APB verbunden

sind; ein Körper bewegt sich auf dieser von A nach B so, dass er längs der Geraden AP die constante Geschwindigkeit g, längs PB die constante Geschwindigkeit h besitzt. Es soll der Punkt P so bestimmt werden, dass der Körper in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt. Zum Durchlaufen von AP braucht der Körper die Zeit $\frac{AP}{g}$, zum Durchlaufen von PB die Zeit $\frac{PB}{h}$,

Fig. 37.



mithin ist bei gleicher Bezeichnung wie in Nro. 4, der Ausdruck

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{g} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{h}$$

zu einem Minimum zu machen. Als Bedingungsgleichung für x findet man sehr leicht

$$\frac{x}{g\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{h\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

oder geometrisch

$$\frac{\cos MPA}{g} = \frac{\cos NPB}{h},$$

wofür man auch setzen kann

$$\frac{\sin APQ}{\sin BPR} = \frac{g}{h}.$$

Dieser Gleichung entspricht ein Minimum von s, weil s'' immer positiv bleibt. (Brechungsgesetz, wobei die Lage des gebrochenen Strahles durch die zwei Bedingungen bestimmt ist, dass er durch B gehen und normal zu einem gewissen Kegelschnitte sein muss. Vergl. §. 29, II.)

6. Besondere Aufmerksamkeit verdient bei allen Untersuchungen über Maxima und Minima noch der Ausnahmefall, wenn $f'(x)$ sein Vorzeichen nicht stetig mittelst Durchganges durch Null, sondern sprungweis ändert; denn auch derartige Zeichenwechsel können Maxima oder Minima liefern, die man nach der vorigen Methode nicht finden würde. Ist z. B.

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

mithin

$$y' = f'(x) = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x}},$$

so bleibt $f'(x)$ positiv für alle $x < 1$, und negativ für alle $x > 1$; der Zeichenwechsel geschieht hier aber sprungweise, denn man hat

$$f'(1-0) = +\infty, f'(1+0) = -\infty$$

und mithin erleidet $f'(x)$ eine Unterbrechung der Continuität an der Stelle $x = 1$. Abgesehen davon geht aber aus den Vorzeichen von $f'(x)$ mit Sicherheit hervor, dass $f(x)$ wächst von $x = -\infty$ bis $x = 1$ und abnimmt von $x = 1$ bis $x = +\infty$, dass also $f(x)$ für $x = 1$ sein Maximum $f(1) = 1$ erhalten muss. Man wird dies geometrisch leicht bestätigt finden, indem man die Aufmerksamkeit auf den Berührungswinkel τ richtet, welcher durch die Gleichung $\tan\tau = f'(x)$ bestimmt wird. Derselbe ist spitz für $x < 1$, wächst mit x gleichzeitig, wird $= \frac{1}{2}\pi$ für $x = 1$ und nachher stumpf für $x > \frac{1}{2}\pi$; an der Stelle $x = 1$ besitzt daher die Curve eine Spitze, von welcher beide Theile convex gegen die Abscissenachse gekrümmt sind. — Aehnliche Betrachtungen gelten für alle derartigen Ausnahmefälle, und zwar entscheidet sich die Beschaffenheit einer Function an einer solchen besonderen Stelle immer sehr leicht dadurch, dass man den Lauf der Function in der Nachbarschaft jener Stellen vorzugsweis genauer berücksichtigt.

§. 34.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabelen.

Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine Function der unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$, so kann es ein zusammengehörendes System specieller Werthe dieser Variabelen geben, etwa $x = a$, $y = b$, $z = c$ u. s. w., wodurch $F(a, b, c, \ldots)$ grösser oder kleiner wird als alle Nachbarwerthe der Function, d. h. als alle die Werthe, welche entstehen, wenn man für x irgend einen Werth aus dem Intervalle $a - h$ bis $a + h$, für y einen Werth aus dem Intervalle $b - k$ bis $b + k$ u. s. w. nimmt, wobei h, k etc. beliebig kleine Grössen bezeichnen. Ein solcher besonderer Werth $F(a, b, c, \ldots)$ der Function $F(x, y, z, \ldots)$, heisst ein Maximum oder Minimum, je nachdem er grösser oder kleiner als seine Nachbarn ist. Die Aufgabe ist nun, das System der speciellen Werthe $x = a$, $y = b$, etc. aufzufinden.

Wenn überhaupt beliebige unabhängige Variabelen $x, y, z, \ldots$ vorhanden sind, so darf man sich dieselben als ebensoviel willkührliche Functionen einer neuen unabhängigen Variabelen t denken, denn

man übersieht auf der Stelle, dass x, y, z etc. alle möglichen Werthe erhalten können, wenn man

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \ldots$$

setzt und t sowie die Natur der Functionen φ, ψ, χ etc. danach wählt; so würde z. B. schon die einfache Annahme $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t, \ldots$ wo α, β, γ völlig willkührliche Factoren sind, zu dem genannten Zwecke hinreichen. Durch diese Bemerkung reducirt sich die Aufgabe, $F(x, y, z, \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, auf die einfachere, für eine Function von nur einer unabhängigen Variabelen die grössten und kleinsten Werthe aufzusuchen. Soll nun

$$F(x, y, z, \ldots) = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t), \ldots]$$

oder kurz F seinen Maximal- oder Minimalwerth erhalten, so muss

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

sein; diese Gleichung wird in unserem Falle, wo x, y, z, .. als abhängig von t erscheinen:

$$1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \cdots = 0.$$

Bei der gänzlichen Willkührlichkeit der Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, also auch ihrer Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t),\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t),\ \frac{dz}{dt} = \chi'(t) \ldots$$

(wie z. B. im obigen speciellen Falle der Factoren α, β, γ . . .) kann aber die Gleichung 1) nur bestehen, wenn die Coefficienten der unbestimmten Grössen für sich Null sind, wenn also die Gleichungen stattfinden:

$$2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots.$$

deren Anzahl mit der Anzahl der unabhängigen Variabelen übereinkommt, so dass es also immer möglich ist, die obigen Gleichungen nach x, y, z, . . . aufzulösen und so die Werthsysteme $x = a$, $y = b$, $z = c$ etc. zu bestimmen. Ist dies geschehen, so bedarf es noch einer Discussion, ob das gefundene System ein Maximum oder Minimum von F bildet. Diese Entscheidung wird dadurch herbeigeführt, dass man den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2F}{dt^2}$ entwickelt

und nachsieht, ob er durch Substitution der für x, y, z, ... gefundenen Werthe positiv oder negativ ausfällt. Wir wollen diese Untersuchung unter der Voraussetzung, dass F eine Function von nur zwei unabhängigen Variabelen x und y ist, näher ausführen.

Man hat zunächst mit Rücksicht auf die Gleichungen 2)

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

oder wenn der Quotient $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt}$ mit q bezeichnet wird:

$$3)\qquad \frac{d^2F}{dt^2} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Soll dieser zweite Differentialquotient zu einer Entscheidung führen, so darf er nicht verschwinden, also darf nicht zugleich

$$4)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

sein; ist diese Vorbedingung erfüllt, so muss der in 3) verzeichnete Ausdruck, worin noch die unbestimmten Grössen q und $\frac{dy}{dt}$ vorkommen, immer gleiches Vorzeichen behalten, von welchem nachher zu entscheiden ist, ob es das Plus- oder Minuszeichen ist. Das Vorzeichen von $\frac{d^2F}{dt^2}$ hängt nun einzig allein von dem Ausdrucke

$$5)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ab, welcher unter der Form $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ enthalten ist. Hätte ferner die quadratische Gleichung $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma = 0$ eine reelle Wurzel q_1, so würde der Ausdruck $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ sein Vorzeichen wechseln, wenn man q das Intervall $q_1 - \delta$ bis $q_1 + \delta$ durchlaufen liesse, wo δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet. Damit also der fragliche Ausdruck sein Vorzeichen nicht wechsele, ist es nothwendig und hinreichend, dass jene quadratische Gleichung imaginäre Wurzeln besitze, folglich $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ sei. Die Bedingung für die Unveränderlichkeit des Vorzeichens in Nro. 5) besteht also in der Ungleichung

$$6)\qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0,$$

sie vertritt zugleich die in Nro. 4) angegebene Determination, denn

wenn sie erfüllt ist, können die Gleichungen 4) nicht sämmtlich stattfinden. Aus der Bedingung 6) ersieht man ferner, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

(nach Substitution der für x und y gefundenen Werthe) gleiche Vorzeichen besitzen müssen, weil ausserdem die Ungleichung 6) die Summe zweier positiven Grössen als negativ angeben würde. Da ferner nach den bisherigen Bestimmungen der Ausdruck in 5) sein Vorzeichen nicht wechselt, so darf man auch $q = 0$ setzen, ohne einen solchen Wechsel befürchten zu müssen, und man ersieht daraus, dass jener Ausdruck dasselbe Vorzeichen besitzt wie $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; nunmehr lautet die Entscheidung:

Die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

genügen und geben das Maximum oder Minimum der Function $F(x, y)$, je nachdem sie die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen.

Finden die Gleichungen 4) zusammen statt, verschwindet also $\frac{d^2 F}{d t^2}$ für die gefundenen Werthe von x und y, so giebt der zweite Differentialquotient keine Entscheidung und man muss sich dann an die höheren Differentialquotienten wenden, was jedoch umständliche Rechnungen erfordert. Ebenso wird die Sache etwas verwickelt, wenn es sich um eine Function von drei oder mehr Variabelen handelt. Man wird in allen solchen Fällen besser thun, aus der Natur der gestellten speciellen Aufgabe zu entscheiden, ob überhaupt ein Maximum oder Minimum stattfindet.

1. Als erstes Beispiel diene die Aufgabe, das Minimum der Quadratsumme

$$F(x, y) = (a_1 x + b_1 y - k_1)^2 + (a_2 x + b_2 y - k_2)^2 + \cdots\cdots + (a_n x + b_n y - k_n)^2$$

zu bestimmen, wobei alle a, b und k als gegebene Constanten vorausgesetzt werden. Führen wir zur Abkürzung die folgende Bezeichnung ein

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = S_{ab},$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = S_{aa},$$
$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = S_{bb},$$

u. s. w.

so erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(S_{aa} x + S_{ab} y - S_{ak}),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(S_{ba} x + S_{bb} y - S_{bk}),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 S_{aa}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 S_{bb},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 2 S_{ab}.$$

Die letzten drei Ausdrücke genügen den Bedingungen des Minimums; letzteres tritt daher ein, sobald die Gleichungen

$$S_{aa} x + S_{ab} y = S_{ak},$$
$$S_{ba} x + S_{bb} y = S_{bk}$$

erfüllt sind, wozu die Werthe gehören

$$x = \frac{S_{bb} \cdot S_{ak} - S_{ab} \cdot S_{bk}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2},$$
$$y = \frac{S_{aa} \cdot S_{bk} - S_{ab} \cdot S_{ak}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2}.$$

Man kann diese Aufgabe dahin verallgemeinern, dass man eine beliebige Anzahl von Variabelen x, y, z, etc. voraussetzt und das Minimum von

$$F(x, y, z, \ldots.)$$
$$= (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - k_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - k_2)^2 + \cdots$$
$$\cdots + (a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - k_n)^2$$

verlangt. Man findet leicht, dass die hierzu nöthigen Werthe aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$S_{aa}x + S_{ab}y + S_{ac}z + \cdots = S_{ak},$$
$$S_{ba}x + S_{bb}y + S_{bc}z + \cdots = S_{bk},$$
$$S_{ca}x + S_{cb}y + S_{cc}z + \cdots = S_{ck},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren Anzahl ebenso gross ist als die Anzahl der Variabelen x, y, z etc. Einer besonderen Untersuchung darüber, ob die gefundenen Werthe von x, y, z etc. das Maximum oder Minimum der Function F geben, bedarf es übrigens nicht, denn es ist unmittelbar einleuchtend, dass eine Summe von Quadraten (d. h. von positiven Grössen) wohl in's Unendliche wachsen aber nicht beliebig klein werden kann und dass sie folglich ein Minimum haben muss *).

*) Die obige Aufgabe, welche die Verallgemeinerung des zweiten Beispiels in §. 33 enthält, ist für die Praxis von besonderem Werthe. Hat man nämlich eine Grösse x durch directe Messung oder Beobachtung zu bestimmen (wie z. B. die Entfernung zweier Punkte durch Messung mit Kette oder Maassstäben), so nimmt man der Sicherheit wegen diese Operation mehrmals vor, aber man findet dann, zufolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bei jeder Messung einen etwas anderen Werth, und es mögen $k_1, k_2, \ldots k_n$ die verschiedenen Werthe bezeichnen, welche bei n Beobachtungen für x erhalten wurden. Unter der Voraussetzung, dass alle Messungen mit gleicher Sorgfalt angestellt, mithin von gleichem Gewichte sind, betrachtet man das arithmetische Mittel aus $k_1, k_2, \ldots k_n$ als den wahrscheinlichsten Werth von x, ohne sich des Grundes dieser Annahme genauer bewusst zu sein. Dagegen beweist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass der wahrscheinlichste Werth von x derjenige ist, bei welchem die Summe der Fehlerquadrate ihr Minimum erreicht. Nun sind $x - k_1$, $x - k_2$, $\ldots$ $x - k_n$ die begangenen Fehler, und nach Beispiel 2) in §. 33 wird die Summe der Quadrate dieser Fehler ein Minimum, wenn x dem arithmetischen Mittel aus $k_1, k_2, \ldots k_n$ gleichkommt; es rechtfertigt sich also jene Annahme. Das genannte Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet aber noch eine weitere Anwendung. Sind nämlich zwei nicht direct beobachtbare Grössen x und y mit beobachtbaren Grössen a, b, k durch eine Gleichung von der Form $ax + by = k$ verbunden, so erhält man durch n Beobachtungen n Gleichungen folgender Art

$$a_1 x + b_1 y = k_1,\ a_2 x + b_2 y = k_2, \ldots a_n x + b_n y = k_n.$$

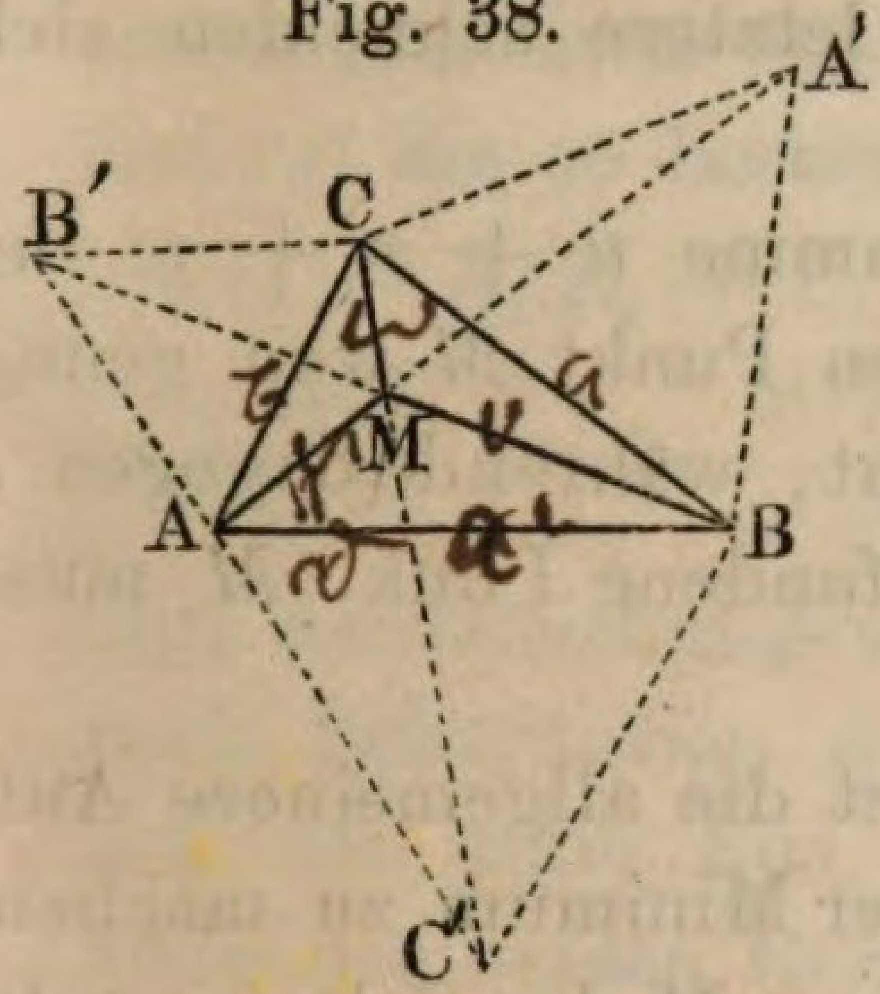
Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt mehr als 2 und daher würden sie, als vollkommen genau betrachtet, einander widersprechen. Dagegen ist zu berücksichtigen, dass jene Gleichungen in Folge der Beobachtungsfehler nur angenähert richtig sind; die Grössen

$$a_1 x + b_1 y - k_1,\ a_2 x + b_2 y - k_2, \ldots a_n x + b_n y - k_n$$

differiren daher von der Null und repräsentiren die Fehler. Die wahrscheinlichsten Werthe von x und y ergeben sich nun wieder, indem man die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht, und vermöge dieser Bedingung erhält man, wie oben gezeigt wurde, immer soviel Gleichungen als Unbekannte zu bestimmen sind.

2. In der Ebene eines Dreiecks ABC (Fig. 38) soll der Punkt M so bestimmt werden, dass die Summe der Entfernungen $AM = u$, $BM = v$, $CM = w$ ein Minimum werde. Bezeichnen wir die Seiten BC, CA, AB der Reihe nach mit a, b, c und die Gegenwinkel mit α, β, γ, so haben wir als Summe der genannten Entfernungen

Fig. 38.



$$s = u + v + w$$

oder, wenn $\angle BAM = \theta$ gesetzt wird,

$$s = u + \sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta} + \sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}$$

und hierbei sind u, θ die beiden unabhängigen Variabelen. Es ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 1 + \frac{u - c\cos\theta}{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta}} + \frac{u - b\cos(\alpha - \theta)}{\sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{cu\sin\theta}{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta}} - \frac{bu\sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}},$$

mithin sind die Bedingungen für den Eintritt des Maximums oder Minimums

$$\frac{c\cos\theta - u}{v} + \frac{b\cos(\alpha - \theta) - u}{w} = 1,$$

$$\frac{c\sin\theta}{v} - \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w} = 0.$$

Geometrisch bedeuten dieselben soviel wie

$$\cos BMA' + \cos CMA' = 1, \quad \sin BMA' - \sin CMA' = 0;$$

aus der zweiten Gleichung folgt $\angle BMA' = \angle CMA'$, nachher aus der ersten

$$\cos BMA' = \cos CMA' = \tfrac{1}{2}, \quad \angle BMA' = \angle CMA' = 60^0,$$
$$\angle BMC = 120^0.$$

Zu einer ähnlichen Rechnung würde man gelangen, wenn man $BM = v$ und $\angle CBM = \eta$ als unabhängige Variabele wählte und demgemäss u und w durch v und η ausdrückte; das Resultat wäre dann $\angle CMA = 120^0$. Der gesuchte Punkt M liegt demnach so, dass die Winkel AMB, BMC, CMA gleich sind; er ist folglich der Durchschnitt von Kreisbögen, welche über den Dreiecksseiten als Sehnen mit dem gemeinschaftlichen Peripheriewinkel von 120^0 beschrieben werden können. Eine andere Construction von M besteht darin, dass man über den Dreiecksseiten die gleichseitigen Dreiecke

ABC', BCA', CAB' mit den Spitzen nach Aussen beschreibt und nachher die Geraden AA', BB', CC' zieht; letztere schneiden sich im Punkte M.

Der Natur der Sache nach kann die Summe $u + v + w$ beliebig gross gemacht werden, wenn man den Punkt M weit genug von den Spitzen des Dreiecks ABC entfernt, während dagegen s nicht beliebig klein werden kann. Der gefundene Punkt M muss folglich dem Minimum von s entsprechen.

Eine völlig gleiche Behandlung gestattet die allgemeinere Aufgabe, $u^n + v^n + w^n$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. In dem speciellen Falle $n = 2$ findet man, dass M der Schwerpunkt des Dreieckes ABC und $u^2 + v^2 + w^2$ ein Minimum ist.

3. Es soll die kürzeste Entfernung zweier Geraden ermittelt werden, deren Gleichungen sind

$$7)\qquad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2. \end{cases}$$

Nehmen wir auf der ersten Geraden einen Punkt $x_1\, y_1\, z_1$, auf der zweiten einen Punkt $x_2\, y_2\, z_2$ einstweilen beliebig an, so ist die Länge der verbindenden Geraden

$$8)\qquad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$$

diese wird ein Maximum oder Minimum je nachdem ihr Quadrat seinen kleinsten oder grössten Werth erreicht, mithin haben wir uns nur mit dem Ausdrucke

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

zu beschäftigen, welcher vermöge der Gleichungen 7) die Form

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 &+ (B_1 x_1 - B_2 x_2 + b_1 - b_2)^2 \\ &+ (C_1 x_1 - C_2 x_2 + c_1 - c_2)^2 \end{aligned}$$

annimmt und eine Function der beiden unabhängigen Variabelen x_1 und x_2 darstellt. Man hat nun

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= (1 + B_1^2 + C_1^2)\, x_1 - (1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)\, x_2 \\
&\qquad + (b_1 - b_2) B_1 + (c_1 - c_2)\, C_1 \\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= -(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)\, x_1 + (1 + B_2^2 + C_2^2)\, x_2 \\
&\qquad - (b_1 - b_2) B_2 - (c_1 - c_2)\, C_2 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= 2(1 + B_1^2 + C_1^2) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, \partial x_2} &= -2(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= 2(1 + B_2^2 + C_2^2).
\end{aligned}$$

Setzt man die ersten Differentialquotienten der Null gleich, so erhält man zwei Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung von x_1 und x_2; die so bestimmten Werthe entsprechen einem Minimum, weil

$$4(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)^2 - (1 + B_1^2 + C_1^2)(1 + B_2^2 + C_2^2) < 0$$

und $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ sowie $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ positiv ist. Aus x_1 und x_2 erhält man mittelst der Gleichungen der Geraden die Werthe von y_1, z_1 und y_2, z_2; nach Substitution der Werthe von x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2 giebt nun der unter Nro. 8) verzeichnete Ausdruck die kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Uebrigens liegt es hier in der Natur der Aufgabe, dass nur ein Minimum stattfindet, und man hätte sich daher die Entwickelung der zweiten Differentialquotienten von F nebst den angeknüpften Bemerkungen ersparen können.

§. 35.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Die Werthe, durch welche eine gegebene Function mehrerer Variabelen zu einem Maximum oder Minimum werden soll, sind häufig noch an eine oder mehrere Bedingungen gebunden, welche in Gleichungen ausgedrückt werden. Sucht man z. B. die kürzeste Entfernung eines Punktes $\alpha\beta\gamma$ von einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sein möge, so ist der Ausdruck

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

welcher den Abstand der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und xyz angiebt, zu einem Minimum zu machen, jedoch mit der besonderen Rücksicht, dass die Werthe von x, y und z der Gleichung der Ebene genügen müssen. Das natürlichste Verfahren wäre nun die Herausschaffung der abhängigen Variabelen; ist z. B. nur eine Bedingungsgleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man sie nach z auflösen und den so gefundenen Werth von z in die Function $F(x, y, z)$, deren Maximum oder Minimum gesucht wird, substituiren; an die Stelle einer Function von drei Variabelen tritt nunmehr eine Function zweier unabhängiger Variabelen, und für diese gelten die Regeln des vorigen Paragraphen. Sind zwischen drei Variabelen zwei Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man mittelst derselben y und z durch x ausdrücken und wenn man diese

Werthe substituirt, so enthält jetzt die Function $F(x, y, z)$ nur noch eine unabhängige Variabele. Diese Eliminationen sind aber nicht selten sehr umständlich oder unmöglich und man muss in solchen Fällen einen anderen Weg einschlagen, welcher darin besteht, dass man nicht die abhängigen Variabelen selbst aus den Bedingungsgleichungen, sondern die Differentialquotienten der abhängigen Variabelen aus den Differentialgleichungen der gegebenen Bedingungen eliminirt. Die Ausführung dieses Gedankens ist folgende.

Wenn $F(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt sein soll, so ist nur eine unabhängige Variabele x vorhanden und es muss daher $\frac{dF}{dx} = 0$ sein; dies giebt in unserem Falle, wo F ausser x noch die abhängige Variabele y enthält,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Differenzirt man auch die Bedingungsgleichung in Beziehung auf x als unabhängige Variabele, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus beiden Differentialgleichungen giebt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

und wenn man diese Gleichung mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ verbindet, so hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y.

Bei drei Variabelen x, y, z und zwei Bedingungsgleichungen, also wenn das Maximum oder Minimum von $F(x, y, z)$ gesucht wird, während zugleich

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ und } \psi(x, y, z) = 0$$

sein soll, ist nur eine unabhängige Variabele x vorhanden, von welcher y und z abhängen. Die Gleichung $\frac{dF}{dx} = 0$ lautet dann

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

und die Differentialgleichungen der Bedingungen sind:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ eliminiren, es bleibt dann eine Gleichung übrig, welche in Verbindung mit den beiden Bedingungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ zur Bestimmung von x, y, z hinreicht.

Sind drei Variabele vorhanden mit nur einer Bedingungsgleichung, so kann man x und y als unabhängige Variabele, z als abhängige Veränderliche ansehen; es muss dann sein

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

oder wenn man beachtet, dass in F auch z als Function von x und y vorkommt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Andererseits ist durch partielle Differentiation der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

durch Elimination von $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus der ersten und dritten, so wie von $\frac{\partial z}{\partial y}$ aus der zweiten und vierten Gleichung folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

welche Gleichungen, verbunden mit $\varphi(x, y, z) = 0$, die Unbekannten x, y, z bestimmen. — Dieses Verfahren bleibt immer anwendbar, weil es stets nur Eliminationen aus Gleichungen des ersten Grades erfordert. Wir geben einige Beispiele dazu.

1. Aus den vier Seiten α, β, γ, δ soll das Viereck von grösstmöglichem Inhalte construirt werden. Nennen wir x den von α und β, y den von γ und δ eingeschlossenen Winkel, so ist die Fläche des Vierecks

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha\beta\,\sin x + \tfrac{1}{2}\,\gamma\delta\,\sin y$$

und wenn diese, also auch das Doppelte von ihr, ein Maximum werden soll, so ist

$$F = \alpha\beta\,\sin x + \gamma\delta\,\sin y$$

zu setzen. Berechnet man ferner die Diagonale, welche den Winkeln x und y gegenüberliegt, so hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta\,\cos x = \gamma^2 + \delta^2 - 2\,\gamma\delta\,\cos y;$$

mithin als Bedingungsgleichung

$$\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2\,\alpha\beta\,\cos x + 2\,\gamma\delta\,\cos y = 0.$$

Die Differentialgleichungen werden nun

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta\,\cos x + \gamma\delta\,\cos y \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\,\alpha\beta\,\sin x - 2\,\gamma\delta\,\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man $\frac{dF}{dx} = 0$ und eliminirt $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$2\,\alpha\beta\gamma\delta\,(\cos x\,\sin y + \sin x\,\cos y) = 0,$$

d. h. $\sin(x+y) = 0$, $x + y = 0^0$ oder $= 180^0$, 360^0 u. s. w. Da aber x und y Winkel eines Vierecks sind, so kann nur $x + y = 180^0$ oder $y = 180^0 - x$ sein.

Hieraus folgt weiter $\frac{dy}{dx} = -1$, mithin

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta\,\cos x - \gamma\delta\,\cos y,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -\,\alpha\beta\,\sin x + \gamma\delta\,\sin y\,\frac{dy}{dx}$$

$$= -\,(\alpha\beta\,\sin x + \gamma\delta\,\sin y),$$

und da dieser Ausdruck jedenfalls negativ bleibt (wegen $x < 180^0$ und $y < 180^0$), so entspricht die Bedingung $x + y = 180^0$ einem Maximum. Zugleich ergiebt sich, dass das gesuchte Viereck ein Sehnenviereck ist.

2. Um auch die im Eingange erwähnte Aufgabe zu lösen, nehmen wir

$$F = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$
$$\varphi = Ax + By + Cz + D = 0,$$

und es sind dann zwei unabhängige Variabele x und y vorhanden, während z eine Function von x und y ist. Setzt man die beiden partiellen Differentialquotienten von F der Null gleich, so hat man zunächst

$$x - \alpha + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$y - \beta + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ferner ergiebt sich durch partielle Differentiation der Gleichung $\varphi = 0$:

$$A + C\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad B + C\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

und durch Elimination der partiellen Differentialquotienten:

$$A(z-\gamma) - C(x-\alpha) = 0,$$
$$B(z-\gamma) - C(y-\beta) = 0.$$

Verbindet man diese zwei Gleichungen mit der dritten $Ax + By + Cz + D = 0$, so findet man der Reihe nach z, y und x, nämlich

$$x = \alpha - AK, \quad y = \beta - BK, \quad z = \gamma - CK,$$

wobei zur Abkürzung

$$K = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

gesetzt worden ist. Dass diese Werthe nur einem Minimum von F entsprechen können, folgt aus der geometrischen Bedeutung unserer Aufgabe von selbst; auch sind die Werthe für x, y, z identisch mit den aus der analytischen Geometrie bekannten Coordinaten des Fusspunktes der vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ herabgelassenen Senkrechten.

3. Um kurz sein zu können, wollen wir im Folgenden unter Stellung einer Ebene die drei Winkel verstehen, welche eine auf der Ebene errichtete Senkrechte mit drei rechtwinkligen Coordinatenachsen bildet. Ist nun s die Fläche eines ebenen Polygones, welches die Stellung $\alpha\beta\gamma$ besitzt, so sind die drei Projectionen von s auf die Coordinatenebenen xy, xz, yz der Reihe nach

$$c = s \,.\, \cos\gamma, \; b = s \,.\, \cos\beta, \; a = s \,.\, \cos\alpha.$$

Dabei werden die Projectionen a, b, c, ebenso wie die Projectionen einer begrenzten Geraden, als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf sind. Denken wir uns eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Winkel ϑ bildet, so ist die Projection von s auf die neue Ebene

$$p = s \,.\, cos\,\vartheta$$

oder wenn $u\,v\,w$ die Stellung der vierten Ebene bezeichnet:

$$p = s\,(cos\,\alpha\; cos\,u + cos\,\beta\; cos\,v + cos\,\gamma\; cos\,w)$$

d. i.

$$p = a\,cos\,u + b\,cos\,v + c\,cos\,w.$$

Diese Formel giebt also die Projection p von s auf eine beliebige Ebene, wenn man erst die Projectionen von s auf die Coordinatenebenen und die Stellung der neuen Ebene kennt. Für mehrere beliebig liegende Figuren s_1, s_2 etc. hat man entsprechend

$$P = A\,cos\,u + B\,cos\,v + C\,cos\,w,$$

wo P die Projectionssumme $p_1 + p_2 +$ etc. bedeutet, und ebenso A, B, C die Summen der auf den Coordinatenebenen construirten Projectionen sind. Wir suchen nun die Ebene, für welche P sein Maximum erreicht. Dann sind wegen der immer stattfindenden Bedingung

$$cos^2 u + cos^2 v + cos^2 w - 1 = 0$$

zwei unabhängige Variabele u und v vorhanden, während w eine Function von u und v ist. Durch partielle Differentiation von P hat man, die Differentialquotienten gleich Null gesetzt,

$$A\,sin\,u + C\,sin\,w\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$B\,sin\,v + C\,sin\,w\,\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Die partiellen Differentialquotienten der Bedingungsgleichung sind

$$cos\,u\; sin\,u + cos\,w\; sin\,w\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$cos\,v\; sin\,v + cos\,w\; sin\,w\,\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Durch Elimination der partiellen Differentialquotienten von w ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A\,cos\,w = C\,cos\,u,\; B\,cos\,w = C\,cos\,v,$$

welche in Verbindung mit der Bedingungsgleichung zur Bestimmung von u, v, w führen; man erhält nämlich

$$\frac{\cos u}{A} = \frac{\cos v}{B} = \frac{\cos w}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und hierdurch erfährt man die Stellung derjenigen Ebene, für welche die Summe der Projectionen von allen Polygonen ihren grössten Werth erreicht.

Projicirt man s_1, s_2 etc. auf eine Ebene, welche senkrecht zur Ebene der grössten Projectionssumme steht, so erhält man eine Projectionssumme gleich Null, wie aus den Formeln für u, v, w leicht zu ersehen ist.

Cap. VI.

Die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§. 36.

Grundbegriffe von endlichen und unendlichen Reihen.

Bezeichnet $\varphi(m)$ eine bekannte Function der willkührlichen ganzen positiven Zahl m, so bilden die einzelnen Functionswerthe

$$\varphi(0), \quad \varphi(1), \quad \varphi(2), \ldots \varphi(n-1)$$

eine sogenannte endliche Reihe, welche im vorliegenden Falle aus n Gliedern (Termen) besteht; ihre Summe ist selbstverständlich eine gewisse Function von n und mag mit S_n bezeichnet werden. Lassen wir in der Gleichung

$$S_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n-1)$$

n unendlich wachsen, so wird die endliche Reihe zu einer unendlichen und gleichzeitig entsteht die Frage nach dem Grenzwerthe, welchem sich S_n für unendlich wachsende n nähert. Dabei sind nur zwei Fälle möglich; entweder ist $Lim\, S_n$ eine bestimmte endliche Grösse S oder es ist keine solche Grösse. Im ersten Falle heisst die Reihe $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) +$ etc. convergent und S ihre Summe, im zweiten Falle bezeichnet man die Reihe als divergent und sie hat dann keine Summe.

Diese Methode zur Summirung unendlicher Reihen wollen wir durch zwei Beispiele erläutern, welche nachher von Nutzen sein werden.

a. Zufolge der bekannten Summenformel für die geometrische Progression gilt, wenn $\varphi(m) = \beta^m$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{1-\beta^n}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{n-1};$$

ist nun β ein positiver oder negativer ächter Bruch, so wird $Lim\,\beta^n = 0$ *), mithin

$$1)\qquad \frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots\cdots$$
$$-1 < \beta < +1.$$

Für $\beta = +1$ ist $S_n = n$, folglich $Lim\,S_n = \infty$; für $\beta > +1$ wird um so mehr $Lim\,S_n = \infty$; für $\beta = -1$ ist $S_n = 0$ oder $= +1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; für $\beta < -1$ wachsen die Werthe von S_n in's Unendliche und wechseln fortwährend ihre Zeichen. Demnach ist $Lim\,S_n$ nur unter der Bedingung $-1 < \beta < +1$ eine bestimmte endliche Grösse, d. h. die Reihe $1 + \beta + \beta^2 + \cdots$ convergirt für ächt gebrochene β und divergirt in jedem anderen Falle.

b. Aus der leicht beweisbaren identischen Gleichung

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+m)}$$

folgt, indem man $m = 1, 2, 3, \ldots n-1$ setzt und Alles addirt,

$$1)\qquad \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}\right],$$

wobei die eingeklammerte Reihe aus $n-1$ Gliedern besteht. Bei unendlich wachsenden n kommt es linker Hand auf den Grenzwerth von

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

*) Ein positives ächt gebrochenes β kann unter der Form $\frac{1}{1+\alpha}$ dargestellt werden, wo α irgend eine positive Grösse bezeichnet; wegen $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ ist dann

$$0 < \beta^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha},$$

woraus die obige Behauptung sogleich folgt. Bei negativen β können sich β^n und $(-\beta)^n$ höchstens im Vorzeichen unterscheiden, im Uebrigen bleibt die Schlussweise dieselbe.

an, und da man augenblicklich übersieht, dass für $\alpha = \beta$ der vorliegende Bruch constant $= 1$ bleibt, so sind noch die Fälle $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$ zu untersuchen.

Nun ist für ganze positive h und k, sowie für ein beliebiges positives x

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^h > 1+x, \quad (1+x)^k > 1+kx$$

mithin, wenn man in der zweiten Ungleichung die kte Wurzel zieht und die reciproken Werthe nimmt

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{h}}\right)^h < \frac{1}{1+x} < \left(\frac{1}{1+kx}\right)^{\frac{1}{k}};$$

hieraus folgt für $x = \frac{\alpha-\beta}{\beta+m}$, wobei $\alpha - \beta$ und $\beta + m$ als positiv angenommen werden,

$$\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+\frac{\alpha-\beta}{h}}\right)^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wählt man die Zahlen h und k, so dass gleichzeitig

$$h \geqq \alpha - \beta, \quad k \geqq \frac{1}{\alpha-\beta},$$

so kann man die vorige Ungleichung verstärken, indem man statt des ächt gebrochenen $\frac{\alpha-\beta}{h}$ die Einheit, und für das die Einheit übersteigende $k(\alpha-\beta)$ gleichfalls die Einheit setzt. In der nunmehrigen Ungleichung

$$\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

nehmen wir $m = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und multipliciren alle entstehenden Ungleichungen; dies giebt

$$\left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^h < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} < \left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Bei unendlich wachsenden n ändern sich h und k nicht, dagegen wird $Lim \frac{\beta}{\beta+n} = 0$, mithin

$$2) \qquad Lim\, \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} = 0,$$

wobei aber die Bedingung $\alpha > \beta$ festzuhalten ist. Aus Nro. 1) erhält man nun die Reihensummirung

$$\frac{\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots$$

oder auch, wenn man beiderseits die Einheit hinzufügt,

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} = 1 + \dfrac{\beta}{\alpha+1} + \dfrac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dfrac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots \\ \alpha > \beta > 0. \end{cases}$$

Der zweite Fall $\alpha < \beta$ kann sehr leicht auf den ersten zurückgeführt werden, indem man

$$\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = \frac{1}{\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}}$$

setzt; rechter Hand nähert sich der im Nenner stehende Bruch der Grenze Null, der Bruch linker Hand wächt also in's Unendliche und daher ergiebt sich aus Nro. 1)

$$4)\quad \infty = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \dots$$
$$\beta > \alpha > 0.$$

Im letzten Falle $\beta = \alpha$ wird die betrachtete Reihe zur folgenden

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+2} + \frac{\alpha}{\alpha+3} + \dots\dots,$$

und ihre Summe erscheint, aus Nro. 1) abgeleitet, unter der Form $\frac{0}{0}$; wir bestimmen sie daher auf einem anderen Wege. Die bekannten Ungleichungen (s. §. 8, Nro. 4 und 5)

$$\frac{1}{a+1} < l(a+1) - la,$$

$$\frac{1}{a} > l(a+1) - la$$

ziehen wir vorerst in die folgenden zusammen

$$l(z+1) - lz < \frac{1}{z} < lz - l(z-1),$$

setzen dann $z = \alpha+1, \alpha+2, \dots \alpha+n$ und addiren Alles; dies giebt

$$5)\quad l(\alpha+n+1) - l(\alpha+1)$$
$$< \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3} + \dots + \frac{1}{\alpha+n} <$$
$$l(\alpha+n) - l\alpha.$$

Hieraus geht augenblicklich hervor, dass die Summe der zwischenliegenden Reihe gleichzeitig mit n in's Unendliche wächst.

Die Reihe

$$6)\quad 1 + \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots$$

convergirt daher für $\alpha > \beta > 0$ und divergirt in jedem anderen Falle, wobei α und β immer als positiv vorausgesetzt werden.

Wie man sieht, ist die Convergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe leicht zu entscheiden, sobald man die Summe ihrer n ersten Glieder finden kann; dies gelingt aber nur selten, und man muss sich daher nach anderen Kennzeichen der Convergenz oder Divergenz umsehen. Setzen wir zunächst alle Reihenglieder als positiv voraus und bezeichnen wir sie einfach mit u_0, u_1, u_2 etc., so leuchtet augenblicklich ein, dass dieselben fortwährend und in's Unendliche abnehmen müssen, d. h. dass $Lim\, u_n = 0$ werden muss (für $n = \infty$), wenn die Reihe convergiren soll; denn betrüge jeder Term mehr als irgend eine Zahl ε, so würde die Summe der unendlichen Reihe mehr als $\varepsilon + \varepsilon + \cdots$ in inf. ausmachen, d. h. unendlich gross sein. Dieses Criterium reicht aber nicht aus, wie man schon an der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ sehen kann, welche (nach Nro. 5) divergirt, obschon ihre Glieder in's Unendliche abnehmen. Die Sache bedarf daher einer genaueren Untersuchung, welche im Allgemeinen auf dem Principe beruht, eine gegebene Reihe mit einer anderen zu vergleichen, deren Convergenz oder Divergenz bereits festgestellt ist.

§. 37.

Reihen mit positiven Gliedern.

I. Die gegebene Reihe sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdot$$

und zugleich werde vorausgesetzt, dass der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten Grenze λ nähere; diese ist jedenfalls positiv, kann aber < 1, $= 1$ oder > 1 sein.

Wenn λ weniger als die Einheit beträgt, so muss der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von einer gewissen Stelle $n = k$ an kleiner als ein zwischen λ und 1 eingeschalteter ächter Bruch β bleiben, denn wenn dies

nicht der Fall wäre, so könnte sich $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht einer Grenze nähern, welche vorausgesetztermaassen unter β liegt. Man hat dann von $n = k$ an

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \beta, \quad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \beta, \quad \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < \beta, \ldots.$$

und erhält daraus sehr leicht

$$u_{k+1} < u_k \beta, \quad u_{k+2} < u_k \beta^2, \quad u_{k+3} < u_k \beta^3, \ldots$$

und durch Addition

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots \cdot$$
$$< u_k(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots \cdot).$$

Die Summen, welche entstehen, wenn man immer mehr Glieder der Reihe u_k, u_{k+1}, u_{k+2} etc. vereinigt, wachsen fortwährend, sie bleiben aber, wie die vorige Ungleichung zeigt, kleiner als

$$u_k(1 + \beta + \beta^2 + \cdots) = u_k \frac{1}{1-\beta},$$

und da dieser Ausdruck einen endlichen Werth hat, so muss die Summe der unendlichen Reihe $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} +$ etc. eine endliche Grösse sein. Durch Hinzufügung der endlichen Summe $u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$ erhält man wieder eine endliche Grösse, d. h. die Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ in inf. convergirt.

Wenn zweitens $\lambda > 1$ ist, so denke man sich zwischen 1 und λ den unächten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so gross, dass $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \gamma$ bleibt, was von einer gewissen Stelle $n = k$ an der Fall sein muss, weil sich ausserdem $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht einer über γ liegenden Grenze nähern könnte. Man erhält durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$$
$$> u_k(1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \cdots \cdots \cdots);$$

die rechter Hand stehende Reihe divergirt wegen $\gamma > 1$, mithin ist die Summe der Reihe links unendlich gross; dasselbe gilt dann von der Summe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. Nach diesen Erörterungen haben wir den Satz:

Die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem der Grenzwerth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

Als Beispiel diene die Reihe

$$1)\qquad \frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7}+\cdots;$$

hier ist $u_0=0$, $u_1=\frac{x}{1}$ u. s. w.

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=Lim\,\frac{(2n-1)^2x^2}{2n(2n+1)}=Lim\,\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2x^2}{1+\frac{1}{2n}}=x^2,$$

mithin convergirt die Reihe für $x<1$ und divergirt für $x>1$.

Ebenso leicht ergiebt sich, dass die Reihe

$$2)\qquad \frac{x}{1^p}+\frac{x^2}{2^p}+\frac{x^3}{3^p}+\frac{x^4}{4^p}+\cdots$$

für $x<1$ convergirt und für $x>1$ divergirt.

Wendet man überhaupt das obige Theorem auf eine sogenannte Potenzenreihe an, nämlich

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

worin x und alle a als positiv vorausgesetzt werden, so findet man leicht, dass dieselbe convergirt oder divergirt, je nachdem x weniger oder mehr als $Lim\,\frac{a_n}{a_{n+1}}$ beträgt.

Das soeben bewiesene Criterium verliert seine Anwendbarkeit in dem Falle $\lambda=1$, weil die Herleitung desselben auf der Voraussetzung beruht, dass zwischen 1 und λ eine Zahl eingeschaltet werden könne; der genannte Ausnahmefall bedarf daher einer weiteren Untersuchung.

II. Wenn das Product

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten endlichen Grenze μ nähert, so kann letztere (wegen $u_{n+1}<u_n$) nur eine positive Grösse sein, rücksichtlich deren wir die drei Fälle $\mu>1$, $\mu=1$ und $\mu<1$ unterscheiden.

Im Falle $\mu>1$ denken wir uns zwischen μ und 1 den unächten Bruch γ eingeschaltet und n so gross genommen, dass das oben erwähnte Product grösser als γ bleibt, was jedenfalls einmal geschehen wird. Von einer bestimmten Stelle $n=k$ an haben wir dann

$$k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)>\gamma,\ (k+1)\left(1-\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}\right)>\gamma,\ (k+2)\left(1-\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}}\right)>\gamma,$$

u. s. w.

und erhalten hieraus

$$u_{k+1}<\frac{k-\gamma}{k}u_k,\ u_{k+2}<\frac{k+1-\gamma}{k+1}u_{k+1}<\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)}u_k,$$

$$u_{k+3}<\frac{k+2-\gamma}{k+2}u_{k+2}<\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)}u_k,\dots$$

mithin durch Addition

$$\begin{aligned}&u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots\\ &<u_k\left\{1+\frac{k-\gamma}{k}+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)}+\dots\right\}.\end{aligned}$$

Die rechts stehende Reihe ist ein specieller Fall der Reihe Nro. 3) in §. 36 und zwar $\alpha=k-1$, $\beta=k-\gamma$, wobei immer $k>\gamma>1$ gewählt werden kann; auch convergirt unsere Reihe, weil $\gamma>1$, mithin $\alpha>\beta$ ist. Daraus folgt die Convergenz der Reihe linker Hand, sowie die Convergenz der Reihe $u_0+u_1+u_2+$ etc.

Wenn $\mu<1$ ist, so denke man sich zwischen μ und 1 den ächten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so gross, dass das Product $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ von einer bestimmten Stelle $n=k$ ab kleiner als γ bleibt. Durch ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin gelangt man jetzt zu der Ungleichung

$$\begin{aligned}&u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots\\ &>u_k\left\{1+\frac{k-\gamma}{k}+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)}+\dots\right\}.\end{aligned}$$

Wegen $\gamma<1$ divergirt die eingeklammerte Reihe, um so mehr divergirt auch die Reihe linker Hand, sowie die Reihe $u_0+u_1+u_2$ etc. Alles zusammen giebt den Satz

Die unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem der Grenzwerth des Productes

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Dieses Kennzeichen erledigt meistentheils die Fälle, wo das vorige keine Entscheidung giebt. So erhalten wir z. B. aus Nro. 1) für $x = 1$

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\,\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}}{1+\frac{1}{2n}} = \frac{3}{2} > 1$$

mithin convergirt die Reihe 1) auch für $x = 1$.

Für die Reihe 2) ist im Falle $x = 1$

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\left[n\left\{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right\}\right]$$

oder, wenn $\frac{1}{n} = \delta$ gesetzt wird,

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\left[\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}\cdot\frac{1}{(1+\delta)^p}\right] = p;$$

mithin convergirt oder divergirt die Reihe

3) $$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$$

je nachdem $p > 1$ oder $p < 1$ ist.

Da sie für $p = 1$ divergirt, wie wir schon aus §. 36 wissen, so sind jetzt alle möglichen Fälle erledigt.

Ein etwas zusammengesetzteres Beispiel bietet die Reihe

4) $$-l\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)-l\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)-l\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)-\cdots$$
$$= l\left(1+\frac{x^2}{1^2-x^2}\right)+l\left(1+\frac{x^2}{2^2-x^2}\right)+l\left(1+\frac{x^2}{3^2-x^2}\right)+\cdots,$$

worin x einen ächten Bruch bezeichnen möge. Hier liesse sich zwar das gegebene Criterium direct anwenden, würde aber zu einer etwas complicirten Rechnung führen. Kürzer gelangt man durch die Bemerkung zum Ziele, dass nach §. 8, Formel 5) jederzeit $l(1+h) < h$ ist und dass folglich die Summe der obigen Reihe weniger beträgt als

5) $$\frac{x^2}{1^2-x^2}+\frac{x^2}{2^2-x^2}+\frac{x^2}{3^2-x^2}+\cdots$$

Bezeichnet man die vorstehenden Summanden mit u_1, u_2, u_3 etc., so erhält man

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\,\frac{2n^2+n}{(n+1)^2-x^2}$$

$$= Lim\,\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2} = 2 > 1;$$

demnach convergirt die Reihe 5) und um so mehr die Reihe 4).

Es kann sich treffen, dass der mit μ bezeichnete Grenzwerth gerade $= 1$ wird; dann verliert das vorige Kennzeichen seine Anwendbarkeit und macht wieder eine neue Untersuchung nothwendig. Diese Fälle sind indessen so selten, dass wir die Aufstellung weiterer Convergenzregeln unterlassen können*).

§. 38.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Aus einer Reihe, welche Glieder mit verschiedenen Vorzeichen enthält, kann man eine neue Reihe dadurch bilden, dass man allen Gliedern das nämliche Vorzeichen giebt; wenn nun die letztere Reihe convergirt, so ist zu erwarten, dass auch die erste convergiren werde. In der That kann man sich hiervon durch sehr einfache Schlüsse überzeugen, die wir nur an dem Falle zu erörtern brauchen, wo die Vorzeichen alterniren. Die ursprüngliche Reihe ist dann

1) $$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots$$

und die abgeleitete

2) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

Wenn nun die letztere convergirt, so nähert sich jede der beiden Summen

$$\varphi(n) = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n-2}$$
$$\psi(n) = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

einer endlichen Grenze [im entgegengesetzten Falle wäre der Grenzwerth von $\varphi(n) + \psi(n)$ unendlich, was der Convergenz von Nro. 2) widerspräche], mithin ist auch der Grenzwerth von

$$\varphi(n) - \psi(n)$$
$$= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2n-2} - u_{2n-1}$$

*) Vergl. d. Verf. Handbuch der algebraischen Analysis; 3. Aufl. Jena 1861.

eine endliche Grösse; die Reihe 1) convergirt daher und hat eine kleinere Summe als die Reihe 2). Aehnliche Schlüsse gelten in jedem anderen Falle.

Bei den häufig vorkommenden Reihen mit alternirenden Vorzeichen kann man die Convergenz noch auf einem anderen und viel einfacheren Wege erkennen, sobald von einer bestimmten Stelle $n = k$ an jeder Term grösser als der nächstfolgende ist, also

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und ausserdem wie früher $Lim\, u_n = 0$. Setzen wir nämlich

$$R_1 = u_k,$$
$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}),$$
$$R_5 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+4}),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und beachten, dass alle eingeklammerten Differenzen positiv sind, so haben wir

3) $$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 \dots$$

Andererseits gilt für die Grössen

$$R_2 = (u_k - u_{k+1}),$$
$$R_4 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}),$$
$$R_6 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5}),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die Beziehung

4) $$R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \dots$$

Endlich ist bei unausgesetzt wachsenden m

$$Lim\,(R_{2m-1} - R_{2m}) = Lim\, u_{k+2m-1} = 0;$$

hieraus folgt, dass sich R_{2m-1} und R_{2m} einer und derselben Grenze R nähern, und zwar R_{2m-1} durch Abnahme, R_{2m} durch Zunahme. Dieses R muss aber eine endliche Grösse sein, weil es nach Nro. 4) positiv und nach Nro. 3) kleiner als jede der Zahlen R_1, R_3, R_5 etc. ist. Zufolge der Gleichung $R = Lim\, R_{2m-1} = Lim\, R_{2m}$ hat man

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

mithin convergirt die vorliegende Reihe und daher auch die Reihe $u_0 - u_1 + u_2$ etc. Dies giebt den Satz:

Eine Reihe mit alternirenden Vorzeichen convergirt immer, sobald ihre Glieder von einer bestimmten Stelle an fortwährend und in's Unendliche abnehmen.

Hieraus folgt z. B., dass die Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

convergirt und dass ihre Summe zwischen

$$\tfrac{1}{1} \text{ und } \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \text{ und } \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}$$

u. s. w.

enthalten ist; dagegen würde eine divergente Reihe entstehen, wenn man alle Glieder auf ihre absoluten Werthe reduciren wollte. Der obige Satz entscheidet daher auch in solchen Fällen, wo das vorige Kennzeichen zu keinem Resultate führen würde.

Wir wollen hier eine Eigenthümlichkeit erwähnen, die bei den divergenten Reihen mit alternirenden Vorzeichen stattfinden kann. Wenn nämlich $Lim\, u_n$ eine endliche, von Null verschiedene Grösse ϱ ist, so nähert sich $u_n - u_{n+1}$ der Grenze Null, und es kann sich treffen, dass die Reihen

$$S_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1})$$

$$S_{2m+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots - (u_{2m-1} - u_{2m})$$

convergiren, indem man jede eingeklammerte Differenz als ein Reihenglied betrachtet. Unter diesen Umständen sind $Lim\, S_{2m}$ und $Lim\, S_{2m+1}$ endliche Grössen, und als Grenzwerth ihrer Differenz erhält man

$$Lim\,(S_{2m+1} - S_{2m}) = Lim\, u_{2m} = \varrho,$$

d. h. die Summen der Reihenglieder

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots\cdot$$

nähern sich zwei endlichen, um ϱ von einander verschiedenen Grenzen, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Zahl von Gliedern zusammenrechnet. Divergente Reihen dieser besonderen Gattung hat man oscillirende Reihen genannt.

Das einfachste Beispiel hierzu bietet die Reihe

$$a - a + a - a + \cdots\cdot$$

deren Summe bei gerader Gliederzahl $= 0$, bei ungerader Gliederzahl $= a$ ist.

Als zweites Beispiel kann die Reihe

$$\tfrac{2}{1} - \tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{4} + \tfrac{6}{5} - \cdots\cdot$$

dienen. Hier ist

$$S_{2m} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots\cdot - \frac{1}{2m},$$

$$S_{2m+1} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots\cdot - \frac{1}{2m} + \frac{2m+2}{2m+1};$$

bezeichnen wir mit σ die Summe der unendlichen convergirenden Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots,$$

so erhalten wir

$$Lim\, S_{2m} = \sigma, \quad Lim\, S_{2m+1} = \sigma + 1,$$

mithin oscillirt die obige Reihe zwischen σ und $\sigma + 1$.

§. 39.

Bedingte und unbedingte Convergenz.

Die in §. 36 gezeigte Entstehungsweise der unendlichen Reihen beweist unmittelbar, dass durch die gegebene Function $\varphi(m)$ nicht nur die Grössen der einzelnen Reihenglieder $u_0 = \varphi(0)$, $u_1 = \varphi(1)$, $u_2 = \varphi(2)$ etc., sondern auch die Stelle eines jeden derselben bestimmt wird; die Anordnung der Glieder ändern, heisst demnach, die Function φ durch eine andere ersetzen, wobei sich nicht im Voraus absehen lässt, ob die Summe der Reihe ungestört bleiben wird oder nicht. In der That wird das folgende Beispiel zeigen, dass eine andere Anordnung der Reihenglieder zu einer anderen Reihensumme führen kann.

Wir betrachten die folgenden zwei convergirenden Reihen

$$\sigma = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \cdots,$$
$$s = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots,$$

deren zweite so aus der ersten gebildet ist, dass auf zwei positive Glieder ein negatives folgt; es darf dann σ als der Grenzwerth von

$$\sigma_n = (\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)$$

angesehen werden, ebenso s als Grenzwerth von

$$s_n = (\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz beider Gleichungen giebt

$$s_n - \sigma_n = \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right]$$

und hieraus folgt für $n = \infty$

$$s - \sigma = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots] = \tfrac{1}{2}\sigma$$

d. h. $$s = \tfrac{3}{2}\sigma,$$
womit die Verschiedenheit von σ und s dargethan ist.

Man erkennt demnach die Nothwendigkeit, zweierlei convergirende Reihen zu unterscheiden; ist die Summe der Reihe abhängig von der Anordnung der Glieder, wie im vorigen Beispiele, so heisst die Reihe bedingt-convergent, im Gegenfalle unbedingt-convergent. Daran knüpft sich gleichzeitig die Aufgabe, die Kennzeichen der unbedingten Convergenz aufzusuchen.

Wir bezeichnen mit U_n die Summe einer Reihe von n Gliedern, nämlich

1) $$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

und setzen voraus, dass (für $n = \infty$) $Lim\, U_n$ gleich einer bestimmten endlichen Grösse U sei, mithin

2) $$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots;$$

die vorliegende Reihe ist dann convergent. Ferner bedeute

3) $$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots$$

eine Reihe, welche aus Nro. 2) durch andere Anordnung der Glieder gebildet ist; es fragt sich dann, unter welchen Umständen die neue Reihe gleichfalls U zur Summe haben wird. Setzen wir vorläufig

4) $$V_p = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{p-1},$$

so können wir p so gross wählen, dass die vorliegende Reihe alle in Nro. 1) vorkommenden Glieder enthält und ausserdem noch $p - n$ anderweite Glieder, deren Indices grösser als $n - 1$ sind, und die wir in der Form

$$u_q + u_r + u_s + \cdots$$

zusammenfassen. Demnach ist

$$V_p - U_n = u_q + u_r + u_s + \cdots$$

mithin bei unendlich wachsenden p und n

$$Lim\, V_p - U = Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots);$$

soll nun die Reihe 3) gleichfalls U zur Summe haben, so muss $Lim\, V_p = U$ oder

5) $$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0$$

sein, und dies ist das Kennzeichen der unbedingten Convergenz der Reihe 2). Um aber den Gegenstand weiter zu verfolgen, wollen wir voraussetzen, dass die Reihe 2) von einer bestimmten Stelle an nur positive Glieder enthalte. Bei hinreichend grossen n sind dann alle in der Gleichung

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots$$

vorkommenden Glieder positiv, und die Summe $u_n + u_{n+1} +$ etc., der sogenannte Rest der Reihe, hat die Null zur Grenze, weil bei unendlich wachsenden n die linke Seite in $U - Lim\, U_n = 0$ übergeht. Nun besteht die Summe $u_q + u_r + u_s +$ etc. aus $p - n$ Gliedern, deren Indices $> n - 1$ sind; diese Glieder sind positiv und man hat desshalb

$$0 < u_q + u_r + u_s + \cdots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

mithin

$$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung convergirt also die Reihe unbedingt.

Diese Schlussweise ist nicht mehr anwendbar, wenn die ursprüngliche Reihe theils positive, theils negative Glieder enthält; derartige Reihen können daher möglicherweise zu den bedingt-convergirenden gehören. Nur in dem speciellen Falle, wo die Reihe auch dann convergent bleibt, wenn man statt jedes einzelnen Gliedes dessen absoluten Werth setzt, lässt sich die Sache folgendermaassen erledigen. Der absolute Werth irgend eines Gliedes u_m werde mit $[u_m]$ bezeichnet, dann ist zufolge der Voraussetzung

$$[u_0] + [u_1] + [u_2] + [u_3] + \cdots$$

eine convergente Reihe, mithin nach dem Vorigen

$$Lim\,\{[u_q] + [u_r] + [u_s] + \cdots\} = 0,$$

d. h. der absolute Werth von $u_q + u_r + u_s +$ etc. kann der Null beliebig nahe gebracht werden. Daraus folgt sehr leicht, dass

$$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0$$

sein, mithin die Reihe unbedingt convergiren muss. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

> Eine unendliche Reihe convergirt unbedingt, wenn sie ihre Convergenz auch in dem Falle behält, wo alle Glieder auf ihre absoluten Werthe reducirt werden.

Die anfangs erwähnte Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

genügt dieser Bedingung nicht, und es wird daher nicht überraschen, dass sie nur bedingt convergirt.

§. 40.

Convergenzbedingungen für periodische Reihen.

Wegen späterer Anwendungen betrachten wir noch Reihen von den Formen

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots,$$
$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots,$$

worin die Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc., b_1, b_2 etc. als positiv vorausgesetzt werden mögen. Wir unterscheiden dabei drei Hauptfälle; die Coefficienten können nämlich gleich sein, sie können zweitens eine steigende, oder drittens eine fallende Reihe bilden.

Für $a_0 = a_1 = a_2 \ldots$ ist nach einer bekannten Formel die Summe der n ersten Glieder

$$a_0 \left[\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos(n-1)x\right]$$
$$= a_0 \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

Bei unendlich wachsenden n oscillirt $\sin(n-\frac{1}{2})x$ zwischen -1 und $+1$ hin und her, ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern; die Reihe hat also, in's Unendliche fortgesetzt, keine angebbare Summe, d. h. sie divergirt. Zufolge der Gleichung

$$b_1 \left[\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin(n-1)x\right]$$
$$= b_1 \left[\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x - \frac{\cos(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right]$$

gelten ganz ähnliche Schlüsse für die zweite Reihe; letztere divergirt daher gleichfalls für $b_1 = b_2 = b_3$ etc.

Bilden a_0, a_1, a_2 etc. und ebenso b_1, b_2 etc. eine steigende Reihe, so findet offenbar die Divergenz um so mehr statt; demnach bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, wo jene Coefficienten eine abnehmende Reihe ausmachen.

Die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder der ersten Reihe heisse S_{n+1}; multipliciren wir die Gleichung

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

mit $2\sin\frac{1}{2}x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Product in die Differenz zweier Sinus, so erhalten wir

$$2\, S_{n+1} \sin\tfrac{1}{2}x$$
$$= a_0 \sin\tfrac{1}{2}x + a_1(\sin\tfrac{3}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x) + a_2(\sin\tfrac{5}{2}x - \sin\tfrac{3}{2}x) + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1}\left(\sin\frac{2n-1}{2}x - \sin\frac{2n-3}{2}x\right) + a_n\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

und bei anderer Anordnung

$$2\,sin\tfrac{1}{2}x\,.\,S_{n+1}-a_n\,sin\frac{2n+1}{2}x$$

$$=(a_0-a_1)\,sin\tfrac{1}{2}x+(a_1-a_2)\,sin\tfrac{3}{2}x+(a_2-a_3)\,sin\tfrac{5}{2}x+\cdots$$

$$\cdots+(a_{n+1}-a_n)\,sin\frac{2n-1}{2}x.$$

Unter der Voraussetzung, dass

1) $$a_0>a_1>a_2>a_3\cdots,\ \text{und}\ Lim\,a_n=0$$

ist, lassen wir n in's Unendliche wachsen und haben

2) $$Lim\,S_{n+1}=\frac{1}{2\,sin\frac{1}{2}x}\Big\{(a_0-a_1)\,sin\tfrac{1}{2}x+(a_1-a_2)\,sin\tfrac{3}{2}x+(a_2-a_3)\,sin\tfrac{5}{2}x+\cdots\Big\}.$$

Hinsichtlich der Reihe

3) $$(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots,$$

als deren Glieder die eingeklammerten Differenzen gelten mögen, ist nun klar, dass sie aus lauter positiven Gliedern besteht (wegen $a_0>a_1>a_2$ etc.) und dass die Summe ihrer n ersten Glieder $=a_0-a_n$, mithin ihre volle Summe $=a_0-Lim\,a_n=a_0$ ist; die Reihe 3) convergirt also. Um so mehr muss auch die Reihe

4) $$(a_0-a_1)\,sin\tfrac{1}{2}x+(a_1-a_2)\,sin\tfrac{3}{2}x+(a_2-a_3)\,sin\tfrac{5}{2}x+\cdots$$

convergiren, denn ihre Glieder sind, den absoluten Werthen nach, kleiner als die gleichstelligen Glieder der Reihe 3), und ausserdem besitzt die Reihe 4) theils positive, theils negative Glieder. Bezeichnen wir die jedenfalls endliche Summe der Reihe 4) mit $\varphi(x)$, so folgt aus Nro. 2)

$$Lim\,S_{n+1}=\frac{\varphi(x)}{2\,sin\frac{1}{2}x},$$

und hier ist die rechte Seite eine endliche Grösse, so lange x nicht einen der speciellen Werthe $0,\ \pm2\pi,\ \pm4\pi,\ \pm6\pi$ etc. erhält; d. h.

> Wenn die positiven Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. eine unendlich abnehmende Reihe bilden, so convergirt die periodische Reihe
>
> $$\tfrac{1}{2}a_0+a_1\,cos\,x+a_2\,cos\,2x+a_3\,cos\,3x+\cdots$$
>
> für alle x, die nicht von der Form $\pm2k\pi$ sind.

Indem man $\pi+x$ an die Stelle von x treten lässt, gelangt man zu dem zweiten Satze:

Unter den obigen Bedingungen convergirt auch die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x + \cdots$$

für alle x, die nicht von der Form $\pm (2k-1)\pi$ sind.

Um die entsprechenden Theoreme für die periodische Reihe der Sinus zu erhalten, multipliciren wir die Gleichung

$$S_n = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx$$

mit $2 \sin \frac{1}{2} x$ und zerlegen jedes Product zweier Sinus in eine Cosinusdifferenz; bei etwas anderer Anordnung ergiebt sich

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, S_n + b_n \cos \frac{2n+1}{2} x$$

$$= b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x - \cdots$$

$$\cdots - (b_{n-1} - b_n) \cos \frac{2n-1}{2} x \cdot$$

Vorausgesetzt, dass

$$b_1 > b_2 > b_3 \cdots, \quad \text{und} \quad Lim\, b_n = 0$$

ist, wird aus der vorigen Gleichung die folgende

$$Lim\, S_n = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left\{ b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x - \cdots \right\} \cdot$$

Die Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots$$

enthält lauter positive Glieder (jede eingeklammerte Differenz als ein Glied gerechnet) und ihre Summe ist $= b_1$; daher convergirt um so stärker die Reihe

$$(b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x + (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x + (b_3 - b_4) \cos \tfrac{7}{2} x + \cdots$$

und folglich hat auch die Reihe

$$b_1 \cos \tfrac{1}{2} x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2} x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2} x - \cdots$$

eine endliche Summe, die $\psi(x)$ heissen möge. Aus der nunmehrigen Gleichung

$$Lim\, S_n = \frac{\psi(x)}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

geht hervor, dass die betrachtete Reihe convergirt, wenn x keinen der Werthe $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc. erhält. Im letzteren Falle würde aber die Summe der Reihe verschwinden, und man kann daher sagen:

Wenn die Coefficienten b_1, b_2, b_3 etc. eine unendlich abnehmende Reihe bilden, so ist die periodische Reihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

convergent für jedes beliebige x.

Indem man $\pi + x$ an die Stelle von x treten lässt, gelangt man noch zu dem Satze:

Unter der obigen Voraussetzung ist auch

$$b_1 \sin x - b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x - \cdots$$

eine stets convergirende Reihe.

§. 41.

Addition und Multiplication unendlicher Reihen.

I. Es sei

1) $$P_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

2) $$Q_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

so ist auch, wenn a und b irgendwelche von n unabhängige Factoren bedeuten,

3) $$a u_0 + b v_0 + a u_1 + b v_1 + \cdots + a u_n + b v_n = a P_n + b Q_n.$$

Unter der Voraussetzung, dass $Lim\, P_n = P$ und $Lim\, Q_n = Q$ endliche Grössen sind, convergiren die Reihen 1) und 2), und zwar hat die erste, in's Unendliche fortgesetzt, P zur Summe, die zweite Q; ferner wird aus Nro. 3)

$$a u_0 + b v_0 + a u_1 + b v_1 + a u_2 + b v_2 + \cdots = Lim\,(a P_n + b Q_n) = a P + b Q.$$

Man kann dieses Ergebniss folgendermaassen aussprechen:

Das Aggregat zweier convergenten Reihen ist wieder eine convergirende Reihe und die Summe der letzteren gleich dem Aggregate von den Summen der ursprünglichen Reihen.

Dieser Satz gilt auch allgemeiner für jede endliche Anzahl gegebener convergirender Reihen.

II. Um den entsprechenden Satz für das Product zweier Reihen zu erhalten, lassen wir letztere nach Potenzen einer Variabelen x fortschreiten, wodurch die Uebersicht über die entsprechenden Partialproducte erleichtert wird. Es sei nämlich

$$P_{2n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n},$$

$$Q_{2n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{2n} x^{2n},$$

$$\begin{aligned}\text{mithin } P_{2n}\,Q_{2n} = a_0 b_0 &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} &+ \cdots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0)\,x^{2n} \\ + (a_1 b_{2n} + a_2 b_{2n-1} &+ \cdots + a_{2n-1} b_2 + a_{2n} b_1)\,x^{2n+1} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-1})\,x^{4n-1} \\ &+ a_{2n} b_{2n} x^{4n};\end{aligned}$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit dem folgenden

4) $$S_{2n} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 + \cdots \\ \cdots + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0)\,x^{2n},$$

indem man x sowie alle a und b als positiv voraussetzt, so erhellt unmittelbar die Richtigkeit der Ungleichung

$$S_{2n} < P_{2n}\,Q_{2n}.$$

Es sei ferner

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$
$$Q_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

mithin

$$\begin{aligned}P_n\,Q_n = a_0 b_0 &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1})\,x^{2n-1} \\ &+ a_n b_n x^{2n},\end{aligned}$$

so hat man durch Vergleichung mit S_{2n}

$$S_{2n} > P_n\,Q_n$$

und mit dem Vorigen zusammen

5) $$P_{2n}\,Q_{2n} > S_{2n} > P_n\,Q_n.$$

Bei unendlich wachsenden n werden die für P_{2n}, Q_{2n}, P_n, Q_n angegebenen Reihen gleichzeitig unendlich und im Falle der Convergenz sind

$$Lim\ P_{2n} = Lim\ P_n = P,$$
$$Lim\ Q_{2n} = Lim\ Q_n = Q$$

endliche Grössen; unter dieser Voraussetzung ergiebt sich aus Nro. 5) die Gleichung

6) $$Lim\ S_{2n} = P\,Q,$$

welche sagt, dass die Reihe 4), in's Unendliche fortgesetzt, convergirt und $P\,Q$ zur Summe hat.

Wenn die ursprünglichen zwei Reihen mit Gliedern von ungerader Stelle aufhören, d. h. von folgenden Formen sind

$$P_{2n+1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1},$$
$$Q_{2n+1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{2n} x^{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1},$$

so erleidet die vorige Betrachtung nur die kleine Modification, dass in Nro. 5)

$$P_{2n} = P_{2n+1} - a_{2n+1} x^{2n+1}, \quad Q_{2n} = Q_{2n+1} - b_{2n+1} x^{2n+1}$$

zu setzen ist. Zufolge der angenommenen Convergenz der Reihen wird dann

$$Lim\,(a_{2n+1} x^{2n+1}) = 0, \quad Lim\,(b_{2n+1} x^{2n+1}) = 0,$$
$$Lim\, P_{2n+1} = P, \quad Lim\, Q_{2n+1} = Q,$$

und damit kommt man wieder auf die Gleichung 6); d. h.:

Wenn die unendlichen und convergirenden Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

nur positive Glieder enthalten, so ist ihr Product eine gleichfalls convergente Reihe, nämlich

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots,$$

und die Summe der letzteren ist das Product aus den Summen der beiden ersten Reihen.

Die Schlüsse, mittelst deren die Ungleichung 5) hergeleitet wurde, verlieren ihre Anwendbarkeit in dem Falle, wo die ursprünglichen Reihen negative Glieder enthalten; denn es könnten z. B. die Glieder, um welche $P_{2n} Q_{2n}$ reicher als S_{2n} ist, zusammen so viel Negatives geben, dass $P_{2n} Q_{2n}$ weniger als S_{2n} betrüge. Unter diesen Umständen wäre es also möglich, dass die Reihe

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

divergirte, und dann würde ihre Summe nicht angebbar, mithin auch nicht $= P\,Q$ sein. Das wirkliche Vorkommen dieses Ausnahmefalles mag folgendes Beispiel zeigen.

Nimmt man

$$x = 1, \quad a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$$

und multiplicirt die convergente Reihe

$$7) \qquad P = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots$$

mit sich selbst, indem man die Glieder auf die obige Weise ordnet, so ergiebt sich eine neue Reihe

$$S = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \cdots,$$

deren ntes Glied ist:

$$t_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

Nach dem bekannten Satze, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen kleiner als deren arithmetisches Mittel ist, hat man

$$\sqrt{(n-k)(k+1)} < \frac{n+1}{2},$$

mithin

$$\sqrt[4]{(n-k)(k+1)} < \sqrt{\tfrac{1}{2}(n+1)}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{(n-k)(k+1)}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}};$$

nimmt man in der letzten Ungleichung $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und addirt alle entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$t_n > n\sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad \text{oder} \quad t_n > \sqrt{\frac{2n^2}{n+1}} > \sqrt{2(n-1)}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass t_n gleichzeitig mit n in's Unendliche wächst, dass also die Reihe S divergirt, mithin S nicht $= P^2$ sein kann.

Hiernach bedarf der Fall, wo die zu multiplicirenden Reihen negative Glieder enthalten, einer besonderen Untersuchung. Die Reihen mögen aus Gliedern mit alternirenden Vorzeichen bestehen, etwa

$$P = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots,$$
$$Q = b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \cdots,$$

und convergiren. Fassen wir alle positiven und ebenso alle negativen Glieder jeder Reihe zusammen, indem wir setzen

$$U_0 = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots,$$
$$U_1 = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots,$$
$$V_0 = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \cdots,$$
$$V_1 = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots,$$

so sind zwei Fälle möglich; es können nämlich die vorstehenden vier Reihen ebensowohl convergiren als divergiren *), und es sind

*) So convergirt z. B. die Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots,$$

aber die positiven Glieder, für sich genommen, liefern die divergente Reihe:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots > \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots),$$

und ebenso divergirt die Reihe der negativen Glieder:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots).$$

U_0, U_1, V_0, V_1 im ersten Falle endliche Grössen, im zweiten Falle unendlich gross. Beschränken wir uns auf den ersten Fall, so ist nach dem in Nro. I. bewiesenen Satze

$$P = U_0 - U_1, \qquad Q = V_0 - V_1;$$

ferner haben wir nach der Regel für die Multiplication solcher convergirender Reihen, die nur positive Glieder enthalten,

$$\begin{aligned}
U_0 V_0 &= a_0 b_0 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\
U_0 V_1 &= a_0 b_1 x + (a_0 b_3 + a_2 b_1) x^3 + \cdots \\
U_1 V_0 &= a_1 b_0 x + (a_1 b_2 + a_3 b_0) x^3 + \cdots \\
U_1 V_1 &= a_1 b_1 x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned}
&U_0 V_0 - U_0 V_1 - U_1 V_0 + U_1 V_1 \\
&= a_0 b_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 \\
&\qquad - (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)\, x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist eine endliche Grösse und identisch mit

$$(U_0 - U_1)\,(V_0 - V_1) = PQ,$$

mithin convergirt die erhaltene Reihe und hat PQ zur Summe. Wie man sieht, bleibt die frühere Multiplicationsregel ungestört bei endlichen U_0, U_1, V_0, V_1. Diese Bedingung ist aber erfüllt, wenn die Reihen P und Q ihre Convergenz auch in dem Falle beibehalten, wo man die negativen Glieder durch gleichgrosse positive ersetzt, denn sobald die Summe zweier positiven Grössen U_0 und U_1 oder V_0 und V_1 eine endliche Grösse ist, muss jeder Summand für sich von endlicher Grösse sein. Wir haben daher den Satz:

Wenn die unendlichen convergenten Reihen

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots,$$
$$b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \cdots$$

ihre Convergenz auch in dem Falle behalten, wo alle Glieder mit gleichen Vorzeichen genommen werden, so ist ihr Product eine gleichfalls convergirende Reihe:

$$a_0 b_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 - \cdots$$

und die Summe der letzteren ist das Product aus den Summen der beiden ersten Reihen.

Die Reihe 7) genügt der ausgesprochenen Bedingung nicht und daraus erklärt sich, dass ihr Quadrat, auf gewöhnliche Weise angeordnet, eine divergente Reihe liefert.

§. 42.

Die Differentiation unendlicher Reihen.

Schon in §. 6 wurde bemerkt, dass im Allgemeinen der Differentialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe nicht nothwendigerweise gleich der Summe von den Differentialquotienten der einzelnen Glieder sein müsse, dass man also aus der Gleichung

1) $$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

nicht ohne Weiteres auf die Richtigkeit von

2) $$\frac{dS}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots \text{ in inf.}$$

schliessen dürfe. Wir wollen dies jetzt näher untersuchen.

Da u_n und $\frac{du_n}{dx}$ ganz verschiedene Functionen von x sind, so kann es geschehen, dass die erste Reihe convergirt und gleichzeitig die zweite Reihe divergirt; dann ist aber die Summe der letzteren nicht angebbar und kann folglich auch der bestimmten Function $\frac{dS}{dx}$ nicht gleich sein, d. h. die Gleichung 2) besteht dann nicht. Dass derartige Fälle vorkommen, zeigt das Beispiel

$$S = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots.$$

Hier convergirt die Reihe für alle zwischen 0 und π enthaltenen x und daher ist S eine bestimmte Function von x; dagegen divergirt die Reihe der Differentialquotienten

$$-\sin x - \sin 2x - \sin 3x - \cdots$$

und folglich kann ihre Summe nicht $= \frac{dS}{dx}$ sein. Das Befremdliche, was für den ersten Anblick hierin liegen mag, verliert sich übrigens durch die Bemerkung, dass es bei der Differentiation unendlicher Reihen eigentlich auf die Umkehrung der Aufeinanderfolge zweier ganz verschiedenen Operationen ankommt. Bezeichnen wir nämlich den Differentialquotienten einer Function durch das Vorsetzen von D und die Summe von $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. kurz mit Σu, so ist in unserem Beispiele

$$S = \Sigma \frac{\cos nx}{n}, \quad (\text{für } n = 1, 2, 3 \ldots)$$

und daher auch

$$DS = D\Sigma\, \frac{\cos nx}{n};$$

dagegen ist nicht

$$DS = \Sigma D\, \frac{\cos nx}{n} = \Sigma\, (-\sin nx),$$

d. h. man darf die mit Σ und D bezeichneten Operationen nicht in umgekehrter Ordnung vornehmen.

Wie man aus dem Vorigen sieht, hört die Untersuchung darüber, ob überhaupt $D\Sigma u = \Sigma D u$ ist, sogleich auf, wenn die Reihe der Differentialquotienten divergirt, und die Frage kann daher nur noch sein, wie sich die Sache in dem Falle gestaltet, wo die Reihe der Differentialquotienten convergirt. Wir wollen die wichtigsten hierauf bezüglichen Sätze entwickeln.

I. Die Reihe 1) sei eine Potenzenreihe und $f(x)$ ihre Summe etwa

3) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Diese Reihe convergirt, wenn der absolute Werth von

$$Lim\, \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = Lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\, x\right)$$

weniger als die Einheit beträgt; setzen wir den absoluten Werth von

$$Lim\, \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$$

so können wir die ebenerwähnte Convergenzbedingung durch $-\lambda < x < +\lambda$ ausdrücken. Für alle derartigen x convergirt ferner die Reihe

$$1\, a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + 4\, a_4\, x^3 + \cdots$$

weil hier der absolute Werth von

$$Lim\, \frac{(n+1)\, a_{n+1}\, x^n}{n\, a_n\, x^{n-1}} = Lim\, \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{x}{\lambda} < 1$$

ist, mithin besitzt die zweite Reihe eine bestimmte Summe, die $\varphi(x)$ heissen möge, d. i.

4) $$\varphi(x) = 1\, a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + \cdots.$$

Da in den Gleichungen 3) und 4) x zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegt, so lässt sich immer eine willkührliche Zahl h von der Beschaffenheit finden, dass auch $x + h$ zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ enthalten ist, und dann gelten die Gleichungen

5) $f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \cdots\cdot$

6) $\varphi(x+h) = 1\,a_1 + 2\,a_2(x+h) + 3\,a_3(x+h)^2 + \cdots\cdot$

Von den Gleichungen 5) und 3) nehmen wir die Differenz, dividiren mit h und benutzen rechter Hand den Satz

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x+\vartheta h) \quad , \quad 0 < \vartheta < 1$$

oder specieller

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = m(x+\vartheta_m h)^{m-1}, \quad 0 < \vartheta_m < 1;$$

wir erhalten

7) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= 1\,a_1 + 2\,a_2(x+\vartheta_2 h) + 3\,a_3(x+\vartheta_3 h)^2 + 4\,a_4(x+\vartheta_4 h)^3 + \cdots$$

Um vorerst den einfachsten Fall zu erledigen, wollen wir annehmen, dass alle Coefficienten a_1, a_2 etc. positiv seien und dass x gleichfalls nur positive Werthe erhalte ($0 \leqq x < +\lambda$); die Summe der rechts stehenden Reihe ist dann, h als positiv vorausgesetzt, grösser als

$$1\,a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots\cdot\cdot = \varphi(x)$$

und kleiner als

$$1\,a_1 + 2\,a_2(x+h) + 3\,a_3(x+h)^2 + \cdots = \varphi(x+h),$$

wir haben also zusammen

$$\varphi(x) < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \varphi(x+h).$$

Bei negativen h ist dagegen

$$\varphi(x) > \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \varphi(x+h).$$

Aus beiden Ungleichungen folgt durch Uebergang zur Grenze für verschwindende h

$$\varphi(x) = f'(x);$$

unter den gemachten Voraussetzungen ist also die Summe der Reihe $1\,a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 +$ etc. gleich dem Differentialquotienten von der Summe der Reihe $a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 +$ etc.

Es kann sich in speciellen Fällen treffen, dass beide Reihen noch für $x = +\lambda$ convergiren; die vorige Betrachtung bleibt dann wörtlich dieselbe, nur muss man h negativ und seinen absoluten Werth $< \lambda$ wählen, um das Convergenzintervall nicht zu überschreiten.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo die Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots\cdot$$

positive und negative Glieder besitzt, wobei wir uns x immer als positiv vorstellen können, indem wir die verschiedenen Vorzeichen auf Rechnung der Coefficienten schreiben. Denken wir uns alle positiven Glieder zu einer Reihe zusammengefasst und ebenso alle negativen Glieder, so erscheint $f(x)$ als Differenz zweier Reihen, deren jede für sich nur positive Glieder besitzt. Diese Reihen convergiren zufolge der anfänglichen Voraussetzung, und daher sind ihre Summen bestimmte endliche Functionen von x, die wir mit $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bezeichnen wollen, so dass

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Für die Reihe 4) gilt Dasselbe und es sei $\varphi_1(x)$ die Summe aller positiven, $\varphi_2(x)$ die Summe aller negativen Glieder, mithin

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Aus dem vorigen Satze folgt nun

$$\varphi_1(x) = f_1'(x), \quad \varphi_2(x) = f_2'(x),$$

mithin

$$\varphi(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{d[f_1(x) - f_2(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx};$$

also ist auch hier

$$\varphi(x) = f'(x).$$

Wir haben jetzt folgendes Theorem:

Wenn die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

für alle zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ enthaltenen x gilt, so ist unter derselben Bedingung

$$f'(x) = 1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots;$$

diese Gleichung besteht auch noch an den Grenzen der Convergenz (für $x = \pm \lambda$), wenn in diesen Fällen beide Reihen convergiren.

II. Die vorigen Betrachtungen sind leicht auf den allgemeinen Fall auszudehnen, wo die einzelnen Glieder der ursprünglichen Reihe irgend welche Functionen von x bilden.

Es sei nämlich die ursprüngliche Reihe

8) $$f(x) = \psi(x, 0) + \psi(x, 1) + \psi(x, 2) + \cdots\cdots$$

convergent innerhalb eines gewissen Intervalles und jedes ihrer Glieder eine stetige Function von x; ferner convergire auch die Reihe der Differentialquotienten

9) $$\varphi(x) = \psi'(x, 0) + \psi'(x, 1) + \psi'(x, 2) + \cdots$$

von denen jeder einzelne gleichfalls continuirlich bleiben möge,

wenigstens innerhalb des Convergenzintervalles. Wählt man jetzt h so klein, dass $x + h$ die Grenzen der Convergenz nicht überschreitet, so erhält man

$$10)\qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \psi'(x + \vartheta_0 h, 0) + \psi'(x + \vartheta_1 h, 1) + \psi'(x + \vartheta_2 h, 2) + \cdots\cdot$$

und hier mag zunächst der Fall betrachtet werden, wo alle Glieder gleiche Vorzeichen besitzen.

Ist nun irgend eine einzelne Function $\Psi(z)$ und ein individueller Werth von z, etwa $z = x$, gegeben, so lässt sich h immer so klein wählen, dass die Function $\Psi(z)$ innerhalb des Intervalles $z = x$ bis $z = x + h$ entweder nur wächst oder nur abnimmt; man wird daher in den meisten Fällen*) h so klein nehmen können, dass j e d e der Functionen

$$\psi'(x, 0)\,,\quad \psi'(x, 1)\,,\quad \psi'(x, 2), \cdots\cdot$$

von x bis $x + h$ nur wächst oder nur abnimmt. Dies vorausgesetzt, ist unmittelbar einleuchtend, dass die Summe der in Nro. 10) vorkommenden Reihe zwischen

$$\psi'(x, 0) + \psi'(x, 1) + \psi'(x, 2) + \cdots = \varphi(x)$$

und

$$\psi'(x + h, 0) + \psi'(x + h, 1) + \psi'(x + h, 2) + \cdots = \varphi(x + h)$$

enthalten sein muss; es gilt folglich die Ungleichung

$$\varphi(x) \lessgtr \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lessgtr \varphi(x + h),$$

worin sich die oberen Zeichen auf wachsende, die unteren auf abnehmende ψ beziehen. Durch Uebergang zur Grenze für verschwindende h wird die vorige Ungleichung zur Gleichung

$$\varphi(x) = f'(x);$$

in diesem Falle ist also die Differentiation der Gleichung 8) erlaubt. Dasselbe gilt, wenn h so klein gewählt werden kann, dass von einer bestimmten unveränderlichen Stelle ab die Functionen

$$\psi'(x, m),\quad \psi'(x, m + 1),\quad \psi'(x, m + 2), \cdots\cdot$$

entweder nur wachsen oder abnehmen; denn man würde dann die Reihe 10) zerlegen in

$$\psi'(x + \vartheta_0 h, 0) + \psi'(x + \vartheta_1 h, 1) + \cdots + \psi'(x + \vartheta_{m-1} h, m - 1)$$
$$+ \psi'(x + \vartheta_m h, m) + \psi'(x + \vartheta_{m+1} h, m + 1) + \cdots\cdot$$

und jeden Theil besonders behandeln.

*) Ausnahmefälle sind in der That möglich, wie nachher gezeigt werden soll.

Durch ähnliche Betrachtungen wie im Abschnitte I. lässt sich der gefundene Satz auch auf den Fall ausdehnen, wo die Reihe 10) positive und negative Glieder besitzt; die Aufstellung eines allgemeinen Theorems mag aber unterbleiben, weil dieses an so viele Bedingungen geknüpft ist, dass es eine unförmliche und unbequeme Gestalt erhalten würde.

Noch wollen wir mit wenigen Worten des Ausnahmefalles gedenken. Ist z. B. $x \leqq 1$ und

$$\psi(x, n) = \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{x}{2n+2}\right) x^{2n+1},$$

$$\psi'(x, n) = (1-x)\, x^{2n},$$

so kann man zwar für $x < 1$ dem h einen solchen Werth geben, dass $\psi'(x, m)$, $\psi'(x, m+1)$ etc. zwischen x und $x+h$ nur wachsen oder nur abnehmen, für $x = 1$ und ein negatives $h = -\delta$ ist dies aber nicht mehr möglich. Die Function $\psi'(x, n)$ erreicht nämlich für $x = \frac{2n}{2n+1}$ ihr Maximum; man mag nun δ so klein wählen wie man will, so würde es doch immer Reihenglieder geben, für welche

$$1 - \delta < \frac{2n}{2n+1} < 1$$

ist oder deren Maxima zwischen $1-\delta$ und 1 eintreten, die also innerhalb dieses Intervalles zu- und abnehmen. Die Reihe der Differentialquotienten ist daher bei diesem Beispiele zwar für $x < 1$, aber nicht für $x = 1$ giltig.

III. Das bequemste Verfahren, um über die Anwendbarkeit der gewöhnlichen Differentiationsregel zu entscheiden, besteht darin, dass man noch die zweiten Differentialquotienten der Reihenglieder berücksichtigt, indem man von dem Satze*)

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x) + \tfrac{1}{2} h\, \psi''(x + \vartheta h)$$

Gebrauch macht. Lässt man nämlich in der Gleichung

11) $$f(x) = \psi(x, 0) + \psi(x, 1) + \psi(x, 2) + \cdots$$

x um h wachsen, ohne das Convergenzintervall zu überschreiten, so erhält man nach dem erwähnten Satze

*) Dieser ist ein specieller Fall der Formel 18) in §. 18 und folg aus letzterer für $f = \psi$, $a = x$, $n = 2$.

$$12)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \psi'(x,0) + \psi'(x,1) + \psi'(x,2) + \psi'(x,3) + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}h\,[\psi''(x+\vartheta_0 h, 0) + \psi''(x+\vartheta_1 h, 1) + \psi''(x+\vartheta_2 h, 2) + \cdots]$$

Hier ist einfach zu untersuchen, in wie weit die Reihe

$$\psi''(x+\vartheta_0 h, 0) + \psi''(x+\vartheta_1 h, 1) + \psi''(x+\vartheta_2 h, 2) + \cdots$$

convergirt; so lange sie diese Eigenschaft besitzt, so lange ist ihre Summe eine endliche Grösse, etwa $\Psi(x, h)$, und wenn sie dies auch für $h = 0$ bleibt, so wird

$$Lim\,[h\,\Psi(x, h)] = 0,$$

mithin nach Nro. 12)

$$13)\qquad f'(x) = \psi'(x,0) + \psi'(x,1) + \psi'(x,2) + \cdots$$

Als Beispiel diene folgender Fall. Es sei x ein ächter Bruch $\psi(x, 0) = 0$ und

$$\psi(x, n) = -\,l\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = u_n;$$

nach §. 37 (Formel 4) convergirt dann die Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. Setzen wir daher

$$14)\ f(x) = -\,l\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right) - l\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) - l\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right) - \cdots$$

so folgt

$$15)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \frac{2x}{1^2-x^2} + \frac{2x}{2^2-x^2} + \frac{2x}{3^2-x^2} + \cdots$$
$$+ h\left\{\frac{1^2+(x+\vartheta_1 h)^2}{[1^2-(x+\vartheta_1 h)^2]^2} + \frac{2^2+(x+\vartheta_2 h)^2}{[2^2-(x+\vartheta_2 h)^2]^2} + \cdots\right\}$$

wobei h so klein gewählt werden muss, dass auch $x + h$ ein ächter Bruch ist. Die Summe der letzten Reihe wird zu gross, wenn man statt $x + \vartheta_2 h$, $x + \vartheta_3 h$ etc. die grössere Einheit setzt, es ist daher

$$0 < \Psi(x,h) < \frac{1+(x+\vartheta_1 h)^2}{[1-(x+\vartheta_1 h)^2]^2} + \frac{2^2+1}{(2^2-1)^2} + \frac{3^2+1}{(3^2-1)^2} + \cdots;$$

hier convergirt die von x unabhängige Reihe und hat eine numerische Summe S, mithin ist

$$0 < h\,\Psi(x, h) < \frac{h\,[1+(x+\vartheta_1 h)^2]}{[1-(x+\vartheta_1 h)^2]^2} + h\,S$$

und

$$Lim\,[h\,\Psi(x, h)] = 0.$$

Die Gleichung 15) liefert nun

$$f'(x) = \frac{2x}{1^2 - x^2} + \frac{2x}{2^2 - x^2} + \frac{2x}{3^2 - x^2} + \cdots\cdots$$

und daraus erhellt, dass im vorliegenden Falle die Differentiation der Gleichung 14) erlaubt ist.

§. 43.

Die unendlichen Doppelreihen.

Unter einer Doppelreihe oder einer Reihe mit doppeltem Eingange versteht man ein Aggregat von folgender Form:

$$\begin{array}{ll} 1) & u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots \\ & + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + u_3^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots \\ & + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + u_3^{\mathrm{II}} + \cdots\cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{array}$$

das allgemeine Glied derselben wird durch $u_n^{(m)}$ dargestellt, wo m und n ganze positive Zahlen bedeuten. Man kann sich die obige unendliche Doppelreihe dadurch entstanden denken, dass man in der endlichen, aus mn Gliedern bestehenden Doppelreihe

$$\begin{array}{ll} 2) & u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{n-1} \\ & + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots + u_{n-1}^{\mathrm{I}} \\ & + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + \cdots\cdots + u_{n-1}^{\mathrm{II}} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_0^{(m-1)} + u_1^{(m-1)} + u_2^{(m-1)} + \cdots\cdots + u_{n-1}^{(m-1)} \end{array}$$

die Zahlen m und n gleichzeitig in's Unendliche wachsen lässt; bezeichnet daher $S_n^{(m)}$ die Summe der endlichen Doppelreihe 2), so muss man unter der Summe der unendlichen Doppelreihe 1) den Grenzwerth verstehen, welchem sich $S_n^{(m)}$ bei *gleichzeitig* unendlich werdenden m und n nähert. Im Fall dieser Grenzwerth existirt und von endlicher Grösse ist, heisst die unendliche Doppelreihe *convergent*, ausserdem *divergent*.

I. Setzen wir zunächst voraus, dass die unendliche Doppelreihe nur positive Glieder besitze und S zur Summe habe, so ist

$$
3) \qquad S - S_n^{(m)}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad u_n + u_{n+1} + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + \cdots\cdots \\
& + u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + \cdots\cdots + u_n^{(m)} + u_{n+1}^{(m)} + \cdots\cdots \\
& + u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + \cdots\cdots + u_n^{(m+1)} + u_{n+1}^{(m+1)} + \cdots\cdots \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

und da, der Voraussetzung zufolge, $S_n^{(m)}$ bei gleichzeitig in's Unendliche wachsenden m und n der Grenze S zustrebt, so kann die linke Seite der vorstehenden Gleichung, mithin auch die Summe aller rechts verzeichneten Grössen kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden, wenn man m und n gross genug wählt. Wegen des positiven Vorzeichens aller Glieder kommt dieselbe Eigenschaft auch folgenden Grössen zu:

$$
\begin{aligned}
\varrho_n = \; & u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots \\
& + u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + u_{n+2}^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + u_{n+2}^{(m-1)} + \cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varrho^{(m)} = \; & u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + \cdots\cdots + u_{n-1}^{(m)} \\
& + u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + \cdots\cdots + u_{n-1}^{(m+1)} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^{(m)} = \; & u_n^{(m)} + u_{n+1}^{(m)} + \cdots\cdots \\
& + u_n^{(m+1)} + u_{n+1}^{(m+1)} + \cdots\cdots \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

denn es besteht jede dieser Summen aus weniger Gliedern, als auf

der rechten Seite von Nro. 3) verzeichnet sind *). Die nunmehrige Gleichung

$$4)\qquad S - S_n^{(m)} = \varrho_n + \varrho^{(m)} + \sigma_n^{(m)}$$

gestattet eine doppelte Schreibweise; man kann erstens dafür setzen

$$5)\qquad S - \varrho^{(m)} - \sigma_n^{(m)} = S_n^{(m)} + \varrho_n,$$

und hier steht auf der rechten Seite die Summe der m ersten Horizontalreihen aus Nro. 1). Bezeichnen wir nämlich, wie folgt,

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots \text{ in inf.}$$

$$s^{\mathrm{I}} = u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots\cdots$$

u. s. w.

wo s, s^{I}, s^{II} etc. selbstverständlich endliche Grössen sind, so hat man statt der Gleichung 5)

$$S - \varrho^{(m)} - \sigma_n^{(m)} = s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + \cdots + s^{(m-1)}.$$

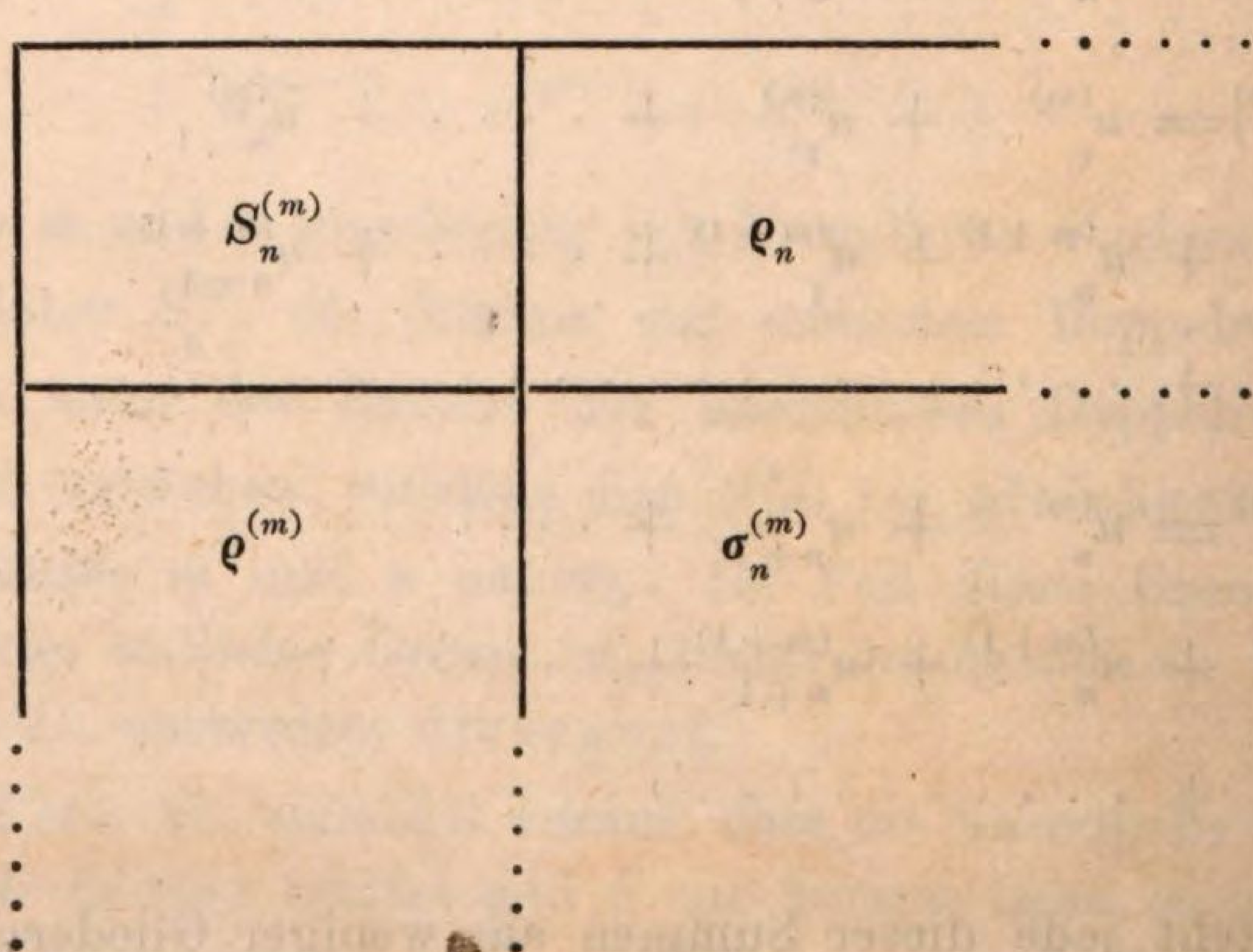
Bei unendlich wachsenden m und n wird hieraus, weil dann $\varrho^{(m)}$ und $\sigma_n^{(m)}$ gegen die Null convergiren,

$$6)\qquad S = s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots\cdots$$

Ferner kann man statt der Gleichung 4) schreiben

$$S - \varrho_n - \sigma_n^{(m)} = S_n^{(m)} + \varrho^{(m)}$$

*) Die Bedeutung von ϱ_n, $\varrho^{(m)}$ und $\sigma_n^{(m)}$ wird durch folgendes Schema vollkommen anschaulich:



und hier enthält die rechte Seite die n ersten Verticalcolonnen aus Nro. 1). Für

$$s_0 = u_0 + u_0^{\mathrm{I}} + u_0^{\mathrm{II}} + \cdots \text{ in inf.}$$
$$s_1 = u_1 + u_1^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{II}} + \cdots\cdots$$
u. s. w.

ist nämlich

$$S - \varrho_n - \sigma_n^{(m)} = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$$

und hieraus wird bei unendlich wachsenden m und n

7) $$S = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdots$$

Die Gleichungen 6) und 7) geben zusammengenommen folgenden Satz:

Wenn eine nur positive Glieder enthaltende Doppelreihe convergirt, so kann man sie sich ebensowohl aus einzelnen Horizontalreihen als aus Verticalcolonnen zusammengesetzt denken; die so gebildeten Reihen convergiren und haben dieselbe Summe.

II. Bei der vorigen Betrachtung wurde angenommen, dass die Convergenz der Doppelreihe bekannt sei, und hieraus die Convergenz der einfachen Reihen hergeleitet, welche entstehen, wenn man die Summen der Horizontalreihen oder der Verticalreihen als Glieder neuer Reihen (6 und 7) betrachtet; es fragt sich nun, ob diese Schlüsse umgekehrt gelten.

Die Glieder der gegebenen Doppelreihe denken wir uns zunächst auf ihre absoluten Werthe reducirt und bezeichnen letztere wieder mit u_0, u_1 etc. u_0^{I}, u_1^{I} etc. Ferner setzen wir voraus, dass die Reihe der Horizontalsummen s, s^{I}, s^{II} etc. convergire und S zur Summe habe; es ist dann

$$S = s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots$$

Zieht man hiervon die Summe der m ersten Glieder ab, die mit $S^{(m)}$ bezeichnet werden möge, so bleibt

$$S - S^{(m)} = s^{(m)} + s^{(m+1)} + s^{(m+2)} + \cdots$$

Für hinreichend grosse m kann die linke Seite kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden (wegen $S = Lim\, S^{(m)}$); von der rechten Seite gilt dasselbe, und wenn daher ε irgend eine willkührliche Zahl bezeichnet, so kann m immer so gross gewählt werden, dass

$$
\begin{aligned}
8) \qquad & s^{(m)} + s^{(m+1)} + s^{(m+2)} + \cdots \\
= & u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + \cdots \\
+ & u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + u_2^{(m+1)} + \cdots \\
+ & u_0^{(m+2)} + u_1^{(m+2)} + u_2^{(m+2)} + \cdots \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

weniger als $\frac{1}{2}\varepsilon$ beträgt. Andererseits sind s, s^{I}, s^{II} etc., der Voraussetzung nach, endliche Grössen, mithin convergiren die gleichgeltenden Horizontalreihen, z. B.

$$s^{(m)} = u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + \cdots$$

Zieht man hiervon die Summe der n ersten Glieder ab, so bleibt

$$u_n^{(m)} + u_{n+1}^{(m)} + u_{n+2}^{(m)} + \cdots$$

und durch ähnliche Schlüsse wie vorhin überzeugt man sich leicht, dass diese Summe kleiner als jede angebbare Zahl, also auch $< \frac{1}{2m}\varepsilon$ gemacht werden kann, wenn n wächst. Die Summe der m Reihen

$$
\begin{aligned}
& u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \\
+ & u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + u_{n+2}^{\mathrm{I}} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + u_{n+2}^{(m-1)} + \cdots
\end{aligned}
$$

lässt sich daher unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ herabbringen. Vereinigen wir diese m Reihen mit denen in Nro. 8), so gelangen wir zu dem Resultate, dass die Summe der Glieder

$$
\begin{aligned}
& & & u_n + u_{n+1} + \cdots \\
& & + & u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + \cdots \\
& & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& & + & u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + \cdots \\
+ & u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

kleiner als ε gemacht werden kann, also jedenfalls eine endliche Grösse ist. Durch Hinzufügung der in $S_n^{(m)}$ enthaltenen Glieder entsteht jetzt eine Doppelreihe mit gleichfalls endlicher Summe. Unter Rücksicht auf Nro. I. giebt dies folgenden Satz:

Wenn die absoluten Werthe der Glieder einer unendlichen Doppelreihe, in Horizontalreihen gruppirt, lauter convergente Reihen geben und wenn die Reihe der Horizontalsummen wiederum convergirt, so ist auch die Doppelreihe convergent und es bleibt dann gleichgiltig, ob man die Glieder in horizontaler oder in verticaler Richtung vereinigt.

Dass dieser Satz zu gelten aufhört, wenn die absoluten Werthe der Reihenglieder nicht mehr convergente Reihen liefern, mag folgendes lehrreiche Beispiel zeigen. Die unendliche Doppelreihe sei

$$\begin{array}{l}
\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) - \cdots \\
+ \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 - \cdots \\
+ \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3 + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3 - \cdots \\
+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot
\end{array}$$

worin je zwei in derselben Horizontalreihe stehende Glieder sich aufheben; die Reihe der Horizontalsummen ist hier

$$\begin{aligned}
& s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots \\
&= \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 + \cdots\cdots \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = +\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Für die Reihe der Verticalsummen findet man

$$\begin{aligned}
& s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdots \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5} - \cdots\cdots;
\end{aligned}$$

hier ist bei Addition einer ungeraden $(2k-1)$ Anzahl von Gliedern

$$S_{2k-1} = +\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad Lim\, S_{2k-1} = +\tfrac{1}{2},$$

dagegen bei Zusammenfassung von $2k-2$ Gliedern

$$S_{2k-2} = \tfrac{1}{2} - \frac{k}{k+1}, \quad Lim\, S_{2k-2} = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2},$$

woraus erhellt, dass die Reihe der Verticalsummen nicht convergirt, sondern zwischen $+\tfrac{1}{2}$ und $-\tfrac{1}{2}$ hin und her oscillirt.

Das für den ersten Augenblick befremdliche Resultat, dass die betrachtete Doppelreihe bei der einen Anordnung eine bestimmte Summe liefert und bei der anderen unbestimmt wird, erklärt sich sehr einfach, wenn man erst die Summe $S_n^{(m)}$ aufsucht. Man findet

$$S_n^{(m)} = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{m+1} - \left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

und um hieraus die Summe der unendlichen Doppelreihe abzuleiten,

muss man m und n gleichzeitig in's Unendliche wachsen lassen; dies giebt

$$S = \tfrac{1}{2} - 1 + Lim\,Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right].$$

Denkt man sich in dem letzten Ausdrucke erst m als constant und vergrössert n in's Unendliche, so hat man

$$Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 1, \text{ mithin } Lim\,Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 1,$$

$$\text{und } S = + \tfrac{1}{2}.$$

Lässt man dagegen zuerst n constant und m in's Unendliche wachsen, so ergiebt sich

$$Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 0, \text{ mithin } Lim\,Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 0$$

$$\text{und } S = - \tfrac{1}{2}.$$

Man könnte aber auch m und n gleichzeitig, in irgend einem Verhältnisse zu einander, unendlich vermehren; setzt man z. B. $m + 1 = hn$, wo h eine constante positive ganze Zahl bedeutet, so wird

$$Lim\,Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = Lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{hn}\right] = e^{-h},$$

$$S = - \tfrac{1}{2} + e^{-h}.$$

Man sieht aus diesen Erörterungen, dass $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m+1}$ bei gleichzeitig unendlich wachsenden m und n sich keiner bestimmten Grenze nähert; dasselbe gilt von $S_n^{(m)}$ und daher ist die betrachtete Doppelreihe divergent, obschon sowohl die Horizontalreihen als auch die Reihe der Horizontalsummen convergiren. Dagegen würden die absoluten Werthe der Reihenglieder keine convergirenden Reihen liefern (es wäre schon $s = \infty$) und eben desshalb besteht das vorhin ausgesprochene Theorem nicht mehr.

III. Es seien P und Q die Summen der beiden convergirenden Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

von denen wir voraussetzen, dass sie ihre Convergenz beibehalten, wenn die Reihenglieder auf ihre absoluten Werthe reducirt werden; in der Doppelreihe

$$\begin{array}{l} u_0 v_0 + u_1 v_0 + u_2 v_0 + u_3 v_0 + \cdots \\ \quad + u_0 v_1 + u_1 v_1 + u_2 v_1 + \cdots \\ \quad\quad + u_0 v_2 + u_1 v_2 + \cdots \\ \quad\quad\quad + u_0 v_3 + \cdots \\ \quad\quad\quad\quad + \cdots\cdots \end{array}$$

convergiren nun die Horizontalreihen und haben die Summen

$$Pv_0\,,\quad Pv_1\,,\quad Pv_2\,,\quad Pv_3\,,\cdots,$$

auch convergirt die Reihe der Horizontalsummen

$$Pv_0 + Pv_1 + Pv_2 + Pv_3 + \cdots$$
$$= P(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = PQ.$$

Zufolge des in II. ausgesprochenen Theoremes convergirt jetzt die vorige Doppelreihe und darf nach Verticalcolonnen geordnet werden, d. h. die neue Reihe

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0)$$
$$+ (u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \cdots$$

ist convergent und hat PQ zur Summe. Die Betrachtung der Doppelreihen führt demnach auf den in §. 44, II. entwickelten Satz zurück.

Cap. VII.

Die Potenzenreihen.

§. 44.

Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin.

Unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ $\ldots f^{(n)}(x)$ endlich und stetig bleiben, so lange x das Intervall $x = a$ bis $x = a + h$ nicht überschreitet, gilt nach §. 18, Nro. 17) die Formel

$$1) \quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdot + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p} h^n}{1.2\ldots(n-1).p} f^{(n)}(a + \vartheta h),$$

worin p eine beliebige Grösse, ϑ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bezeichnet. Lässt man, wie es üblich ist, x an die Stelle des beliebigen a treten, so hat man in der obigen Formel ein Mittel, um die Aenderung zu berechnen, welche $f(x)$ erleidet, wenn x um h zunimmt. Wie man sieht, erscheint $f(x+h)$ als Summe von $n+1$ Summanden; die n ersten Summanden stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$\frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(x)$$

und bilden daher eine endliche Reihe, welche nach Potenzen von h fortschreitet; der letzte Summand ist von abweichender Form und bildet das sogenannte Ergänzungsglied oder den Rest der Reihe.

Bezeichnet man den Rest mit R_n, so kann man die Gleichung 1) auch folgendermaassen darstellen

$$2)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2\ldots(n-1)}h^{n-1} + R_n,$$

$$3)\qquad R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(x+\vartheta h)}{1.2.3\ldots(n-1).p}h^n.$$

Dies ist der sogenannte Taylor'sche Satz, welcher aber nur unter der Bedingung gilt, dass die Functionen f, f', f'', . . . $f^{(n)}$ innerhalb des Intervalles x bis $x+h$ endlich und stetig bleiben.

Setzt man in der Formel 1) $a = 0$ und schreibt zugleich x für h, so gelangt man zu dem Theoreme von Mac Laurin nämlich

$$4)\qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n,$$

$$5)\qquad R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2\ldots(n-1).p}x^n,$$

dessen Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass die Functionen f, f', f'', . . . $f^{(n)}$ endlich und stetig bleiben innerhalb des Intervalles 0 bis x. Der Mac Laurin'sche Satz bietet das Mittel, um jede, der vorigen Bedingung genügende Function in eine endliche Reihe zu verwandeln, welche nach Potenzen der Variabelen x fortschreitet.

Die Formeln 3) und 5) enthalten einen positiven echten Bruch ϑ, dessen Betrag nicht bekannt ist; in Folge dieses Umstandes lässt sich auch der genaue Werth des Restes nicht angeben, sondern nur sein Maximum und Minimum. Um diesem Uebelstande zu entgehen, ist es in vielen Fällen zweckmässig, die Zahl n in's Unendliche wachsen, d. h. die endliche Reihe zu einer unendlichen werden zu lassen. Giebt man nämlich der Gleichung 2) die Form

$$f(x+h) - R_n = f(x) + \frac{f'(x)}{1}h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{1.2\ldots(n-1)}h^{n-1},$$

so folgt bei unendlich wachsenden n

$$f(x+h) - Lim\, R_n = f(x) + \frac{f'(x)}{1}h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \cdots\cdots$$

hier kann es geschehen, dass

$$Lim\, R_n = 0$$

wird und in diesem Falle gelangt man zu der Gleichung

6) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1.2} h^2 + \cdots.$$

Ein analoger Satz ergiebt sich aus Nro. 4); unter der Bedingung

$$Lim\, R_n = 0$$

wird nämlich

7) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \cdots.$$

Dass die in Nro. 6) und 7) erhaltenen unendlichen Reihen convergiren, versteht sich ihrer Herleitung zufolge von selbst *).

So lange die Function $f(x)$ nicht specialisirt wird, kann man begreiflicherweise nicht entscheiden, ob die unter Nro. 5) und 7) verzeichneten Reste bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze haben werden oder nicht; dies ist in jedem gegebenen Falle Sache einer besonderen Untersuchung. Letztere kann man sich häufig durch den Satz erleichtern, dass eine gegebene Function $\psi(n)$ bei unendlich wachsenden n sicher gegen die Null convergirt, sobald sich der Quotient $\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ einer Grenze λ nähert, deren absoluter Werth ein echter Bruch ist. Bezeichnet nämlich k denjenigen individuellen Werth des n, von welchem ab jener Quotient kleiner bleibt als ein zwischen 1 und λ eingeschalteter echter Bruch β, so gelten wie in §. 37 für die absoluten Werthe von $\psi(k)$, $\psi(k+1)$ etc. die Ungleichungen

$$\psi(k+1) < \psi(k)\beta, \quad \psi(k+2) < \psi(k)\beta^2, \ldots.$$
$$\psi(k+m) < \psi(k)\beta^m;$$

die letzte derselben kann unter der Form

$$0 < \psi(n) < \psi(k)\beta^{n-k}$$

dargestellt werden und führt, wegen $Lim\, \beta^n = 0$, sofort zu dem erwähnten Satze **).

*) Dieser Satz darf übrigens nicht umgekehrt werden, d. h. aus der Convergenz der Reihe folgt keineswegs die Gleichung $Lim\, R_n = 0$. Es lässt sich daraus nur schliessen, dass die Summe der Reihe mithin auch $Lim\, R_n$ eine endliche Grösse sein muss. Ob diese von Null verschieden oder $= 0$ ist, würde dann immer noch einer besonderen Untersuchung bedürfen.

**) Ebenso leicht erkennt man, dass $\psi(n)$ in's Unendliche wächst, falls der absolute Werth von $Lim \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ die Einheit übersteigt.

Die Formel 7) zeigt, wie man eine Function $f(x)$ unter gewissen Bedingungen in eine nach Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe verwandeln kann, und es lässt sich erwarten, dass diese Umwandlung nur auf eine einzige Art möglich sein wird. Die letztere Bemerkung bedarf indessen einer genaueren Untersuchung; wir wollen daher eine Gleichung von der Form

8) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

als bestehend voraussetzen und umgekehrt fragen, welche Werthe dann die Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. haben müssen.

Zum Bestehen der Gleichung 8) gehört vor Allem die Convergenz der vorkommenden Reihe; der absolute Werth von

$$Lim \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = x \; Lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

darf mithin die Einheit nicht übersteigen, folglich muss $Lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ eine endliche Grösse sein, welche α heissen möge; die Convergenz der Reihe findet dann sicher statt, wenn der absolute Werth von αx ein echter Bruch ist oder

$$-\frac{1}{\alpha} < x < +\frac{1}{\alpha}.$$

Bezeichnen wir den absoluten Werth einer Zahl z wieder mit $[z]$, so haben wir nach der gemachten Voraussetzung

$$Lim \left[\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right] = [\alpha x] < 1,$$

bei hinreichend grossen n muss folglich der genannte Quotient kleiner bleiben als ein zwischen $[\alpha x]$ und 1 eingeschalteter echter Bruch ε. Derartige Werthe von n mögen k, $k+1$, $k+2$ etc. sein; nach einer oft gebrauchten Schlussweise findet sich dann

$$[a_{k+1}\, x^{k+1}] < [a_k x^k]\, \varepsilon, \quad [a_{k+2}\, x^{k+2}] < [a_k\, x^k]\, \varepsilon^2, \ldots .$$

mithin

$$[a_k x^k] + [a_{k+1}\, x^{k+1}] + [a_{k+2}\, x^{k+2}] + \cdots$$
$$< [a_k\, x^k]\, \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Zerlegen wir nun die Reihe 8) wie folgt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$$
$$+ a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2}\, x^{k+2} + \cdots,$$

so beträgt der absolute Werth des zweiten Theiles rechter Hand weniger als der vorhin gefundene Ausdruck, und daher lässt sich die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen

9) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1} + \frac{\varrho\, a_k\, x^k}{1-\varepsilon}$,

worin ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet. Für $x = 0$ folgt hieraus

10) $$f(0) = a_0,$$

womit der Werth von a_0 bestimmt ist. Subtrahirt man die Gleichung 10) von der Gleichung 9) und dividirt mit x, so hat man weiter

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-2} + \frac{\varrho\, a_k\, x^{k-1}}{1-\varepsilon};$$

beim Uebergange zur Grenze für verschwindende x nimmt der Quotient linker Hand die Form $\frac{0}{0}$ an, man findet aber nach der Regel des §. 31

11) $$\frac{f'(0)}{1} = a_1.$$

Vermöge der Werthe von a_0 und a_1 hat man weiter aus Nro. 9)

$$\frac{f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1} x}{x^2}$$
$$= a_2 + a_3 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-3} + \frac{\varrho\, a_k\, x^{k-2}}{1-\varepsilon}$$

und als Grenzwerth für verschwindende x

12) $$\frac{f''(0)}{1 \,.\, 2} = a_2.$$

Auf gleiche Weise fortgehend, erhält man für irgend einen Coefficienten a_m, wenn $k > m$ genommen wird,

$$a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}.$$

Demnach lässt sich eine gegebene Function $f(x)$ nur auf eine Weise in eine unendliche unbedingt convergirende Potenzenreihe verwandeln.

Eine Folge dieses Satzes ist, dass eine Gleichung zwischen zwei convergirenden Potenzenreihen, also eine Gleichung von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

nur bestehen kann, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von x identisch sind, nämlich $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ u. s. w.

§. 45.

Der binomische Satz.

Da wir die Entwickelung von $(1+x)^\mu$ für den Fall eines ganzen positiven μ bereits in §. 7 erledigt haben, so setzen wir im Folgenden immer voraus, dass μ keine ganze positive Zahl sei. Behufs der Anwendung des Theoremes von Mac Laurin nehmen wir ferner

$$f(x) = (1+x)^\mu$$

und haben

$$f^{(k)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[k-1])(1+x)^{\mu-k}$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[k-1])}{(1+x)^{k-\mu}},$$

wobei die zweite Form für $k > \mu$ dient, welcher Fall früher oder später eintritt. Sollen nun $f(x), f'(x), f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben, so darf der Nenner $(1+x)^{k-\mu}$ nicht verschwinden, mithin ist, wenn man von $x=0$ ausgeht, x auf das Intervall -1 bis $+\infty$ zu beschränken, so dass

$$-1 < x < +\infty$$

die erste Bedingung der Entwickelung ist. Nach den Formeln 4) und 5) des vorigen Paragraphen erhalten wir jetzt

1) $$(1+x)^\mu - R_n$$
$$= 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-2])}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1},$$

2) $$R_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots.(n-1).p} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-p}x^n}{(1+\vartheta x)^{n-\mu}}.$$

Um zu erfahren, unter welchen Umständen der Rest bei unendlich wachsenden n gegen die Null convergirt, nehmen wir zuerst $p=1$ und ertheilen dem R_n folgende Form

$$R_n = (-1)^{n-1}\mu x(1+\vartheta x)^{\mu-1}\left(1-\frac{\mu}{1}\right)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}.$$

Da x zwischen -1 und $+\infty$ liegt, so ist $1+\vartheta x$ jedenfalls

positiv, mithin $\mu x(1+\vartheta x)^{\mu-1}$ eine endliche Grösse; daher fragt sich nur noch, ob alle übrigen Factoren zusammen ein Product geben, welches bei unendlich wachsenden n der Grenze Null zustrebt. Nennen wir ξ den absoluten Werth von x, so ist für positive x, d. h. für $x = \xi$,

$$\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x} = \frac{\xi - \vartheta \xi}{1+\vartheta \xi} < \xi,$$

und bei negativen x, d. h. für $x = -\xi$, wobei ξ ein echter Bruch sein muss,

$$\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x} = \frac{-\xi+\vartheta\xi}{1-\vartheta\xi} = -\frac{\xi-\vartheta\xi}{1-\vartheta\xi};$$

der absolute Werth des letzten Bruches beträgt weniger als ξ, mithin ist in jedem Falle

$$\left[\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right] < \xi,$$

wofern nur x zwischen -1 und $+\infty$ liegt. Aus den bisherigen Schlüssen geht hervor, dass $Lim\, R_n = 0$ wird, sobald der Ausdruck

$$\psi(n) = \left(1-\frac{\mu}{1}\right)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)\xi^{n-1}$$

bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze hat. Da nun

$$Lim\,\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = Lim\left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\xi\right] = \xi$$

ist, so findet die letztere Bedingung in dem Falle $\xi < 1$ sicher statt, während dagegen für $\xi > 1$ sowohl $Lim\,\psi(n)$ als $Lim\, R_n$ unendlich werden würden. Aus der Gleichung 1) folgt jetzt durch Uebergang zur Grenze für $n = \infty$

$$3)\quad (1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Die beiden extremen Fälle $x = +1$ und $x = -1$ bedürfen noch einer speciellen Untersuchung. Für $x = +1$ haben wir aus Nro. 2), indem wir die beliebige Zahl p durch n ersetzen,

$$4)\quad R_n = (1+\vartheta)^{-\mu}\,\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,n}\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^n.$$

Der erste Factor ist immer von endlicher Grösse; der letzte Factor liegt zwischen 0 und 1, doch darf man hieraus nicht schliessen, dass

$$Lim\left[\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^n\right]=0$$

sein müsse, weil ϑ auf unbekannte Weise von n abhängt *); das Verschwinden von R_n findet daher nur in dem Falle sicher statt, wo der zweite Factor gegen die Null convergirt. Um hierüber urtheilen zu können, unterscheiden wir die Fälle eines positiven und eines negativen μ. Bei positiven μ giebt es immer zwei aufeinander folgende ganze positive Zahlen $k-1$ und k, zwischen denen μ enthalten ist; dem entsprechend kann folgende Zerlegung vorgenommen werden

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2.3\ldots.n}=$$

$$(-1)^{n-k}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-[k-1])}{1.2\ldots k}\cdot\frac{(k-\mu)(k-\mu+1)\ldots(k-\mu+n-k-1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-k)}.$$

Der erste Bruch rechter Hand besitzt einen unveränderlichen Werth; der zweite Bruch ist von der Form

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+m-1)},$$

$$\alpha=k+1,\quad \beta=k-\mu,\quad m=n-k$$

und hat nach §. 36 die Null zur Grenze, weil hier $\alpha>\beta$ ist. Für jedes endliche positive μ gilt daher die Gleichung

$$5)\qquad Lim\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2.3\ldots.n}=0.$$

Wenn zweitens μ negativ etwa $\mu=-\lambda$ ist, so wird

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2.3\ldots.n}$$

$$=(-1)^n\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

und nach dem vorhin erwähnten Satze convergirt der Bruch rechter Hand gegen die Null, wenn $1>\lambda$, d. h. $-1<-\lambda$ oder $-1<\mu$ ist. Die Formel 5) gilt daher unter der Bedingung $-1<\mu<+\infty$, und dann hat man auch $Lim\,R_n=0$.

Im zweiten Hauptfalle $x=-1$ giebt die Formel 2)

$$6)\quad R_n=(-1)^n\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots.(n-1).p}(1-\vartheta)^{\mu-p}.$$

*) So würde z. B. für $\vartheta=\frac{1}{n}$ der obige Grenzwerth nicht $=0$ sondern $=\frac{1}{e}$ werden.

Wir betrachten hier zuerst den Fall, wo μ negativ $= -\lambda$ ist und nehmen dann $p = 1$; die rechte Seite der Gleichung

$$R_n = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)} \cdot \frac{\lambda}{(1-\vartheta)^{\lambda+1}}$$

besteht jetzt aus zwei Factoren, von denen der erste in's Unendliche wächst, während der zweite jedenfalls mehr als λ beträgt; demnach wird $Lim\, R_n = \infty$. Ist dagegen μ positiv, so kann man $p = \mu$ nehmen und erhält aus Nro. 6)

$$7) \qquad R_n = (-1)^n \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots\ldots(n-1)},$$

mithin nach 1)

$$(-1)^{n-1} \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots\ldots(n-1)}$$

$$= 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-[n-2])}{1.2\ldots\ldots(n-1)}.$$

Dieses Resultat bestätigt sich auch durch die identische Gleichung (§. 36)

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+m-1)}$$

$$= 1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(\beta-\alpha)\beta(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(\beta-\alpha)\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+m-2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+m-1)},$$

welche für $\alpha = 1$, $\beta = 1-\mu$, $m = n-1$ Dasselbe giebt. Durch die Schlüsse, womit die Gleichung 5) erreicht wurde, überzeugt man sich ohne Mühe, dass auch hier

$$Lim \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots\ldots(n-1)} = 0$$

mithin $Lim\, R_n = 0$ ist. Alles Bisherige führt zusammengenommen zu folgendem Theoreme:

Die binomische Entwickelung

$$(1+x)^\mu$$

$$= 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

gilt für jedes endliche μ, wenn der absolute Werth von x ein echter Bruch ist; im Falle $x = +1$, muss

dagegen μ zwischen -1 und $+\infty$ liegen, und im Falle $x = -1$ darf μ nur positiv sein.

Häufig vorkommende specielle Fälle dieses allgemeinen Binomialtheorems sind:

8) $$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots\cdot,$$
$$-1 < x < +1;$$

9) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \cdots\cdot,$$
$$-1 < x < +1;$$

10) $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} - \cdots\cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

aus der letzten Gleichung erhält man noch durch Anwendung einer bekannten Formel

11) $$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^5}{10} + \cdots\cdot,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Handelt es sich um die Entwickelung der μten Potenz einer zweitheiligen Grösse, so nenne man a denjenigen Theil, dessen absoluter Werth der grössere ist, und b den übrigen Theil; es ist dann

12) $$(a+b)^\mu = a^\mu\left(1 + \frac{b}{a}\right)^\mu$$
$$= a^\mu\left[1 + \frac{\mu}{1}\frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots\cdot\right],$$
$$-1 < \frac{b}{a} < +1.$$

Diese Formel lässt sich u. A. zur Ausziehung der Wurzeln beliebig hoher Grade anwenden; so ist z. B.

$$\sqrt[3]{132} = \sqrt[3]{125+7} = \sqrt[3]{125\left(1 + \frac{7}{125}\right)}$$
$$= 5\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{125} - \frac{1.2}{3.6}\left(\frac{7}{125}\right)^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{7}{125}\right)^3 - \cdots\right\},$$

$$\sqrt[4]{76} = \sqrt[4]{81-5} = \sqrt[4]{81\left(1-\frac{5}{81}\right)}$$

$$= 3\left\{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{81} - \frac{1.3}{4.8}\left(\frac{5}{81}\right)^2 - \frac{1.3.7}{4.8.12}\left(\frac{5}{81}\right)^3 - \ldots\right\}.$$

Das hierbei befolgte Princip wird man leicht erkennen.

§. 46.

Die logarithmischen Reihen und die Exponentialreihen.

I. Die Annahme

$$f(x) = l(1+x)$$

giebt zunächst

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-1)}{(1+x)^k},$$

woraus ersichtlich ist, dass $f(x), f'(x), f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben so lange x zwischen -1 und $+\infty$ liegt. Unter dieser Voraussetzung führt das Theorem von Mac Laurin zu folgender Gleichung

1) $$l(1+x) - R_n$$
$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1},$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-p}\,x^n}{p(1+\vartheta x)^n}.$$

Für $p = 1$ erhält der Rest die einfachere Form

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{x}{1+\vartheta x}\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1};$$

wegen $-1 < x < +\infty$ ist $1 + \vartheta x$ positiv, mithin der erste Bruch jederzeit von endlicher Grösse; ferner gilt wie im vorigen Paragraphen die Bemerkung, dass der absolute Werth von $\dfrac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}$ weniger beträgt als der absolute Werth von x. Der Rest convergirt daher gegen die Null, wenn der absolute Werth von x ein echter Bruch ist; bei dieser Voraussetzung folgt aus Nro. 1)

2) $$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Die extremen Fälle $x = +1$ und $x = -1$ verlangen eine besondere Untersuchung. Für $x = +1$ ergiebt sich, wenn $p = n$ genommen wird,

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\vartheta)^n}$$

mithin bei unendlich wachsenden n

$$Lim\, R_n = 0.$$

Für $x = -1$ wird

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-\vartheta)^n};$$

hier wächst zwar der erste Factor des Nenners in's Unendliche, dagegen könnte ϑ die Einheit zur Grenze haben und folglich der Nenner die unbestimmte Form $\infty \,.\, 0$ erhalten; man darf daher nicht behaupten, dass $Lim\, R_n = 0$ sei. Nach diesen Bemerkungen haben wir

3) $$l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
$$-1 < x \leqq +1.$$

Lässt man $-x$ an die Stelle von x treten, so folgt

4) $$l(1-x) = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots,$$
$$-1 \leqq x < +1;$$

die Differenz der Gleichungen 3) und 4) ist

5) $$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots\right),$$
$$-1 < x < +1.$$

Für $x = \dfrac{z-1}{z+1}$, wo z jede positive Zahl sein darf, folgt weiter

6) $$lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right],$$

und damit ist, wenigstens theoretisch, die Aufgabe gelöst, zu jeder positiven Zahl den natürlichen Logarithmus zu finden. Bei kleinen Werthen von z, wie z. B. für $z = 2$ und $z = 3$, ist die Formel 6) zur numerischen Berechnung vollkommen brauchbar; bei grösseren z, z. B. schon für $z = 10$, convergirt dagegen die Reihe so langsam, dass sie praktisch nicht mehr benutzt werden kann.

Aus der Bemerkung, dass $l(a+b) = la + l\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$ ist, erhält man leicht unter Anwendung von Nro. 3)

7) $$l(a+b) = la + \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \cdots,$$
$$-1 < \frac{b}{a} \leqq +1;$$

diese Formel, welche auch mittelst des Taylor'schen Satzes entwickelt werden kann, dient zur Berechnung von $l(a+b)$, wenn la bekannt ist. Eine zu demselben Zwecke noch bequemere Formel ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$l(a+b) = la + l\left(\frac{1+\dfrac{b}{2a+b}}{1-\dfrac{b}{2a+b}}\right)$$

wenn der zweite Logarithmus rechter Hand nach Nro. 5) entwickelt wird, nämlich

$$8)\quad l(a+b) = la + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \cdots\right].$$

Diese Formel gilt für alle positiven a und b, weil dann $\dfrac{b}{2a+b}$ immer ein echter Bruch ist. Hat man aus Nro. 6) den Betrag von $l\,2$ gefunden, so kann man jetzt $l\,3$, $l\,4$, $l\,5$ etc. berechnen, indem man $b = 1$ und $a = 2, 3, 4$ etc. setzt; selbstverständlich braucht man nur die Logarithmen der Primzahlen mittelst unendlicher Reihen zu berechnen.

Die künstlichen Logarithmen der Zahlen lassen sich aus deren natürlichen Logarithen auf folgende Weise herleiten. Es ist gleichzeitig

$$z = e^{lz} \text{ und } z = b^{{}^b\!\log z},$$

mithin, wenn man von beiden rechten Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt und vergleicht,

$$lz \,.\, le = {}^b\!\log z \,.\, lb \text{ oder } lz = {}^b\!\log z \,.\, lb,$$

und umgekehrt

$${}^b\!\log z = \frac{1}{lb}\, lz = M_b\, lz,$$

wo M_b den sogenannten Modulus des aus der Basis b construirten Logarithmensystems bezeichnet. Für das Brigg'sche System ist $b = 10$ und nach den vorigen Formeln

$$l\,10 = 2{,}30258509, \quad M_{10} = 0{,}43429448.$$

II. Nehmen wir $f(x) = e^x$, so ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und es bleiben daher $f(x), f'(x), f''(x)$ etc. durchaus endlich und stetig; der Mac Laurin'sche Satz giebt dann

$$e^x - R_n$$

$$= 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1\,.\,2}x^2 + \cdots + \frac{1}{1\,.\,2\,...\,(n-1)}x^{n-1},$$

und zwar ist, wenn $p = n$ gesetzt wird,

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} e^{\vartheta x}.$$

Man übersieht augenblicklich, dass $Lim\, R_n = 0$ wird, sobald x eine endliche Grösse ist, und wenn der Ausdruck

$$\psi(n) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

gegen die Null convergirt; wegen

$$Lim\, \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = Lim\, \frac{x}{n+1} = 0$$

findet die letztere Eigenschaft bei jedem endlichen x statt, mithin ist $Lim\, R_n = 0$ und

9) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $x = 1$ erhält man ein Resultat, welches im Wesentlichen mit dem übereinstimmt, was in §. 7 gefunden wurde.

Lässt man $-x$ an die Stelle von x treten, so ergiebt sich aus Nro. 9) die Gleichung

10) $$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

welche mit der vorigen durch Addition oder Subtraction verbunden werden kann; man erhält

11) $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

12) $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} + \ldots.$$

Die Formel 9) führt auch zur Entwickelung einer beliebigen Exponentialgrösse a^x, wenn nur deren Basis a positiv ist; man hat nämlich

13) $$a^x = (e^{la})^x = e^{xla}$$
$$= 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man in Nro. 9) $e^x = z$ und nimmt beiderseits die Logarithmen irgend eines Systemes, so folgt $x = \frac{\log z}{\log e}$, mithin

14) $$z = 1 + \frac{1}{1}\,\frac{\log z}{\log e} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\log z}{\log e}\right)^2 + \ldots$$

Hierin liegt die Lösung der Aufgabe, aus dem Logarithmus einer

Zahl die letztere herzuleiten. Am einfachsten wird die Formel bei natürlichen Logarithmen.

§. 47.

Goniometrische und cyclometrische Reihen.

I. Da die Differentialquotienten des Cosinus abwechselnd Sinus und Cosinus, mithin jederzeit endlich und stetig sind, so lässt sich der Mac Laurin'sche Satz auf den Fall $f(x) = \cos x$ anwenden und giebt, wenn im Reste $p = n$ genommen wird,

$$1)\qquad \cos x - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots 6} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}.$$

Aus Abschnitt II. des vorigen Paragraphen weiss man ferner, dass bei unendlich wachsenden n

$$Lim\,\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ist; verbindet man hiermit die Bemerkung, dass $\cos(\frac{1}{2}n\pi + \vartheta x)$ nicht über das Intervall -1 bis $+1$ hinausgeht, so gelangt man zu der Formel

$$2)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots 6} + \cdots,$$

welche für jedes endliche x gilt.

II. Auf ganz ähnlichem Wege findet man

$$3)\qquad \sin x - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x)$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots 5} - \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}$$

und bei unendlich werdenden n

$$4)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots 5} - \cdots.$$

Da sich aus $\sin x$ und $\cos x$ die übrigen goniometrischen Functionen des Bogens x herleiten lassen, so ist hiermit das Problem der Berechnung aller goniometrischen Functionen gelöst. Uebrigens werden wir später noch besondere Reihen für $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ und $\csc x$ entwickeln.

III. Um das Theorem von Mac Laurin auf den Fall $f(x) = arcsin\,x$ anzuwenden, lassen wir zunächst $n+1$ an die Stelle von n treten und schreiben demgemäss

$$f(x) - R_{n+1}$$
$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n.$$

Aus der in §. 14, Nro. 7) entwickelten Formel

$$f^{(k+1)}(x) = D^{k+1}\,arcsin\,x =$$
$$\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^k(1-x)^k\sqrt{1-x^2}}\left\{1 - \frac{1\,(k)_1}{2k-1}\,\frac{1-x}{1+x} + \frac{1.3\,(k)_2}{(2k-1)(2k-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \ldots\right\}$$

geht nun zunächst hervor, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben so lange x^2 die Einheit nicht erreicht; wir müssen daher $-1 < x < +1$ voraussetzen. Die genannte Formel liefert auch die Werthe von $f'(0)$, $f''(0)$ etc., doch kann man dieselben kürzer aus der Relation

$$f^{(k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\,x\,f^{(k+1)}(x) + k^2 f^{(k)}(x)}{1-x^2}$$

herleiten (§. 14, Nro. 6); es folgt nämlich

$$f^{(k+2)}(0) = k^2 f^{(k)}(0)$$

mithin, weil $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist,

$$f''(0) = 0\,,\quad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0\quad,\quad f^{\mathrm{VI}}(0) = 0\qquad,\ldots.$$
$$f'''(0) = 1^2,\quad f^{\mathrm{V}}(0) = 1^2.3^2,\quad f^{\mathrm{VII}}(0) = 1^2.3^2.5^2,\ldots.$$

Denken wir uns n als ungerade Zahl, so haben wir bis jetzt folgendes Resultat

5)
$$arcsin\,x - R_{n+1}$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\,\frac{x^n}{n},$$

welches noch durch eine Discussion des Restes zu vervollständigen ist. Wollte man letztere auf die bisherige Weise ausführen, so würde man eine etwas complicirte Untersuchung anstellen müssen; wir benutzen daher ein anderes Verfahren. Dieses beruht auf der Bemerkung, dass der Differentialquotient von $arcsin\,x$ eine algebraische Function, nämlich gleich der Potenz $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist und dass folglich der Differentialquotient der Gleichung 5) mit einer nach dem binomischen Satze vorgenommenen Entwickelung übereinstimmen muss. Um diesen Gedanken auszuführen, bezeichnen wir den Rest R_{n+1}, der jedenfalls von x abhängt, mit $\varphi(x)$, und setzen $n = 2m - 1$; es ist dann

$$6)\qquad arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \varphi(x)$$

und durch Differentiation

$$7)\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}x^{2m-2} + \varphi'(x).$$

Andererseits ist, wenn man in Formel 9) des §. 45 $-x^2$ für x setzt,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}x^{2m-2}$$

$$+ \frac{1.3..(2m-1)}{2.4\ldots.(2m)}x^{2m}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}x^4 + \cdots\right\}$$

und nun giebt die Vergleichung beider Resultate

$$\varphi'(x) =$$

$$\frac{1.3..(2m-1)}{2.4\ldots.(2m)}x^{2m}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}x^4 + \cdots\right\}.$$

Aus den Gleichungen 6) und 7) geht ferner hervor, dass $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben; zur Ermittelung von $\varphi(x)$ lässt sich daher das Theorem

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(\vartheta x)$$

benutzen, und zwar giebt dies, weil $\varphi(0) = 0$ ist,

$$\varphi(x) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots.(2m)}\vartheta^{2m}x^{2m+1}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}\vartheta^2 x^2\right.$$

$$\left. + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}\vartheta^4 x^4 + \cdots\right\}.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe liegt zwischen Null und

$$1 + \vartheta^2 x^2 + \vartheta^4 x^4 + \cdots = \frac{1}{1-\vartheta^2 x^2},$$

sie kann daher mit

$$\frac{\varepsilon}{1-\vartheta^2 x^2}$$

bezeichnet werden, wo ε einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch vorstellt. Zufolge des hiermit gefundenen Werthes von $\varphi(x)$ ist nun nach Nro. 7)

$$8)\qquad arcsin\, x - \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2m)}\,\frac{\varepsilon\vartheta^{2m}x^{2m+1}}{1-\vartheta^2x^2}$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2m-3)}{2.4\ldots(2m-2)}\,\frac{x^{2m-1}}{2m-1}.$$

Die hier vorkommende Reihe zählt m Glieder und wird unendlich für $m = \infty$; wegen $x^2 < 1$ ist in diesem Falle $Lim\, x^{2m} = 0$, während $1 - \vartheta^2 x^2$ immer von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt sehr leicht, dass sich der Rest der Grenze Null nähert und dass mithin die Gleichung besteht:

$$9)\qquad arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

$$-1 < x < +1.$$

Für $x = \pm 1$ verliert diese Schlussweise ihre Gültigkeit; der Rest erhält nämlich die Form

$$\pm\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2m)}\cdot\frac{\varepsilon\vartheta^{2m}}{1-\vartheta^2}$$

und besteht aus zwei Factoren, deren erster zwar gegen die Null convergirt, von denen aber der zweite unendlich wird, falls ϑ die Einheit zur Grenze hat, was man nicht wissen kann. Wir stellen daher noch folgende Betrachtung an.

Bezeichnet u einen Bogen des ersten Quadranten, so gilt die Gleichung

$$sin\,\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-cos\,u}{2}}\ \text{ oder }\ \tfrac{1}{2}u = arcsin\sqrt{\frac{1-cos\,u}{2}},$$

worin das Wurzelzeichen im absoluten Sinne zu nehmen ist; für $sin\,u = x$ wird $cos\,u = \sqrt{1-x^2}$, $u = arcsin\,x$, mithin

$$10)\qquad \tfrac{1}{2}\,arcsin\,x = arcsin\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = arcsin\,y,$$

wobei y eine von selbst verständliche Abkürzung vorstellt. Wäre nun die Gleichung 9) auch nur für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ bewiesen, so könnte man doch die rechte Seite von Nro. 10)

entwickeln, da hier y das Intervall 0 bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$ durchläuft, wenn x von 0 bis 1 geht; demgemäss ist

$$\tfrac{1}{2}\,arcsin\,x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} + \tfrac{1}{6}\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}\right]^3 + \cdots$$

Das erste Glied lässt sich für alle, die Einheit nicht übersteigenden Werthe von x^2 in eine Potenzenreihe verwandeln, wie Formel 11) in §. 45 zeigt; dasselbe gilt von den übrigen Gliedern, wenn man beide Seiten der erwähnten Formel der Reihe nach auf die 3te, 5te etc. Potenz erhebt; man hat daher

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,arcsin\,x = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{7}{256}x^5 + \cdots\\ + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{64}x^5 + \cdots)\\ + \tfrac{3}{40}(\tfrac{1}{32}x^5 + \cdots)\\ + \cdots\cdots\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe erfüllt alle Bedingungen, welche nach §. 41 nöthig sind, um die Reihenglieder in Verticalcolonnen summiren zu dürfen; vereinigt man daher die unter einander stehenden Glieder und multiplicirt nachher mit 2, so gelangt man zu der Gleichung

11) $$arcsin\,x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \cdots,$$

und zwar gilt dieselbe von $x=0$ bis $x=1$ oder auch von $x=-1$ bis $x=+1$, da beide Seiten immer gleiche Vorzeichen besitzen. Zufolge des in §. 44 bewiesenen Satzes muss die jetzige Entwickelung 11) mit der früheren 9) identisch sein; formell gelangt man also zu keinem neuen Resultate, wohl aber erfährt man, dass die Gleichung 9) auf das Intervall $x=-1$ bis $x=+1$ ausgedehnt werden darf, wenn sie früher auch nur von $x=0$ bis $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ gegolten hätte.

Giebt man dem x einen solchen Zahlwerth, dass $arcsin\,x$ einen bekannten aliquoten Theil der Kreisperipherie ausmacht, so erhält man in jedem Falle eine Reihe zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl; so ist z. B. für $x=\frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5\,.\,2^5} + \cdots$$

Die Specialisirungen $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $x=1$ liefern ähnliche Reihen, jedoch convergiren letztere zu langsam für die numerische Berechnung.

Aus Formel 9) lässt sich endlich noch eine Reihe für *arccos* x ableiten, wenn man von der Beziehung

$$arccos\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arcsin\, x$$

Gebrauch macht.

IV. Die in §. 14, IV. entwickelten Formeln zeigen, dass die Differentialquotienten von

$$f(x) = arctan\, x$$

für jedes endliche x continuirlich und endlich bleiben; ferner ist

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\, 1.2.3\ldots(2k),$$

mithin nach dem Theorem von Mac Laurin für $p = n$

$$arctan\, x - \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n\sqrt{(1+\vartheta^2x^2)^n}}\, sin\left(n\, arctan\, \frac{1}{\vartheta x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{sin\,\frac{1}{2}(n-1)\pi}{n-1}\, x^{n-1}.$$

Der absolute Werth von $\dfrac{x}{\sqrt{1+\vartheta^2x^2}}$ beträgt weniger als der absolute Werth von x; der Ausdruck

$$\frac{x^n}{n\sqrt{(1+\vartheta^2x^2)^n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{\sqrt{1+\vartheta^2x^2}}\right)^n$$

convergirt also bei unendlich wachsenden n gegen die Null, wenn $Lim\left(\dfrac{1}{n}x^n\right) = 0$ ist, und Letzteres findet so lange statt als der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigt. Da ferner $sin\left(n\, arctan\, \dfrac{1}{\vartheta x}\right)$ das Intervall -1 bis $+1$ keinenfalls überschreitet, so hat der Rest unter den vorigen Bedingungen die Null zur Grenze, und mithin ist

$$12)\qquad arctan\, x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots\cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Im Fall der absolute Werth von x mehr als die Einheit beträgt, kann man die Gleichung

$$13)\qquad arctan\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arccot\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arctan\, \frac{1}{x}$$

benutzen und $arctan\, \dfrac{1}{x}$ nach der obigen Formel entwickeln; dies giebt, x als positiv vorausgesetzt,

$$arctan\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots.$$
$$x > 1.$$

Bei negativen x sind beiderseits die Vorzeichen umzukehren. Durch die Formel 13) erledigt sich auch die Entwickelung von *arccot* x.

In dem speciellen Falle $x = 1$ geht die Gleichung 12) über in

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots\cdots;$$

dieses Resultat ist indessen nur formell merkwürdig und eignet sich wegen der ausserordentlich langsamen Convergenz der Reihe nicht zur numerischen Berechnung von π. Bequemere Formeln erhält man dadurch, dass man $\frac{1}{4}\pi$ in zwei oder mehrere kleinere Bögen zerlegt und diese einzeln berechnet. So erhält man z. B. nach Formel 10) in Abschnitt II. der Einleitung

$$\tfrac{1}{4}\pi = \arctan\tfrac{1}{2} + \arctan\tfrac{1}{3},$$
$$\tfrac{1}{4}\pi = \arctan\tfrac{1}{2} + \arctan\tfrac{1}{5} + \arctan\tfrac{1}{8},$$

und hier kann man die einzelnen Bögen leicht nach Formel 12) in rasch convergirende Reihen verwandeln.

§. 48.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten.

Bei Functionen, die irgendwie aus sogenannten einfachen Functionen zusammengesetzt sind, gelingt es nicht selten, direct das Intervall zu bestimmen, innerhalb dessen eine Reihenentwickelung für die zusammengesetzte Function existiren muss; in solchen Fällen wird die Restuntersuchung unnöthig und sind nur noch die Coefficienten der Reihe zu ermitteln. Hierzu benutzt man oft mit Vortheil ein vom Mac-Laurin'schen Satze unabhängiges Verfahren, das im Wesentlichen darauf hinauskommt, die Coefficienten vorläufig unbestimmt zu lassen und sie durch irgend eine Eigenschaft der gegebenen Functionen erst später zu bestimmen, wie dies schon in §. 7 geschehen ist; gewöhnlich leisten hierbei Differentiationen gute Dienste. Das Detail des Verfahrens wird man aus den folgenden Beispielen ersehen.

I. Multiplicirt man die Gleichung 11) des vorigen Paragraphen mit sich selbst, was nach §. 41 ohne Weiteres erlaubt ist, so gelangt man zu dem Resultate

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \cdots\cdots,$$

welches für alle, das Intervall -1 bis $+1$ nicht überschreitende x gilt. Das Bildungsgesetz der Coefficienten tritt aber bei jener Multiplication nicht klar zu Tage und würde auch nach dem Mac-Lau-

rin'schen Satze schwer zu finden sein, weil hier $f^{(n)}(x)$ ein äusserst complicirter Ausdruck ist; wir setzen daher vorläufig

$$1)\qquad (arcsin\, x)^2 = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots\cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man die Reihe für $arcsin\, x$ mit der Reihe für $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ multiplicirt, wobei nicht zu übersehen ist, dass die letztere nur unter der Bedingung $-1 < x < +1$ convergirt; man erhält dann eine Gleichung von der Form

$$2)\qquad \frac{arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots\cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

und auch hier ist das Bildungsgesetz der Coefficienten nicht näher bekannt.

Um nun alle a und b zu bestimmen, differenziren wir die Gleichung 1) und erhalten

$$3)\qquad \frac{2\, arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} = 2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdots\cdots;$$

diese Differentiation ist erlaubt, weil sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe, welche letztere mit Nro. 2) übereinstimmen muss, innerhalb des Intervalles -1 bis $+1$ convergirt. Multiplicirt man die Gleichung 3) mit $\sqrt{1-x^2}$ und differenzirt noch einmal, so wird

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = (1.2a_2 + 3.4a_4x^2 + 5.6a_6x^4 + \cdots)\sqrt{1-x^2}$$
$$-(2a_2x + 4a_4x^3 + 6a_6x^5 + \cdots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

nach Multiplication mit $\sqrt{1-x^2}$ verschwinden die Radicale und es lassen sich dann alle negativen Grössen auf die linke Seite schaffen, wodurch bei gehöriger Zusammenziehung folgende Gleichung entsteht:

$$1.2a_2 + 3.4a_4x^2 + 5.6a_6x^4 + \cdots\cdots$$
$$= 2 + 2^2a_2x^2 + 4^2a_4x^4 + \cdots\cdots$$

Die Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x giebt nun

$$a_2 = 1,\quad a_4 = a_2\frac{2^2}{3.4} = \frac{2^2}{3.4},$$
$$a_6 = a_4\frac{4^2}{5.6} = \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6},\ \text{u. s. w.}$$

überhaupt für jedes ganze positive k

$$a_{2k} = \frac{2^2 . 4^2 . 6^2 \dots (2k-2)^2}{3 . 4 . 5 . 6 \dots (2k)} = \frac{2 . 4 . 6 \dots (2k-2)}{3 . 5 . 7 \dots (2k-1)} \cdot \frac{1}{k},$$

und demgemäss haben wir nach Nro. 1)

$$4) \qquad (\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{2} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\,\frac{x^6}{3} + \cdots, \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Man übersieht augenblicklich, dass sich auf ähnlichem Wege auch die höheren Potenzen von $\arcsin x$ entwickeln lassen; die Coefficienten werden aber weniger einfach.

Substituirt man die Werthe von a_2, a_4, a_6 etc. auch in die Gleichung 3), so erhält man noch

$$5) \qquad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{2 . 4}{3 . 5} x^5 + \cdots, \quad -1 < x < +1.$$

Dieses Resultat gewinnt eine bemerkenswerthe Form, wenn man

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad \text{mithin} \quad \arcsin x = \arctan z$$

setzt; es wird nämlich

$$6) \quad \arctan z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Mit Hülfe der schon in §. 47 benutzten Gleichung

$$\tfrac{1}{4}\pi = \arctan \tfrac{1}{2} + \arctan \tfrac{1}{3}$$

findet man z. B. aus Nro. 6)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{2}{10} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2 . 4 . 6}{3 . 5 . 7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{10} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2 . 4 . 6}{3 . 5 . 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right],$$

wonach die Berechnung von π sehr leicht ist.

II. Zufolge der in §. 47 für den Cosinus eines beliebigen Bogens gefundenen Reihe hat man

$$\cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2(\arcsin x)^2}{1 . 2} + \frac{\mu^4(\arcsin x)^4}{1 . 2 . 3 . 4} - \cdots$$

oder auch, wenn man die Potenzen von $\arcsin x$ entwickelt,

$$cos(\mu\, arcsin\, x) = 1 - \frac{\mu^2}{2}(x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \cdots)$$
$$+ \frac{\mu^4}{24}(x^4 + \tfrac{2}{3}x^6 + \cdots)$$
$$- \frac{\mu^6}{720}(x^6 + \cdots)$$
$$+ \cdots\cdot$$

Alle hier vorkommenden Horizontalreihen convergiren von $x = -1$ bis $x = +1$, ferner convergirt die Reihe der Horizontalsummen (die vorige Reihe) und sie behält ihre Convergenz auch in dem Falle, wo man den Gliedern gleiche Vorzeichen giebt; es sind also die Bedingungen erfüllt, unter denen die Doppelreihe nach Verticalcolonnen geordnet werden darf und folglich ist

$$cos(\mu\, arcsin\, x) = 1 - \frac{\mu^2}{2}x^2 + \frac{\mu^4 - 4\mu^2}{24}x^4$$
$$- \frac{\mu^6 - 20\mu^4 + 64\mu^2}{720}x^6 + \cdots$$

oder mit anderen Worten, es existirt eine Reihenentwickelung von der Form

7) $$cos(\mu\, arcsin\, x) = 1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - A_6 x^6 + \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Durch Multiplication mit der Entwickelung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ erhält man noch

8) $$\frac{cos(\mu\, arcsin\, x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - B_2 x^2 + B_2 x^4 - B_6 x^6 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Ganz ähnliche Betrachtungen knüpfen sich an die Function $sin(\mu\, arcsin\, x)$; diese kann zunächst in die einfache Reihe

$$\frac{\mu\, arcsin\, x}{1} - \frac{\mu^3(arcsin\, x)^3}{1.2.3} + \frac{\mu^5(arcsin\, x)^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

verwandelt werden, welche nach Entwickelung der Potenzen von $arcsin\, x$ in eine Doppelreihe übergeht. Letztere genügt den Bedingungen, unter denen die Anordnung nach Verticalcolonnen erlaubt ist, und so ergiebt sich ein Resultat von der Form

9) $$sin(\mu\, arcsin\, x) = \mu x - A_3 x^3 + A_5 x^5 - \cdots\cdot$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

durch Multiplication mit der Entwickelung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ folgt noch

$$10)\qquad \frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mu x - B_3 x^3 + B_5 x^5 - \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Um nun die Coefficienten zu bestimmen, differenziren wir die Gleichung 7) und erhalten

$$11)\qquad \frac{\mu \sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 2A_2 x - 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 - \cdots;$$

die Befugniss zu dieser Differentiation liegt darin, dass sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe 11), welche letztere mit Nro. 10) übereinstimmen muss, zwischen -1 und $+1$ convergirt. Wir multipliciren ferner die Gleichung 11) mit $\sqrt{1-x^2}$ und differenziren noch einmal; das Ergebniss ist

$$\frac{\mu^2 \cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= (1.2A_2 - 3.4A_4x^2 + 5.6A_6x^4 - \cdots)\sqrt{1-x^2}$$
$$- (2A_2 x - 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 - \cdots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder nach beiderseitiger Multiplication mit $\sqrt{1-x^2}$ und gehöriger Zusammenziehung

$$12)\qquad \mu^2 \cos(\mu \arcsin x)$$
$$= 1.2A_2 - 3.4A_4x^2 + 5.6A_6x^4 - 7.8A_8x^6 + \cdots$$
$$- 2^2A_2x^2 + 4^2A_4x^4 - 6^2A_6x^6 + \cdots$$

Diese Entwickelung kann nicht verschieden von Nro. 7) sein; substituirt man in Nro. 12) für $\cos(\mu \arcsin x)$ die ursprüngliche Reihe und schafft die zweite Reihe rechter Hand auf die linke Seite, so hat man

$$\mu^2 - (\mu^2 - 2^2)A_2x^2 + (\mu^2 - 4^2)A_4x^4 - (\mu^2 - 6^2)A_6x^6 + \cdots$$
$$= 1.2A_2 - 3.4A_4x^2 + 5.6A_6x^4 - 7.8A_8x^6 + \cdots$$

mithin durch Vergleichung der Coefficienten

$$A_2 = \frac{\mu^2}{1.2},\quad A_4 = A_2\frac{\mu^2 - 2^2}{3.4} = \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4},$$
$$A_6 = A_4\frac{\mu^2 - 4^2}{5.6} = \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc.}$$

Zufolge dieser Werthe ist nach Nro. 7)

$$13)\qquad \cos(\mu \arcsin x)$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1.2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4}x^4 - \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{1.2\ldots.6}x^6 + \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1,$$

und nach Nro. 11)

14)
$$\frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots5}x^5 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Die Coefficienten der beiden übrigen Reihen 8) und 9) bestimmen sich durch eine sehr ähnliche Rechnung. Man differenzirt zunächst die Gleichung 9) und erhält

15) $$\frac{\mu \cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mu - 3A_3 x^2 + 5A_5 x^4 - \cdots,$$

was mit Nro. 8) übereinstimmen muss; man multiplicirt ferner mit $\sqrt{1-x^2}$, differenzirt und multiplicirt wieder mit $\sqrt{1-x^2}$; dies giebt
$$\mu^2 \sin(\mu \arcsin x)$$
$$= 2.3A_3x - 4.5A_5x^3 + 6.7A_7x^5 - \cdots$$
$$+ \mu x - 3^2A_3x^3 + 5^2A_5x^5 - \cdots$$

Substituirt man für $\sin(\mu \arcsin x)$ die ursprüngliche Reihe 9) und vergleicht dann die beiderseitigen Coefficienten, so gelangt man zur Kenntniss von A_3, A_5 etc. und überhaupt zu folgendem Resultate

16)
$$\sin(\mu \arcsin x)$$
$$= \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}x^5 - \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

endlich giebt die Gleichung 15)

17)
$$\frac{\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}x^2 + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}x^4 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Nicht selten ertheilt man den Gleichungen 13) und 14), 16) und 17) eine goniometrische Form, indem man $\arcsin x = u$, mithin $x = \sin u$ setzt; dem Intervalle $x = -1$ bis $x = +1$ entspricht dann das Intervall $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}\pi$, und unter der gemeinschaftlichen Bedingung
$$-\tfrac{1}{2}\pi < u < +\tfrac{1}{2}\pi$$
gelten bei jedem μ folgende vier Gleichungen:

18) $$\cos\mu u = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots.6}\sin^6 u + \cdots\cdots,$$

19) $$\frac{\sin\mu u}{\cos u} = \frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots5}\sin^5 u - \cdots\cdot,$$

20) $$\sin\mu u = \frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u - \cdots\cdot,$$

21) $$\frac{\cos\mu u}{\cos u} = 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \cdots\cdot$$

Dabei ist nur zu merken, dass die Formeln 18) und 20) auch für $u = \pm\frac{1}{2}\pi$ richtig bleiben, während dann die beiden übrigen ihre Gültigkeit verlieren.

Nimmt man für μ eine gerade Zahl, so brechen die in 18) und 19) vorkommenden Reihen ab, d. h. sie werden zu endlichen Reihen, deren erste aus $\frac{1}{2}\mu + 1$, und deren zweite aus $\frac{1}{2}\mu$ Gliedern besteht. Man kann sich in diesem Falle leicht überzeugen, dass jene Gleichungen für alle u bestehen. Ist nämlich k irgend eine ganze Zahl, v ein Bogen des ersten Quadranten, und bezeichnet $\varphi(u)$ die Summe der Reihe, so hat man, weil $\sin(k\pi - v) = \pm\sin v$,

$$\varphi(k\pi - v) = \varphi(v) = \cos\mu v = \cos\mu(k\pi - v)$$

oder $\varphi(w) = \cos\mu w$, wo $w = k\pi - v$ jeden beliebigen Bogen vorstellen kann. Eine ähnliche Schlussweise gilt für die Formel 19). Nicht minder leicht ist einzusehen, dass bei ungeraden μ die Gleichungen 20) und 21) allgemein richtig bleiben. Damit kommt man auf dieselben Resultate, welche bereits am Ende von §. 7 angedeutet wurden.

§. 49.

Die unendlichen Producte für Sinus und Cosinus.

Wenn die ganze rationale algebraische Function nten Grades

1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

für n specielle Werthe von x, nämlich für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ ver-

schwindet, so lässt sich dieselbe auch in die Form des Productes

2) $$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

bringen, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist.

Dieser allgemeine Satz kann auf die Formeln des vorigen Paragraphen angewendet werden und führt dann zu vier neuen Formeln, von denen wir wenigstens eine entwickeln wollen. Unter der Voraussetzung eines ungeraden μ und für $\sin u = x$ ist nach Nro. 20)

3) $$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u}$$
$$= 1 - A_3 x^2 + A_5 x^4 - \dots + (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} A_\mu x^{\mu-1},$$

und da rechter Hand eine ganze Function $(\mu - 1)$ten Grades vorkommt, so hat man auch

4) $$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} A_\mu (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{\mu-1}),$$

wobei $x_1, x_2, \dots x_{\mu-1}$ diejenigen $\mu - 1$ speciellen Werthe von x bezeichnen, für welche die rechte Seite der Gleichung 3) verschwindet. Setzt man $u = 0$, so wird auch $x = 0$ und die Gleichung 4) geht über in

$$1 = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} A_\mu (-x_1)(-x_2) \dots (-x_{\mu-1});$$

damit dividiren wir in Nro. 4) und erhalten

$$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_{\mu-1}}\right).$$

Sowie nun x den Sinus von u bedeutete, so lassen sich auch x_1, $x_2, \dots x_{\mu-1}$ als die Sinus gewisser Bögen $u_1, u_2, \dots u_{\mu-1}$ ansehen, und daher ist

5) $$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u}$$
$$= \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu-1}}\right).$$

Hier sind $u_1, u_2, \dots u_{\mu-1}$ diejenigen Specialwerthe von u, für welche die rechte Seite der Gleichung 3) und folglich auch deren linke Seite verschwindet; die letztere Bemerkung führt augenblicklich zur Kenntniss jener Bögen, denn die linke Seite verschwindet, wenn $\sin \mu u = 0$ wird, d. h. wenn u einen der folgenden $\mu - 1$ Werthe erhält:

$$+\frac{\pi}{\mu},\ +\frac{2\pi}{\mu},\ +\frac{3\pi}{\mu},\ \dots +\frac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu},$$

$$-\frac{\pi}{\mu},\ -\frac{2\pi}{\mu},\ -\frac{3\pi}{\mu},\ \dots -\frac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}.$$

Nach Substitution derselben kann man in Nro. 5) je zwei Factoren zusammenziehen und zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(\mu-1)=m$$

setzen; dies giebt

$$\frac{\sin\mu u}{\mu\sin u}$$

$$=\left[1-\left(\frac{\sin u}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sin u}{\sin\frac{2\pi}{\mu}}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{\sin u}{\sin\frac{m\pi}{\mu}}\right)^2\right]$$

oder auch, wenn $\mu u = z$ und folglich $u=\frac{z}{\mu}$ genommen wird,

$$6)\qquad \frac{\sin z}{\mu\sin\frac{z}{\mu}}$$

$$=\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{2\pi}{\mu}}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{m\pi}{\mu}}\right)^2\right].$$

Lässt man die ungerade Zahl μ in's Unendliche wachsen, so convergirt die linke Seite dieser Gleichung gegen die Grenze $\frac{\sin z}{z}$, während das rechts verzeichnete, aus $m=\frac{1}{2}(\mu-1)$ Factoren bestehende Product zu einem unendlichen Producte wird. Man ersieht hieraus die Möglichkeit, $\sin z$ in Form eines unendlichen Productes darzustellen; die Ausführung dieses Gedankens bedarf aber einer genaueren Discussion des Productes in Nro. 6).

Wir bezeichnen mit k eine beliebige ganze positive Zahl $< m$ und zerlegen das genannte Product in zwei Theile, nämlich

$$7)\qquad \sin z=\mu\sin\frac{z}{\mu}\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{k\pi}{\mu}}\right)^2\right]P,$$

$$8)\qquad P=\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{\mu}}\right)^2\right]\dots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{m\pi}{\mu}}\right)^2\right];$$

dabei richten wir die Aufmerksamkeit zunächst auf das aus $m-k$ Factoren bestehende Ergänzungsproduct P, welches unter der kurzen, von selbst verständlichen Form

9) $$P = (1-Q_1)(1-Q_2)\dots(1-Q_{m-k})$$

dargestellt werden möge.

In den Nennern der mit Q_1, Q_2 etc. bezeichneten Brüche kommen der Reihe nach die Bögen vor

$$\frac{(k+1)\pi}{\mu}, \quad \frac{(k+2)\pi}{\mu}, \dots \frac{m\pi}{\mu} = \frac{m\pi}{2m+1},$$

die sämmtlich kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sind; in den Zählern findet sich immer der Bogen $\frac{z}{\mu}$, welcher kleiner als die eben genannten Bögen ist, sobald $z < (k+1)\pi$ vorausgesetzt wird. Da im ersten Quadranten dem grösseren Bogen der grössere Sinus entspricht, so sind unter der gemachten Voraussetzung Q_1, Q_2 etc. positive echte Brüche, mithin ist auch

$$(1-Q_1)(1-Q_2)\dots(1-Q_{m-k}) < 1$$

d. h.

10) $$P < 1.$$

Um einen Ausdruck zu erhalten, der kleiner als P ist, benutzen wir den leicht erweisbaren Satz, dass jedes Product von der Form $(1-Q_1)(1-Q_2)\dots$ mehr als die Differenz $1-(Q_1+Q_2+\cdots)$ beträgt, sobald Q_1, Q_2 etc. positive echte Brüche sind*); es ist daher

11) $$P > 1 - (Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{m-k}).$$

Diese Ungleichung wird einfacher, wenn man die Bemerkung hinzubringt, dass die Function $\frac{\sin\xi}{\xi}$ innerhalb des Intervalles $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{1}{2}\pi$ fortwährend abnimmt, wie man aus dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten leicht ersieht. Man hat demgemäss für jeden im ersten Quadranten liegenden Bogen ξ

$$\frac{\sin\xi}{\xi} > \frac{\sin\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} \text{ oder } \frac{1}{\sin\xi} < \frac{\pi}{2\xi},$$

mithin, wenn $\xi = \frac{h\pi}{\mu}$ gesetzt und quadrirt wird,

*) Es ist nämlich bei positiven echt gebrochenen Q_1, Q_2, Q_3 etc.

$$(1-Q_1)(1-Q_2) = 1 - (Q_1+Q_2) + Q_1Q_2 > 1 - (Q_1+Q_2);$$

daraus folgt durch Multiplication mit $1-Q_3$

$$(1-Q_1)(1-Q_2)(1-Q_3)$$
$$> 1 - (Q_1+Q_2+Q_3) + (Q_1+Q_2)Q_3 > 1 - (Q_1+Q_2+Q_3)$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\left(sin\frac{h\pi}{\mu}\right)^2} < \frac{\mu^2}{4h^2} < \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right).$$

Diese Ungleichung multipliciren wir mit der folgenden

$$\left(sin\frac{z}{\mu}\right)^2 < \frac{z^2}{\mu^2}$$

und erhalten

$$\left(\frac{sin\frac{z}{\mu}}{sin\frac{h\pi}{\mu}}\right)^2 < \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right).$$

Setzen wir $h = k+1,\ k+2, \ldots m$, so kommen linker Hand die mit $Q_1, Q_2, \ldots Q_{m-k}$ bezeichneten Quotienten zum Vorschein, und durch Addition aller Ungleichungen ergiebt sich

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{m-k} < \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) < \frac{z^2}{4k};$$

hieraus folgt noch

$$1 - (Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{m-k}) > 1 - \frac{z^2}{4k}$$

und um so mehr nach Nro. 11)

12) $$P > 1 - \frac{z^2}{4k}.$$

Die Zusammenstellung der Ungleichungen 10) und 12) zeigt, dass

$$P = 1 - \frac{\varrho z^2}{4k}$$

gesetzt werden darf, wo ϱ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch vorstellt; die Gleichung 7) wird daher zur folgenden

13) $$sin\, z = \mu\, sin\frac{z}{\mu}\left[1 - \left(\frac{sin\frac{z}{\mu}}{sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{sin\frac{z}{\mu}}{sin\frac{k\pi}{\mu}}\right)^2\right]\left(1 - \frac{\varrho z^2}{4k}\right).$$

Der Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende μ bietet nun keine Schwierigkeit mehr, wenn man sich dabei k als constante Zahl denkt; unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$Lim\left(\mu\, sin\frac{z}{\mu}\right) = z, \quad Lim\frac{sin\frac{z}{\mu}}{sin\frac{\alpha}{\mu}} = \frac{z}{\alpha}$$

erhält man nämlich aus Nro. 13) die Formel

$$14)\quad \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho z^2}{4k}\right),$$

welche nur an die Bedingung

$$-(k+1)\pi < z < +(k+1)\pi$$

gebunden ist. Statt der Gleichung 14) kann man schreiben

$$15)\quad \frac{\sin z}{1-\dfrac{\varrho z^2}{4k}} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

und wenn nun auch die beliebige ganze positive Zahl k als unendlich wachsend gedacht wird, so convergirt linker Hand der Nenner gegen die Einheit, wofern z irgend einen endlichen Werth behält; das endliche Product wird zu einem unendlichen, und so ergiebt sich die für jedes endliche z gültige Formel

$$16)\quad \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

In dem speciellen Falle $z = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hieraus

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\,.\,3}{2^2}\cdot\frac{3\,.\,5}{4^2}\cdot\frac{5\,.\,7}{6^2}\cdots\cdots$$

oder umgekehrt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

Ganz ähnliche Umwandlungen können mit der Gleichung 18) in §. 48 vorgenommen werden, doch gelangt man zum Endresultate kürzer auf folgendem Wege. In Nro. 15) ersetzen wir einmal k durch die gerade Zahl $2k$, das andere Mal z durch $\frac{1}{2}z$ und haben dann die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin z}{1-\dfrac{\varrho_1 z^2}{8k}}$$

$$= z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}z}{1-\dfrac{\varrho_2 z^2}{16k}}$$

$$= \tfrac{1}{2}z\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right),$$

worin ϱ_1 und ϱ_2 positive echte Brüche sind. Die erste Gleichung dividiren wir durch das Doppelte der zweiten und erhalten

$$17)\quad \left(\frac{1-\dfrac{\varrho_2 z^2}{16k}}{1-\dfrac{\varrho_1 z^2}{8k}}\right)\cos\tfrac{1}{2}z$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right),$$

welche Formel das Correlat zu Nro. 15) bildet. Für unendlich werdende k geht diese Gleichung über in

$$18)\quad \cos\tfrac{1}{2}z=\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots;$$

auch ist noch, wenn z durch $2z$ ersetzt wird,

$$19)\quad \cos z=\left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots,$$

wobei z jeden beliebigen Bogen von endlicher Grösse bedeuten darf.

Aus den Gleichungen 16) und 19) geht unmittelbar hervor, dass überhaupt alle sechs goniometrischen Functionen in Form von unendlichen Producten dargestellt werden können.

§. 50.

Die Reihen für Tangente, Cotangente etc.

Es liegt sehr nahe, von den unendlichen Producten des vorigen Paragraphen die Logarithmen zu nehmen, um wieder auf unendliche Reihen zu kommen; die etwa vorhandenen negativen Factoren lassen sich hierbei vermeiden, wenn man die Gleichungen erst quadrirt, bevor man zu den Logarithmen übergeht. Dies giebt folgende Resultate

$$1)\quad l(\sin^2 z)=l(z^2)+l\left[\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\right]+l\left[\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)^2\right]+\cdots,$$

$$2)\quad l(\cos^2 z)=l\left[\left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\right]+l\left[\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)^2\right]+\cdots\cdots;$$

daraus erhält man ferner durch Differentiation, welche nach §. 42 erlaubt ist,

$$3)\quad \cot z=\frac{1}{z}-\frac{2z}{(1\pi)^2-z^2}-\frac{2z}{(2\pi)^2-z^2}-\frac{2z}{(3\pi)^2-z^2}-\cdots,$$

$$4)\quad tan\, z = \frac{2z}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} + \cdots,$$

oder auch, wenn $\frac{1}{2}z$ für z gesetzt wird,

$$5)\quad tan\tfrac{1}{2}z = \frac{4z}{(1\pi)^2 - z^2} + \frac{4z}{(3\pi)^2 - z^2} + \frac{4z}{(5\pi)^2 - z^2} + \cdots$$

Addirt man die Gleichungen 3) und 5), indem man linker Hand die Formel $cot\, z + tan\frac{1}{2}z = csc\, z$ benutzt, so findet sich

$$6)\quad csc\, z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{(1\pi)^2 - z^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(3\pi)^2 - z^2} - \cdots$$

Um noch eine Reihe für $sec\, z$ zu erhalten, bringen wir die Gleichung 6) auf die Form

$$csc\, z = \frac{1}{z} + \left\{\frac{1}{\pi - z} - \frac{1}{\pi + z}\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi - z} - \frac{1}{2\pi + z}\right\} + \left\{\frac{1}{3\pi - z} - \frac{1}{3\pi + z}\right\} - \cdots$$

und lassen $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten; durch Vereinigung der einander entsprechenden Brüche folgt dann

$$7)\quad sec\, z = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} - \cdots$$

Die unendlichen Reihen, welche in den bisherigen Gleichungen vorkommen, gestatten weitere Umwandlungen, wodurch sie wieder zu Potenzenreihen werden. Beschränkt man nämlich in Formel 1) die Variabele z auf das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$, so sind $\frac{z}{\pi}, \frac{z}{2\pi}, \frac{z}{3\pi}$ etc. echte Brüche; dann ist ferner

$$l\left(\frac{sin\, z}{z}\right) = l\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots$$

und hier lassen sich rechter Hand alle Logarithmen mittelst der Formel

$$l(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1$$

entwickeln; dies giebt

$$l\left(\frac{sin\, z}{z}\right) = -\frac{z^2}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{1^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{1^6\pi^6} - \cdots$$
$$-\frac{z^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{2^6\pi^6} - \cdots$$
$$-\frac{z^2}{3^2\pi^2} - \frac{1}{2}\frac{z^4}{3^4\pi^4} - \frac{1}{3}\frac{z^6}{3^6\pi^6} - \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die vorstehende Doppelreihe genügt den Bedingungen, unter welchen die Anordnung nach Verticalcolonnen erlaubt ist, folglich hat man auch

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\frac{z^2}{\pi^2}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\frac{z^4}{\pi^4}$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)\frac{z^6}{\pi^6}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bezeichnet man die Summen der eingeklammerten Horizontalreihen mit S_2, S_4, S_6 etc., so dass überhaupt

8) $$S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots$$

ist, so geht die vorige Gleichung über in

9) $$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\tfrac{1}{1}\frac{S_2 z^2}{\pi^2}-\tfrac{1}{2}\frac{S_4 z^4}{\pi^4}-\tfrac{1}{3}\frac{S_6 z^6}{\pi^6}-\cdots,$$
$$-\pi < z < +\pi.$$

Eine ganz ähnliche Transformation kann mit der Gleichung 2) vorgenommen werden, sobald z innerhalb des Intervalles $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ liegt; mit Hülfe der Abkürzung

10) $$T_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots$$

erhält man

11) $$l\cos z = -\tfrac{1}{1}\frac{2^2 T_2 z^2}{\pi^2}-\tfrac{1}{2}\frac{2^4 T_4 z^4}{\pi^4}-\tfrac{1}{3}\frac{2^6 T_6 z^6}{\pi^6}-\cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die hier vorkommenden Summen T_2, T_4, T_6 etc. lassen sich wieder durch S_2, S_4, S_6 etc. ausdrücken; nach Formel 8) ist nämlich

$$\frac{1}{2^m}S_m = \frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\cdots,$$

und wenn man dies von Nro. 8) abzieht, so bleibt

$$\frac{2^m-1}{2^m}S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots = T_m.$$

Demnach wird aus der Gleichung 11) die folgende

12) $$l\cos z$$
$$= -\tfrac{1}{1}\frac{(2^2-1)S_2 z^2}{\pi^2}-\tfrac{1}{2}\frac{(2^4-1)S_4 z^4}{\pi^4}-\tfrac{1}{3}\frac{(2^6-1)S_6 z^6}{\pi^6}-\cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Formeln 3) und 4) lassen sich analog behandeln, wobei man die für $-k\pi < z < +k\pi$ geltende Reihenentwickelung

$$\frac{z}{(k\pi)^2 - z^2} = \frac{z}{(k\pi)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{z}{(k\pi)^2} + \frac{z^3}{(k\pi)^4} + \frac{z^5}{(k\pi)^6} + \cdots$$

zu benutzen hat; das Endresultat findet sich aber rascher durch Differentiation der Gleichungen 9) und 12), nämlich

13) $$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2\,S_2 z}{\pi^2} - \frac{2\,S_4 z^3}{\pi^4} - \frac{2\,S_6 z^5}{\pi^6} - \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi;$$

14) $$\tan z = \frac{2(2^2-1)\,S_2 z}{\pi^2} + \frac{2(2^4-1)\,S_4 z^3}{\pi^4} + \frac{2(2^6-1)\,S_6 z^5}{\pi^6} + \cdots$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung z durch $\frac{1}{2}z$ und addirt die entstehende Gleichung zur vorhergehenden, so erhält man noch

15) $$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{(2^1-1)\,S_2 z}{\pi^2} + \frac{(2^3-1)\,S_4 z^3}{2^2\pi^4} + \frac{(2^5-1)\,S_6 z^5}{2^4\pi^6} + \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi,$$

wie sich auch durch Transformation von Nro. 6) finden würde.

Um endlich eine Potenzreihe für $\sec z$ zu gewinnen, beschränken wir in Nro. 7) die Variabele z auf das Intervall $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ und entwickeln die einzelnen Glieder nach der Formel

$$\frac{n\pi}{(\frac{1}{2}n\pi)^2 - z^2} = \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left\{1 + \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^2 + \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Indem wir zur Abkürzung

16) $$U_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \cdots$$

setzen, gelangen wir zu folgendem Ergebnisse

$$17)\qquad sec\, z = \frac{2^2 U_1}{\pi} + \frac{2^4 U_3 z^2}{\pi^3} + \frac{2^6 U_5 z^4}{\pi^5} + \cdots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

An die Gleichungen 14) und 17) knüpft sich noch eine werthvolle Bemerkung. Die Tangentenreihe muss nämlich gleichfalls zum Vorschein kommen, wenn man das Theorem von Mac-Laurin unmittelbar auf die Function $f(z) = tan\, z$ anwendet; es ist daher innerhalb der schon bekannten Grenzen

$$tan\, z = \frac{(D\, tan\, z)_0}{1} z + \frac{(D^2\, tan\, z)_0}{1\,.\,2} z^2 + \cdots,$$

und zwar bezeichnet hier $(D^k\, tan\, z)_0$ den speciellen Zahlwerth, welchen der kte Differentialquotient von $tan\, z$ für $z = 0$ erlangt. Der Vergleich mit Nro. 14) zeigt erstens, dass bei geraden k jederzeit $(D^k\, tan\, z)_0 = 0$ ist, wie man auch auf anderem Wege leicht findet, und zweitens, dass für ungerade k die Relation

$$18)\qquad \frac{(D^k\, tan\, z)_0}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,k} = \frac{2\,(2^{k+1} - 1)\, S_{k+1}}{\pi^{k+1}}$$

besteht. Um den Zähler linker Hand zu ermitteln, benutzen wir die Formel 4) in §. 14 für $x = 0$ und setzen zur Abkürzung

$$(D^k\, tan\, z)_0 = \tau_k, \qquad (k \text{ ungerade});$$

wir haben dann bei ungeraden n

$$19)\qquad \tau_n - (n)_2\, \tau_{n-2} + (n)_4\, \tau_{n-4} - \cdots = sin\tfrac{1}{2} n\pi,$$

und hieraus ergeben sich der Reihe nach τ_1, τ_3, τ_5 etc., wenn successiv $n = 1, 3, 5$ etc. genommen wird. Man hat nun einerseits

$$20)\qquad tan\, z = \frac{\tau_1}{1} z + \frac{\tau_3}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \frac{\tau_5}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,5} z^5 + \cdots$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi$$

ferner nach Nro. 18), wobei zu grösserer Deutlichkeit $k = 2p - 1$ sein möge,

$$21)\qquad S_{2p} = \frac{\tau_{2p-1}\, \pi^{2p}}{2\,(2^{2p} - 1)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(2p - 1)}.$$

Aus der Formel 19) geht hervor, dass τ_1, τ_3, τ_5 etc. ganze rationale Zahlen sind, und zwar

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_3 = 2, \quad \tau_5 = 16 \text{ etc.};$$

betrachtet man sie als bekannt, so zeigt die Formel 21), wie mit ihrer Hülfe die Summen S_2, S_4, S_6 etc. gefunden werden können, z. B.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945},$$

u. s. w.

Was zweitens die Gleichung 17) anbelangt, so ist zunächst klar, dass dieselbe innerhalb des angegebenen Intervalles mit der Entwickelung

$$sec\, z = 1 + \frac{(D\, sec\, z)_0}{1} z + \frac{(D^2 sec\, z)_0}{1\,.\,2} z^2 + \cdots$$

übereinstimmen muss; demnach hat man für ungerade k

$$(D^k sec\, z)_0 = 0$$

und für gerade k

22) $$\frac{(D^k sec\, z)_0}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k} = \frac{2^{k+2}\, U_{k+1}}{\pi^{k+1}}.$$

Zur Abkürzung sei

$$(D^k sec\, z)_0 = \tau_k, \qquad (k \text{ gerade});$$

die Formel 2) in §. 14 liefert dann für $x = 0$ und bei geraden n

23) $$\tau_n - (n)_2\, \tau_{n-2} + (n)_4\, \tau_{n-4} - \cdots = 0,$$

woraus man τ_2, τ_4, τ_6 etc. erhält, wenn man der Reihe nach $n = 2$, 4, 6 etc. nimmt. Es ist nun einerseits

24) $$sec\, z = 1 + \frac{\tau_2}{1\,.\,2} z^2 + \frac{\tau_4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^4 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

andererseits nach Formel 22) für $k = 2p$

25) $$U_{2p+1} = \frac{\tau_{2p}\, \pi^{2p+1}}{2^{2p+2}\, 1\,.\,2\,\ldots\,(2p)},$$

mithin können die rationalen ganzen Zahlen

$$\tau_2 = 1, \quad \tau_4 = 5, \quad \tau_6 = 61 \text{ etc.}$$

zur Bestimmung der Summen U_1, U_3, U_5 etc. dienen; so ist z. B.

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

u. s. w.

Schreibt man in Formel 23) rechter Hand $sin \frac{1}{2} n \pi$ statt 0, was bei geraden n richtig ist, so erhält man dieselbe Gleichung, welche

in Nro. 19) für ungerade n verzeichnet ist; demnach sind die Tangentencoefficienten nach derselben Regel gebildet wie die Secantencoefficienten. Aus der Bemerkung, dass

$$sec\, z + tan\, z = tan\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}z)$$

ist, folgt noch die Formel

$$26)\quad tan\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}z) = 1 + \frac{\tau_1}{1}z + \frac{\tau_2}{1\,.\,2}z^2 + \frac{\tau_3}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \cdots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

worin alle mit τ bezeichneten Coefficienten vorkommen.

Die Reihen für Cotangente, Tangente und Cosecante stellt man häufig unter einer etwas anderen Form dar, mit deren Angabe wir diese Untersuchungen beschliessen wollen. Nach Formel 13) ist nämlich

$$\tfrac{1}{2}x\, cot\tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{S_2 x^2}{2^1\pi^2} - \frac{S_4 x^4}{2^3\pi^4} - \cdots\cdots;$$

dagegen würde das Theorem von Mac-Laurin liefern

$$27)\quad \tfrac{1}{2}x\, cot\tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{B_1 x^2}{1\,.\,2} - \frac{B_3 x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots\cdots,$$

$$-2\pi < x < +2\pi,$$

wobei

$$B_{2p-1} = -\,[D^{2p}(\tfrac{1}{2}x\, cot\tfrac{1}{2}x)]_0$$

gesetzt wurde. Aus Gründen, die sich später ergeben werden, hat man die Form 27) vorgezogen und die Coefficienten B_1, B_3, B_5 etc. mit dem Namen der Bernoulli'schen Zahlen belegt; es ist daher

$$\frac{S_{2p}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} = \frac{B_{2p-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)}$$

oder

$$28)\quad S_{2p} = \frac{2^{2p-1}B_{2p-1}\pi^{2p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)},$$

und nach den Formeln 13), 14), 15)

$$29)\quad cot\, z = \frac{1}{z} - \frac{2^2 B_1}{1\cdot 2}z - \frac{2^4 B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^3 - \frac{2^6 B_5}{1\,.\,2\ldots 6}z^5 - \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi;$$

$$30)\quad tan\, z = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} z + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2.3.4} z^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2\ldots 6} z^5 + \ldots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$31)\quad csc\, z = \frac{1}{z} + \frac{2(2^1-1)B_1}{1.2} z + \frac{2(2^3-1)B_3}{1.2.3.4} z^3 + \frac{2(2^5-1)B_5}{1.2\ldots 6} z^5 + \ldots,$$
$$-\pi < z < +\pi.$$

Ein Mittel zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen erhält man durch Vergleichung der Formeln 21) und 28); es folgt nämlich

$$32)\qquad B_{2p-1} = \frac{p\,\tau_{2p-1}}{2^{2p-1}(2^{2p}-1)},$$

mithin können die Bernoulli'schen Zahlen aus den Tangentencoefficienten hergeleitet werden, z. B.

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30},\ B_9 = \frac{5}{66},$$

$$B_{11} = \frac{691}{2730},\ B_{13} = \frac{7}{6},\ B_{15} = \frac{3617}{510},\ B_{17} = \frac{43867}{798}, \text{ etc.}$$

Anfangs fallen diese Werthe, von B_5 an steigen sie wieder, und da nach Nro. 28 bei unendlich wachsenden p

$$Lim \frac{B_{2p+1}}{B_{2p-1}} = Lim \left\{\frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2} \cdot \frac{S_{2p+2}}{S_{2p}}\right\} = \infty\ .\ 1$$

ist, so nehmen die Bernoulli'schen Zahlen schliesslich rascher zu als irgend eine geometrische Progression.

§. 51.

Reihenentwickelungen für Functionen mehrerer Variabelen.

Da nach dem Taylor'schen Satze $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe verwandelbar ist, so lässt sich der Analogie nach erwarten, dass bei zwei Variabelen x und y die geänderte Function $F(x+h,\ y+k)$ nach Potenzen von h und k entwickelbar sein werde. In der That macht sich dies leicht mittelst folgenden Kunstgriffs. Die zu entwickelnde Function kann als der specielle Werth angesehen werden, welchen der Ausdruck

$$1)\qquad f(t) = F(x + ht,\ y + kt)$$

für $t = 1$ annimmt; als Function von t betrachtet, lässt sich $f(t)$ nach der Mac-Laurin'schen Formel

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}t + \frac{f''(0)}{1\,.\,2}t^2 + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}t^{n-1} + R_n$$

in eine Reihe umsetzen und hieraus muss für $t = 1$ die gesuchte Entwickelung von $F(x + h,\ y + k)$ hervorgehen. Durch successive Differentiation der Gleichung 1) erhält man die Formeln

$$f'(t) = \frac{\partial F}{\partial(x + ht)}h + \frac{\partial F}{\partial(y + kt)}k,$$

$$f''(t) = \frac{\partial^2 F}{[\partial(x + ht)]^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial(x + ht)\,.\,\partial(y + kt)}hk + \frac{\partial^2 F}{[\partial(y + kt)]^2}k^2,$$

u. s. w.

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt, wenn man F zuerst als Function zweier Variabelen ξ und η behandelt, welche mit t durch die Gleichungen $\xi = x + ht$ und $\eta = y + kt$ verbunden sind. Für $t = 0$ wird

$$f(0) = F(x, y),$$

$$f'(0) = \frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k,$$

$$f''(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2,$$

u. s. w.,

überhaupt stimmt $f^{(m)}(0)$ mit dem vollständigen mten Differential von $F(x, y)$ überein, wenn man sich in demselben ∂x durch h, und ∂y durch k ersetzt denkt; in kurzer symbolischer Form geschrieben ist also

$$f^{(m)}(0) = \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)^m \partial^m F.$$

Dies giebt folgende Reihenentwickelung

$$2)\quad F(x + ht, y + kt) = F(x, y) + \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)\frac{\partial F}{1}t$$

$$+ \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)^2 \frac{\partial^2 F}{1\,.\,2}t^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)^{n-1} \frac{\partial^{n-1} F}{1\,.\,2\ldots.(n-1)}t^{n-1}$$

$$+ R_n,$$

wobei noch der Rest

$$R_n = \frac{t^n}{1.2.3....n} f^{(n)}(\vartheta t), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

durch F auszudrücken ist. Die Vergleichung von $f'(t)$ und $f'(0)$, $f''(t)$ und $f''(0)$ etc. lehrt nun, dass $f^{(n)}(t)$ als Dasjenige betrachtet werden kann, was aus $f^{(n)}(0)$ wird, wenn $x + ht$ für x, und $y + kt$ für y eintreten; bezeichnet man daher wie folgt

$$3) \qquad F_n(x, y, h, k) = \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^n \partial^n F,$$

so ist

$$f^{(n)}(t) = F_n(x + ht, y + kt, h, k),$$

mithin, wenn ϑt an die Stelle von t gesetzt wird,

$$4) \qquad R_n = \frac{t^n F_n(x + \vartheta ht, y + \vartheta kt, h, k)}{1.2.3.....n}.$$

Für $t = 1$ hat man schliesslich folgende Entwickelung

$$5) \quad F(x+h, y+k) = F(x,y) + \frac{F_1(x,y,h,k)}{1} + \frac{F_2(x,y,h,k)}{1.2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{F_{n-1}(x,y,h,k)}{1.2.3...(n-1)}$$

$$+ \frac{F_n(x+\vartheta h, y+\vartheta k, h, k)}{1.2.3...n};$$

diese gilt aber nur unter der Bedingung, dass die Functionen F, F_1 $F_2, \ldots F_n$ stetig und endlich bleiben, während x bis $x + h$ und y bis $y + k$ zunimmt.

Setzt man nach Ausführung der in Nro. 3) angedeuteten Differentiationen $x = 0$, $y = 0$ und schreibt dann x und y für h und k, so erhält man die Entwickelung von $F(x, y)$ nach Potenzen von x und y.

Aehnliche Formeln gelten für Functionen mehrerer Variabelen und sind mittelst des anfangs erwähnten Kunstgriffs so leicht herzuleiten, dass eine nähere Auseinandersetzung unterbleiben kann.

§. 52.

Das Unendlichkleine.

In allen Untersuchungen dieses Capitels kam es darauf an, mittelst der Differentialquotienten einer Function für letztere eine Reihe zu finden; es kann aber auch umgekehrt die Reihenentwickelung,

wenn sie schon bekannt ist, zur Ableitung der Differentialquotienten dienen. Gesetzt z. B., man habe durch irgend welche Mittel für $f(x+h)$ folgende Reihe gefunden

1) $f(x+h) = \chi_0 + \chi_1 h + \chi_2 h^2 + \cdots + \chi_{n-1} h^{n-1} + \varrho_n h^n,$

wo $\chi_0, \chi_1, \cdots \chi_{n-1}$ bekannte Functionen von x und $\varrho_n h^n$ den gleichfalls bekannten Rest bedeuten, so ist erstens für $h = 0$

2) $$f(x) = \chi_0.$$

Diese Gleichung werde von Nro. 1) abgezogen und der Unterschied mit h dividirt; dies giebt

3) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \chi_1 + \chi_2 h + \cdots + \chi_{n-1} h^{n-2} + \varrho_n h^{n-1}$$

und beim Uebergange zur Grenze für verschwindende h

4) $$f'(x) = \chi_1.$$

Setzt man ferner in Nro. 1) $f(x)$ für χ_0 und $f'(x)$ für χ_1, so folgt

5) $$\frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x)}{h^2} = \chi_2 + \chi_3 h + \cdots + \chi_{n-1} h^{n-3} + \varrho_n h^{n-2}$$

und bei verschwindenden h

6) $$\frac{f''(x)}{1 \cdot 2} = \chi_2 \quad \text{oder} \quad f''(x) = 1 \cdot 2 \chi_2.$$

Den weiteren Fortgang dieser Schlüsse übersieht man leicht und findet bei jedem ganzen positiven m, wenn $n > m$ genommen wird,

$$f^{(m)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \chi_m.$$

Hiermit rechtfertigt sich die anfangs ausgesprochene Behauptung und zugleich ist ersichtlich, dass die vorausgesetzte Entwickelung 1) mit der Taylor'schen Reihe übereinstimmen muss.

An diese Ableitung knüpft sich noch eine wichtige allgemeine Bemerkung. Der Vergleich von Nro. 3) und Nro. 4) zeigt nämlich, dass in Nro. 3) das Hinschreiben der Glieder $\chi_2 h$, $\chi_3 h^2$ etc. überflüssig war, da letztere gleichzeitig mit h verschwinden; aus demselben Grunde hätte man sich in Nro. 5) das Hinsetzen der Glieder $\chi_3 h$, $\chi_4 h^2$ etc. ersparen können. Beachtet man, dass h der Zuwachs von x, also $= \Delta x$ ist, so ergiebt sich aus dem Vorigen die praktische Regel:

In allen Fällen, wo es auf die Ableitung eines Differentialquotienten oder einer Differentialgleichung ankommt, darf man die Glieder weglassen, welche hö-

here Potenzen von Δx enthalten, als die Ordnung der Differentialgleichung beträgt.

Will man z. B. den binomischen Satz für ganze positive Exponenten, der in der That auch ohne Differentialrechnung beweisbar ist, zur Bestimmung von $d(x^m)$ benutzen, so verfährt man der obigen Regel gemäss folgendermaassen; es ist

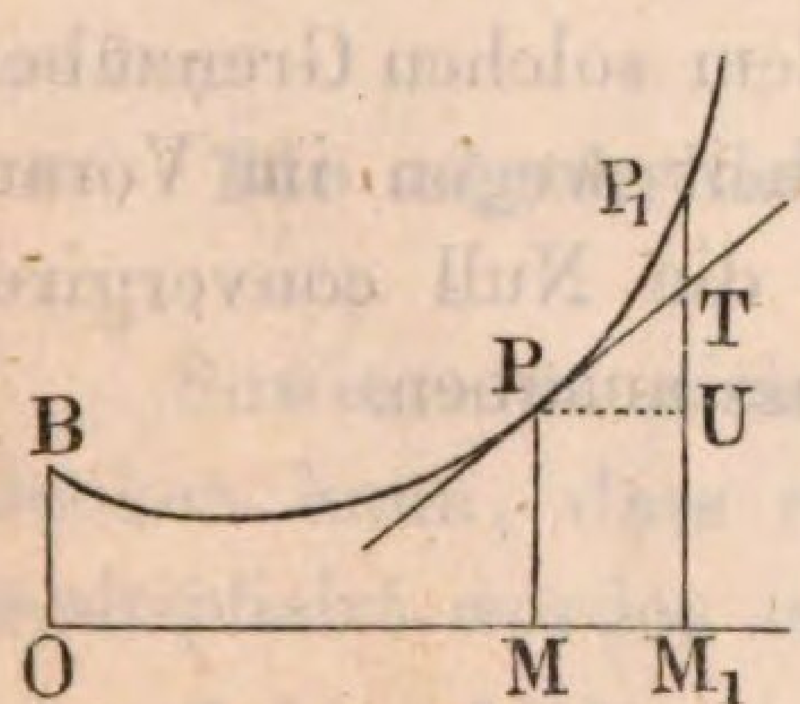
$$\Delta(x^m) = (x + \Delta x)^m - x^m = m x^{m-1} \Delta x + \text{etc.},$$

mithin bei Weglassung aller mit „etc." bezeichneten Glieder

$$d(x^m) = m x^{m-1} dx.$$

Vielleicht ist ein geometrisches Beispiel nicht überflüssig. Bedeutet $\varphi(x)$ die über der Abscisse $OM = x$ stehende Fläche $BOMP$, Δx die Abscissenzunahme $MM_1 = PU$, y die Ordinate MP, τ den Berührungswinkel UPT (Fig. 39), so hat man

Fig. 39.



$$\begin{aligned} \text{Fläche } BOM_1P_1 = \text{Fläche } BOMP \\ + \text{Rechteck } MM_1UP \\ + \text{Dreieck } PUT \\ + \text{Abschnitt } PTP_1 \end{aligned}$$

oder in den obigen Zeichen und mit Rücksicht auf den Umstand, dass der Abschnitt PTP_1 einen Bruchtheil des Dreiecks PP_1U ausmacht,

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + y\,\Delta x + \tfrac{1}{2} \tan\tau \,.\, \Delta x^2 + \tfrac{1}{2}\varrho\,\Delta x\,\Delta y,$$
$$-1 < \varrho < 1;$$

daraus folgt

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = y + \tfrac{1}{2}(\tan\tau \,.\, \Delta x + \Delta y)$$

und durch Uebergang zur Grenze für verschwindende Δx

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = y \quad \text{oder} \quad d\varphi(x) = y\,dx.$$

Hier übersieht man augenblicklich, dass die Genauigkeit, welche das Dreieck PUT und den Abschnitt PTP_1 in Rechnung zog, am unrechten Platze angebracht war; man hätte kürzer sagen können, „je kleiner Δx ist, um so genauer kommt der Flächenzuwachs $\Delta\varphi(x)$ mit dem Rechtecke $y\Delta x$ überein" und indem man die Worte „je kleiner, um so genauer" durch den Gebrauch von d statt Δ in die Sprache der Analysis einführt, gelangt man sofort zu der Gleichung $d\varphi(x) = y\,dx$.

Dieselben Bemerkungen wiederholen sich bei mehreren Variabelen; so hat man z. B. bei der Entwickelung von $d^2 f(x, y)$ alle

Grössen wegzulassen, die von höherer Dimension als von der zweiten sind, nämlich $\Delta x^2 \Delta y$, $\Delta x \Delta y^2$, Δx^3 etc.

Nicht selten nennt man Grössen, welche die Null zur Grenze haben, unendlich klein werdende oder kurz unendlich kleine Grössen; in diesem Sinne sind die Differentiale dx, dy etc. unendlich kleine Grössen, und zwar der ersten Ordnung; Producte von zwei Differentialen, wie z. B. dx^2, $dx\,dy$, dy^2, heissen entsprechend Unendlichkleine zweiter Ordnung, ebenso sind

$$dx^m, \quad dx^{m-1}dy, \quad dx^{m-2}dy^2, \quad dx^{m-2}dy\,dz, \text{ etc.}$$

Unendlichkleine von der Ordnung m. Als Regel gilt dann:

> Bei der Bildung einer Differentialgleichung sind alle unendlichkleinen Grössen wegzulassen, deren Ordnungen die Ordnung der gesuchten Differentialgleichung übersteigen;

eine Ungenauigkeit ist hierbei nie zu fürchten, weil es sich immer nur um Grenzwerthe handelt, und weil bei jedem solchen Grenzübergange alle jene Grössen, welche der Einfachheit wegen im Voraus weggelassen worden sind, in der That gegen die Null convergiren und deshalb auf das Endresultat keinen Einfluss ausüben.

Cap. VIII.

Die Functionen complexer Variabelen.

§. 53.

Die algebraischen Functionen complexer Zahlen.

Sowie man sich jede negative Zahl $-y$ dadurch entstanden denken kann, dass eine absolute Zahl y mit der negativen Einheit multiplicirt worden ist $[-y = (-1)y]$, so kann man auch imaginäre Zahlen bilden, indem man y mit der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ multiplicirt; dabei wird die Wurzel im absoluten Sinne genommen und gewöhnlich zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$ gesetzt, so dass die Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} i^2 = -1, & i^4 = +1, & i^6 = -1, & i^8 = +1, \ldots\ldots \\ i^3 = -i, & i^5 = +i, & i^7 = -i, & i^9 = +i, \ldots\ldots \end{cases}$$

statt finden. Aus einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl iy lässt sich ferner ein Complex $x + iy$ bilden; dieser heisst eine complexe Zahl, x ihr reeller, y ihr imaginärer Theil. Während wir nun bisher immer voraussetzten, dass die unabhängige Variabele z einer Function $f(z)$ auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränkt sei, wollen wir jetzt allgemeiner z als eine complexe Variabele betrachten und untersuchen, welchen complexen Werth die Function in diesem Falle erhält. Hierzu wird es aber nöthig sein, auf die ersten Elemente der Buchstabenrechnung zurückzugehen, da alle bisherigen Rechnungsregeln nur für reelle Zahlen bewiesen sind.

Zwei complexe Zahlen heissen gleich, wenn ihre reellen und gleichzeitig auch ihre imaginären Theile gleich sind. Für $x = \xi$, $y = \eta$ ist hiernach $x + iy = \xi + i\eta$ und umgekehrt.

Addition und Substraction. Unter der Summe zweier complexen Zahlen $x + iy$ und $\xi + i\eta$ verstehen wir den Ausdruck $(x + \xi) + i(y + \eta)$; die Addition complexer Zahlen geschieht demnach eben so, als wenn i ein reeller Factor wäre. Für die Subtraction behalten wir die gewöhnliche Erklärung bei, dass der gesuchte Rest, mit dem Subtrahenden vereinigt, wieder den Minuenden geben muss. Hiernach findet man sehr leicht $(X + iY) - (x + iy) = (X - x) + i(Y - y)$ ganz wie bei reellen Zahlen.

Multiplication und Division. Unter dem Producte zweier complexen Zahlen versteht man den Ausdruck, der ebenso gebildet ist, als hätte man jene Zahlen wie reelle multiplicirt und dabei $i^2 = -1$ gesetzt, nämlich

2) $$(x + iy)(\xi + i\eta) = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Bei der Division behalten wir die gewöhnliche Definition bei und bestimmen in der Gleichung

$$\frac{x + iy}{X + iY} = u + iv$$

die Unbekannten u und v aus der Bedingung

$$x + iy = (X + iY)(u + iv) = (Xu - Yv) + i(Xv + Yu).$$

Diese liefert die Gleichungen

$$x = Xu - Yv, \quad y = Xv + Yu,$$

und wenn man die hieraus gezogenen Werthe von u und v in die obige Gleichung substituirt, so erhält man

3) $$\frac{x + iy}{X + iY} = \frac{Xx + Yy}{X^2 + Y^2} + i\frac{Xy - Yx}{X^2 + Y^2}.$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man auch dadurch, dass man linker Hand Zähler und Nenner mit $X - iY$ multiplicirt und die Gleichung $(X + iY)(X - iY) = X^2 + Y^2$ beachtet.

Eine andere Methode zur Ausführung der Multiplication und Division complexer Zahlen beruht auf der Bemerkung, dass jede complexe Zahl $x + iy$ unter der Form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dargestellt werden kann. Aus

4) $$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

folgen nämlich die Gleichungen

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

und diese geben, wenn r und θ als Unbekannte angesehen werden,

5) $$x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

6) $$\frac{y}{x} = \tan\theta, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

worin k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Man nennt hier r den Modulus der complexen Zahl $x + iy$ und nimmt ihn stets im absoluten Sinne; das Quadrat des Modulus, also den Ausdruck $x^2 + y^2$, nennt man die Norm, θ das Argument oder die Amplitude.

Nach dieser Umwandlung von $x + iy$ in $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ist es nicht mehr nöthig, complexe Zahlen der ersten Form zu betrachten.

Man hat nun bei gewöhnlicher Multiplication

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.\,r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$= rr_1[\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1 + i(\sin\theta\cos\theta_1 + \cos\theta\sin\theta_1)]$$
$$= rr_1[\cos(\theta + \theta_1) + i\sin(\theta + \theta_1)],$$

der neue Modulus ist also das Product des früheren Moduli, das neue Argument die Summe der gegebenen Argumente.

Durch mehrmalige Anwendung dieser Regel gelangt man zu der allgemeineren Formel

7) $$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,.\,r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)$$
$$= r_1r_2\ldots r_m[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m)].$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Division. Multiplicirt man nämlich Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}$$

mit $\frac{1}{r}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$, so wird der Nenner $= 1$ und folglich ist der gesuchte Quotient

$$\frac{r}{r_1}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$$
$$= \frac{r}{r_1}[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 + i(\sin\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\sin\theta_1)$$

oder zusammen

8) $$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} = \frac{r}{r_1}[\cos(\theta - \theta_1) + i\sin(\theta - \theta_1)].$$

Potenzirung und Radicirung. So wie man bei ganzem positiven m unter z^m das Product versteht, welches aus dem Producte $z_1 z_2 \ldots z_m$ für gleiche z entsteht, so möge $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m$ Dasjenige bezeichnen, was aus dem Producte in Nro. 7) wird, sobald alle r und θ gleich sind; man hat dann die Formel

9) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta),$$

welche den Namen des Moivre'schen Satzes führt.

Unter $z^{\frac{m}{n}}$ verstehen wir, sowohl bei reellen als bei complexen z diejenige Zahl, deren nte Potenz gleich z^m ist; setzen wir daher

10) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = \varrho(\cos\eta + i\sin\eta),$$

wo ϱ und η nicht bekannt sind, so muss umgekehrt

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = [\varrho(\cos\eta + i\sin\eta)]^n$$

sein. Bei ganzen positiven m und n giebt dies, dem Moivre'schen Satze zufolge,

$$r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta) = \varrho^n(\cos n\eta + i\sin n\eta)$$

und durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile,

$$\varrho^n\cos n\eta = r^m\cos m\theta\,,\quad \varrho^n\sin n\eta = r^m\sin m\theta.$$

Hieraus erhält man zunächst

$$\varrho = r^{\frac{m}{n}},$$

wobei ϱ und r im absoluten Sinne zu nehmen sind. Durch Substitution dieses Werthes von ϱ gehen ferner die vorigen Gleichungen in die folgenden über

$$\cos n\eta = \cos m\theta\,,\quad \sin n\eta = \sin m\theta,$$

welche nur dann zusammen bestehen können, wenn die Differenz zwischen $n\eta$ und $m\theta$ ein gerades Vielfaches von π beträgt. Wir haben daher, wenn k eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bezeichnet,

$$n\eta = m\theta + 2k\pi \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{m\theta + 2k\pi}{n},$$

und nach Substitution der Werthe von ϱ und η in Nro. 10)

11) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right\}.$$

Da k das Gebiet der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen kann, so scheint die rechte Seite der vorstehenden Gleichung unendlich viel verschiedene Werthe zu haben, doch ist dies nicht der Fall. Giebt man nämlich dem k das eine Mal den individuellen Werth h, das andere Mal den Werth $n + h$, so ändert sich der Bogen $\frac{m\theta + 2k\pi}{n}$ um 2π und hat dann wieder denselben Cosinus und Sinus wie vorher; bei positiven k braucht man also nur $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ zu nehmen. Ferner bleibt die rechte Seite der obigen Gleichung dieselbe für $k = -h$ und für $k = n - h$. Die negativen k liefern also keine neuen Werthe. Demnach hat der Aus-

druck $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}}$ nur n von einander verschiedene Werthe, welche aus Nro. 11) für $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ hervorgehen.

Setzt man in der allgemeinen Formel 11) k gleich einem Vielfachen von m, etwa $k = hm$, und lässt in der neuen Gleichung

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m(\theta+2h\pi)}{n} + i\sin\frac{m(\theta+2h\pi)}{n}\right\}$$

m und n gleichzeitig in's Unendliche wachsen und zwar so, dass $\frac{m}{n}$ sich einer irrationalen Zahl μ nähert, so gelangt man zu der neuen Gleichung

$$12)\quad [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\mu} = r^{\mu}\{\cos\mu(\theta + 2h\pi) + i\sin\mu(\theta + 2h\pi)\}.$$

Hier ist h eine willkührliche ganze Zahl, und die rechte Seite hat unendlich viele verschiedene Werthe.

Wie bei Potenzen mit reeller Variabelen z, so verstehen wir auch bei einem complexen z unter z^{-p} den reciproken Werth von z^p; hiernach ist z. B. für ganze positive m

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-m} = \frac{1}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)}$$
$$= r^{-m}(\cos m\theta - i\sin m\theta)$$

und ähnlich in jedem anderen Falle.

§. 54.

Anwendungen der vorigen Sätze.

I. Dem Moivre'schen Theoreme zufolge gilt die Gleichung

$$\cos m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m;$$

die rechte Seite ist, m als ganz und positiv vorausgesetzt, ein Product aus m gleichen Factoren, zu dessen Ausrechnung der binomische Satz benutzt werden kann, weil die Multiplication bei reellen und bei imaginären Factoren auf völlig gleiche Weise geschieht. Nach beiderseitiger Vergleichung der reellen und der imaginären Theile gelangt man zu folgenden brauchbaren goniometrischen Formeln

$$1)\quad \cos m\theta = (m)_0 \cos^m\theta - (m)_2 \cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + (m)_4 \cos^{m-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$$

$$2)\quad \sin m\theta = (m)_1 \cos^{m-1}\theta\sin\theta - (m)_3 \cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + (m)_5 \cos^{m-5}\theta\sin^5\theta - \cdots$$

oder

3) $$\frac{\cos m\theta}{\cos^m\theta} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2\theta + (m)_4 \tan^4\theta - (m)_6 \tan^6\theta + \cdots$$

4) $$\frac{\sin m\theta}{\cos^m\theta} = (m)_1 \tan\theta - (m)_3 \tan^3\theta + (m)_5 \tan^5\theta - \cdots$$

II. Die Auflösung der Gleichung $x^n = +1$. Aus der vorstehenden Gleichung folgt $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$; die gesuchten Werthe von x können folglich nach Nro. 11) berechnet werden, wenn man $r = 1$, $\theta = 0$, $m = 1$, $k = 0, 1, \ldots\ldots (n-1)$ setzt, und sie sind in der allgemeinen Form

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

enthalten. Man kann hierbei gerade und ungerade n unterscheiden; im ersten Falle nimmt man der Reihe nach

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots \frac{n}{2} - 1,$$

$$\frac{n}{2}, n-1, n-2, \ldots\ldots \frac{n}{2} + 1,$$

im zweiten Falle

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots \frac{n-1}{2},$$

$$n-1, n-2, \ldots\ldots \frac{n+1}{2}.$$

Für ein gerades n sind hiernach die Werthe von x

$$+1, \qquad\qquad -1$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}, \qquad \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}, \qquad \cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n},$$

dagegen für ein ungerades n:

$$+1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad \cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}, \qquad \cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}, \qquad \cos\frac{6\pi}{n}-i\sin\frac{6\pi}{n},$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

So hat z. B. die Gleichung

$$x^6=+1$$

folgende 6 Wurzeln

$$+1, \qquad -1,$$

$$\tfrac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\tfrac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\tfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

III. Die Auflösung der Gleichung $x^n=-1$. Für $r=1$, $\theta=\pi$, $m=1$ erhält man aus Nro. 11) als allgemeine Form der Wurzeln

$$x=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n};$$

bei geraden n hat demnach x folgende Werthe:

$$\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n}-i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n}-i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

dagegen bei ungeraden n:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n}-i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n}-i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

§. 55.

Die Exponentialgrössen mit complexen Variabelen.

Unter der Zahl e wurde der Grenzwerth des Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ für unendlich wachsende ω verstanden; demgemäss ist

$$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega z}\right]$$

oder, wenn $\omega z = m$, mithin $\frac{1}{\omega}=\frac{z}{m}$ gesetzt wird,

$$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right], \qquad (\text{für } m=\infty).$$

Diese Gleichung hat den Sinn, dass die Exponentialgrösse als Grenzwerth einer gewissen Potenz angesehen werden kann; sie eignet sich daher sehr gut zur allgemeinen Definition der Exponentialgrösse, weil man nach den vorigen Untersuchungen für jeden Fall die Bedeutung der Potenz kennt. Wir definiren demnach e^{x+iy} durch die Gleichung

1) $$e^{x+iy} = Lim\left[\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m\right], \qquad (\text{für } m=\infty)$$

und setzen der Einfachheit wegen m als ganze und positive Zahl voraus.

Um den angedeuteten Grenzenübergang auszuführen, bringen wir zunächst die Basis der Potenz auf die Normalform, nämlich

2) $$1+\frac{x+iy}{m} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

woraus sich ergiebt

$$r = \left[1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad tan\,\theta = \frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}};$$

setzen wir ferner

$$arctan\,\frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}} = \vartheta,$$

so folgt aus der, für $tan\,\theta$ angegebenen Gleichung

$$\theta = \vartheta + k\pi,$$

wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Gleichung 2) lautet jetzt

$$1 + \frac{x + iy}{m} = r[cos(\vartheta + k\pi) + i\,sin(\vartheta + k\pi)];$$

für $x = 0$ und $y = 0$ wird $r = 1$, $\vartheta = 0$, mithin

$$1 = cos\,k\pi + i\,sin\,k\pi = cos\,k\pi,$$

woraus hervorgeht, dass k eine gerade Zahl sein muss. Man hat desswegen einfacher

$$1 + \frac{x + iy}{m} = r(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$$

und nach dem Moivre'schen Satze

3) $$e^{x+iy} = Lim\,\{r^m(cos\,m\vartheta + i\,sin\,m\vartheta)\}\,.$$

Darin ist

$$r^m = \left(1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m},$$

und, wenn

$$\frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2} = \frac{1}{\mu}$$

gesetzt wird, so stellt sich r^m unter folgende Form:

$$r^m = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} = \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu\right]^{\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{\mu}}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu\right]^{x + \frac{x^2 + y^2}{2m}}.$$

Bei unendlich wachsenden m convergirt $\frac{1}{\mu}$ gegen die Null, mit

hin wird μ unendlich gross, und die vorstehende Gleichung zeigt dann, dass r^m den Ausdruck e^x zur Grenze hat.

Was ferner $m\vartheta$ anbelangt, so ist identisch

$$m\vartheta = \frac{\vartheta}{tan\vartheta}\cdot m\,tan\vartheta = \frac{cos\vartheta}{\frac{sin\vartheta}{\vartheta}}\cdot\frac{y}{1+\frac{x}{m}};$$

bei unendlich wachsenden m convergirt ϑ gegen die Null, $\frac{sin\vartheta}{\vartheta}$ gegen die Einheit, folglich $m\vartheta$ gegen den Werth y. Nach diesen Bemerkungen zusammen wird die Gleichung 3) zu

4) $$e^{x+iy} = e^x(cos\,y + i\,sin\,y).$$

Fast genau dieselben Schlüsse sind auf die etwas allgemeinere Exponentialgrösse a^z anwendbar. Bei reellen z ist

$$a^z = e^{zla} = Lim\left[\left(1+\frac{z\,la}{m}\right)^m\right],$$

und wenn man diese Gleichung als Definition für den Fall $z = x + iy$ beibehält, so findet man ohne Mühe

5) $$a^{x+iy} = a^x[cos(y\,la) + i\,sin(y\,la)].$$

Um zu entscheiden, ob die Fundamentaleigenschaft der Exponentialgrösse, nämlich die Gleichung $a^z\,.\,a^\zeta = a^{z+\zeta}$, auch bei complexen z und ζ richtig bleibt, multipliciren wir die Gleichung 5) mit

$$a^{\xi+i\eta} = a^\xi[cos(\eta\,la) + i\,sin(\eta\,la)]$$

und benutzen rechter Hand den Satz

$$r(cos\theta + i\,sin\theta).r_1(cos\theta_1 + i\,sin\theta_1) = rr_1[cos(\theta+\theta_1) + i\,sin(\theta+\theta_1)];$$

das Resultat ist

$$\begin{aligned} a^{x+iy}\,.\,a^{\xi+i\eta} &= a^{x+\xi}\{cos[(y+\eta)la] + i\,sin[(y+\eta)la]\} \\ &= a^{(x+\xi)+i(y+\eta)} \end{aligned}$$

und es erhellt hieraus, dass jene Eigenschaft in der That für complexe Exponenten gilt. Alle übrigen Eigenschaften der Exponentialgrösse, wie z. B. $(a^z)^k = a^{kz}$, sind Folgerungen der erwähnten Eigenschaft und bleiben daher gleichfalls ungestört.

Eine brauchbare Anwendung der obigen Theoreme ist folgende. In Formel 4) setzen wir $x = 0$, das eine Mal $y = u$, das andere Mal $y = -u$, und haben dann

$$e^{iu} = cos\,u + i\,sin\,u\,,\quad e^{-iu} = cos\,u - i\,sin\,u,$$

mithin durch Addition und Subtraction

6) $$2\,cos\,u = e^{iu} + e^{-iu},\quad 2\,i\,sin\,u = e^{iu} - e^{-iu}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wenn man beiderseits auf

die *m*te Potenz erhebt und rechter Hand den binomischen Satz anwendet,

$$7)\qquad 2^m \cos^m u$$
$$= (m)_0\, e^{imu} + (m)_1\, e^{i(m-2)u} + (m)_2\, e^{i(m-4)u} + \cdots$$

$$8)\qquad 2^m\, i^m \sin^m u$$
$$= (m)_0\, e^{imu} - (m)_1\, e^{i(m-2)u} + (m)_2\, e^{i(m-4)u} - \cdots$$

Hier kann man jede Exponentialgrösse wieder in Cosinus und Sinus umsetzen und nachher die reellen und imaginären Theile auf beiden Seiten vergleichen. Aus Nro. 7) erhält man so

$$2^m \cos^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u + \cdots$$

Nicht überflüssig ist es, die Fälle eines geraden und eines ungeraden m zu unterscheiden. Bei geraden m giebt es einen mittelsten Binomialcoefficienten $(m)_{\frac{1}{2}m}$ und jeder andere Coefficient kommt zweimal vor; daher lassen sich die mit gleichen Coefficienten versehenen Summanden vereinigen, was nach beiderseitiger Division mit 2 zu folgender Gleichung führt:

$$9)\qquad 2^{m-1} \cos^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u + \cdots$$
$$\cdots + (m)_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2u + \tfrac{1}{2}(m)_{\frac{1}{2}m}\,.$$

Dagegen ergiebt sich für ungerade m:

$$10)\qquad 2^{m-1} \cos^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u + \cdots$$
$$\cdots + (m)_{\frac{1}{2}(m-3)} \cos 3u + (m)_{\frac{1}{2}(m-1)} \cos u.$$

Die Gleichung 8) gestattet eine ganz ähnliche Behandlung, und zwar findet man bei geraden m:

$$11)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}m}\, 2^{m-1} \sin^m u$$
$$= (m)_0 \cos mu - (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} (m)_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2u + (-1)^{\frac{1}{2}m}\, \tfrac{1}{2}(m)_{\frac{1}{2}m}\,,$$

dagegen bei ungeraden m:

$$12)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\, 2^{m-1} \sin^m u$$
$$= (m)_0 \sin mu - (m)_1 \sin(m-2)u + (m)_2 \sin(m-4)u - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-3)} (m)_{\frac{1}{2}(m-3)} \sin 3u + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} (m)_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin u.$$

Die hier entwickelten vier Gleichungen bilden gewissermaassen die Umkehrungen der beiden Gleichungen 1) und 2) in §. 54.

§. 56.

Die Logarithmen complexer Zahlen.

Wie bei reellen ζ, so verstehen wir auch bei complexen ζ unter $l\zeta$ diejenige Zahl z, welcher die Eigenschaft $e^z = \zeta$ zukommt. Setzen wir demnach

1) $$l(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo x und y vorläufig noch unbekannt sind, so muss umgekehrt

$$e^{x+iy} = \xi + i\eta$$

oder

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \xi + i\eta$$

sein. Die beiden hieraus folgenden Gleichungen

2) $$e^x \cos y = \xi\,, \qquad e^x \sin y = \eta$$

liefern erstens

$$e^{2x} = \xi^2 + \eta^2\,, \qquad e^x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

3) $$x = \tfrac{1}{2} l(x^2 + y^2),$$

und zwar nehmen wir das Wurzelzeichen im absoluten Sinne, weil e^x bei reellen x nicht negativ sein kann. Die Gleichungen 2) werden durch Substitution des Betrages von e^x zu den folgenden

4) $$\cos y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\,, \qquad \sin y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\,,$$

5) $$\tan y = \frac{\eta}{\xi}\,, \qquad y = \arctan \frac{\eta}{\xi} \pm m\pi\,,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die sich etwas näher bestimmen lässt, wenn man die Fälle eines positiven und eines negativen ξ unterscheidet. Für $\eta = 0$ wird nämlich $y = \pm m\pi$ und nach Nro. 4) $\cos y = +1$ oder $\cos y = -1$ je nachdem ξ positiv oder negativ ist; hieraus geht hervor, dass im ersten Falle m eine gerade, im zweiten Falle eine ungerade Zahl sein muss. Bezeichnet k irgend eine positive ganze Zahl, so haben wir vermöge der Werthe von x und y folgende Formeln: für ein positives ξ:

6) $$l(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\left[\arctan \frac{\eta}{\xi} \pm 2k\pi\right],$$

dagegen für ein negatives ξ:

7) $$l(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\left[arctan \frac{\eta}{\xi} \pm (2k+1)\pi\right].$$

In dem sehr einfachen Falle $\xi = \pm 1$ und $\eta = 0$ erhält man hieraus

8) $$l(+1) = \pm 2k\pi i, \qquad l(-1) = \pm (2k+1)\pi i,$$

mithin kann bei positiven ξ

9) $$l(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\, arctan \frac{\eta}{\xi} + l(+1),$$

und bei negativen ξ

10) $$l(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\, arctan \frac{\eta}{\xi} + l(-1)$$

gesetzt werden. Die unendliche Vieldeutigkeit der Logarithmen wird übrigens nicht überraschen, wenn man sich erinnert, dass

$$l\zeta = Lim\left[n(\sqrt[n]{\zeta} - 1)\right], \qquad (\text{für } n = \infty)$$

ist und dass $\sqrt[n]{\zeta}$, den Untersuchungen des §. 54 zufolge, n verschiedene Werthe besitzt.

Aus der Gleichung

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

ergiebt sich bekanntlich die Haupteigenschaft der Logarithmen

$$l(\zeta_1 \zeta_2) = l\zeta_1 + l\zeta_2;$$

jene Relation besteht, wie in §. 55 gezeigt wurde, auch bei complexen z_1 und z_2, mithin gilt die letztere Eigenschaft gleichfalls bei complexen ζ_1 und ζ_2. Eine Anwendung des Satzes besteht darin, dass man die Werthe von $l(\xi + i\eta)$ und $l(\xi - i\eta)$ nach Formel 7) oder nach Formel 8) entwickelt und die beiden erhaltenen Gleichungen von einander abzieht; man findet so

11) $$l\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right) = 2i\left\{arctan \frac{\eta}{\xi} \pm 2h\pi\right\},$$

wo h eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

§. 57.

Die goniometrischen und cyclometrischen Functionen mit complexen Variabelen.

I. Die in §. 55 Nro. 6) entwickelten Gleichungen

$$cos\, u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \qquad sin\, u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

wollen wir als die allgemeinen analytischen Definitionen von $\cos u$ und $\sin u$ beibehalten; es ist dann

$$\cos(iv) = \frac{e^{-v} + e^{+v}}{2} = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2},$$

$$\sin(iv) = \frac{e^{-v} - e^{+v}}{2i} = i\frac{e^{v} - e^{-v}}{2},$$

und überhaupt bei complexen $u = x + iy$

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{+y-ix}}{2},$$

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{+y-ix}}{2i}$$

oder, wenn man e^{+ix} sowie e^{-ix} durch $\cos x$ und $\sin x$ ausdrückt,

1) $$\cos(x+iy) = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x,$$

2) $$\sin(x+iy) = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x.$$

Vermöge der Werthe von $\cos(iy)$ und $\sin(iy)$ kann man dafür schreiben

$$\cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy),$$
$$\sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy),$$

woraus hervorgeht, dass die bekannten Formeln für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ auch bei imaginären β richtig bleiben. Die Gleichungen 1) und 2) liefern ferner

$$\cos^2(x+iy) + \sin^2(x+iy)$$
$$= \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2 = 1;$$

die Relation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ besteht daher auch bei complexen z.

Für die übrigen goniometrischen Functionen behalten wir die gewöhnlichen Definitionen

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ u. s. w.}$$

ungeändert bei. Hiernach ist z. B.

$$\tan(x+iy) = \frac{(e^{y}+e^{-y})\sin x + i(e^{y}-e^{-y})\cos x}{(e^{y}+e^{-y})\cos x - i(e^{y}-e^{-y})\sin x},$$

oder, wenn man den Nenner durch Multiplication mit

$$(e^{y}+e^{-y})\cos x + i(e^{y}-e^{-y})\sin x$$

reell macht,

3) $$tan(x + iy) = \frac{2\,sin\,2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + 2\,cos\,2x + e^{-2y}}.$$

Auf gleiche Weise lassen sich alle übrigen goniometrischen Functionen des complexen Bogens $x + iy$ auf die Form $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ bringen.

II. Für die cyclometrischen Functionen benutzen wir die gewöhnlichen Definitionen, zufolge deren sie die kleinsten Umkehrungen der goniometrischen Functionen sind. So verstehen wir z. B. unter $arcsin(\xi + i\eta)$ denjenigen, für $\xi + i\eta = 0$ verschwindenden Bogen, dessen Sinus den Werth $\xi + i\eta$ besitzt. Setzen wir demnach

4) $$arcsin(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo x und y vorläufig unbekannt sind, so muss umgekehrt die Gleichung

$$sin(x + iy) = \xi + i\eta$$

gelten, die nach Nro. 2) mit der folgenden übereinkommt,

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\,sin\,x + i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\,cos\,x = \xi + i\eta.$$

Zur Bestimmung von x und y dienen jetzt die beiden Gleichungen

5) $$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\,sin\,x = \xi, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2}\,cos\,x = \eta.$$

Aus diesen erhält man leicht

6) $$e^y = \frac{\xi}{sin\,x} + \frac{\eta}{cos\,x}, \quad e^{-y} = \frac{\xi}{sin\,x} - \frac{\eta}{cos\,x}$$

und durch Multiplication

$$1 = \frac{\xi^2}{sin^2 x} - \frac{\eta^2}{cos^2 x}$$

oder

$$sin^2 x\,cos^2 x = \xi^2 cos^2 x - \eta^2 sin^2 x.$$

Ersetzt man $sin^2 x$ durch $1 - cos^2 x$, so ergiebt sich eine Gleichung mit der Unbekannten $cos\,x$ und es wird

$$cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \xi^2 - \eta^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2};$$

hier ist nur das obere Zeichen anwendbar, weil sonst $cos^2 x$ negativ ausfallen würde. Man hat demnach

$$cos^2 x = \tfrac{1}{2}\left[1 - \xi^2 - \eta^2 + \sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}\right],$$
$$sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left[1 + \xi^2 + \eta^2 - \sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}\right],$$

oder auch

$$sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left[1 + \xi^2 + \eta^2 - \sqrt{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4\xi^2}\right].$$

Benutzt man zur Abkürzung die Symbole

7) $$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-\sqrt{(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\xi^2}},$$

8) $$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\xi^2-\eta^2+\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\eta^2}},$$

so hat man nach dem Vorigen

$$\sin x = X, \qquad \cos x = Y;$$

hieraus ergiebt sich der Werth von x, und zwar ist einfach $x = \arcsin X$ zu setzen, wenn der anfangs ausgesprochenen Bedingung des gleichzeitigen Verschwindens von ξ und x genügt werden soll. Ferner hat man aus Nro. 6)

$$y = l\left(\frac{\xi}{\sin x} + \frac{\eta}{\cos x}\right) = l\left(\frac{\xi}{X} + \frac{\eta}{Y}\right),$$

mithin zusammen

9) $$\arcsin(\xi + i\eta) = \arcsin X + il\left(\frac{\xi}{X} + \frac{\eta}{Y}\right).$$

Die Function $\arccos(\xi + i\eta)$ gestattet eine ganz ähnliche Behandlung, wobei sich ergiebt

10) $$\arccos(\xi + i\eta) = \arccos X + il\left(\frac{\xi}{X} - \frac{\eta}{Y}\right);$$

auf gleiche Weise würden sich auch die übrigen cyclometrischen Functionen complexer Variabelen in die complexe Form $u + iv$ bringen lassen.

Wir betrachten noch einige specielle Fälle der obigen Formeln. Es sei erstens $\eta = 0$, so wird

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\xi^2-\sqrt{(1-\xi^2)^2}},$$

und hier sind die Fälle $\xi < 1$ und $\xi > 1$ zu unterscheiden.

Für $\xi < 1$ ist der absolute Werth von $\sqrt{(1-\xi^2)^2} = 1 - \xi^2$, mithin wird $X = x$, ferner nach Nro. 8) $Y = \sqrt{1-\xi^2}$ und $\frac{\eta}{Y} = 0$; die Gleichung 9) reducirt sich in diesem Falle auf die Identität $\arcsin \xi = \arcsin \xi$. Dagegen ist für $\xi > 1$ der absolute Werth von $\sqrt{(1-\xi^2)^2} = \xi^2 - 1$, mithin $X = 1$, $\arcsin X = \frac{1}{2}\pi$. Ferner wird unter diesen Umständen $Y = 0$, folglich $\frac{\eta}{Y} = \frac{0}{0}$, wovon sich der wahre Werth auf folgende Weise findet. Es ist

$$\frac{\eta^2}{Y^2} = \frac{2\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\eta^2}+1-\xi^2-\eta^2},$$

mithin, wenn man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\eta^2}-(1-\xi^2-\eta^2)$$

multiplicirt,

$$\frac{\eta^2}{Y^2} = \frac{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\eta^2}-(1-\xi^2-\eta^2)}{2};$$

für $\eta = 0$ wird hieraus wegen $\xi > 1$

$$\frac{\eta^2}{Y^2} = \xi^2 - 1, \qquad \frac{\eta}{Y} = \sqrt{\xi^2-1}.$$

Zufolge der gefundenen Werthe hat man aus Nro. 9)

11) $$arcsin\,\xi = \tfrac{1}{2}\pi + il\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right), \quad \xi > 1,$$

und es wird dieses Resultat nicht befremden, wenn man sich erinnert, dass zu einem die Einheit übersteigenden Sinus kein reeller Bogen gehören kann.

Aus der Formel 10) erhält man für $\eta = 0$ und $\xi > 1$

12) $$arccos\,\xi = il\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right);$$

die Addition der Gleichungen 11) und 12) zeigt, dass die Relation

$$arcsin\,\xi + arccos\,\xi = \tfrac{1}{2}\pi$$

auch für $\xi > 1$ richtig bleibt.

Es sei zweitens $\xi = 0$; es wird dann $X = 0$, $Y = 1$, mithin $\frac{\xi}{X} = \frac{0}{0}$. Da aber

$$\frac{\xi^2}{X^2} = \frac{2\xi^2}{1+\xi^2+\eta^2-\sqrt{(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\xi^2}}$$

$$= \frac{1+\xi^2+\eta^2+\sqrt{(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\xi^2}}{2},$$

so ist für $\xi = 0$ der wahre Werth von

$$\frac{\xi^2}{X^2} = 1 + \eta^2 \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{X} = \sqrt{1+\eta^2};$$

die Gleichungen 9) und 10) gehen jetzt in die folgenden über

13) $$arcsin\,(i\eta) = il\left(\sqrt{1+\eta^2}+\eta\right),$$

14) $$arccos\,(i\eta) = \tfrac{1}{2}\pi + il\left(\sqrt{1+\eta^2}-\eta\right).$$

Durch Addition derselben gelangt man zu dem Resultate, dass die Summe von *arcsin* und *arccos* auch bei imaginären Variabelen

gleich dem Quadranten ist. Dieser Satz gilt überhaupt für complexe Variabele, wie man durch Addition der Gleichungen 9) und 10) leicht finden wird.

Wir betrachten noch die Function $arctan(\xi + i\eta)$, deren complexer Werth $x + iy$ sein möge. Aus

15) $$arctan(\xi + i\eta) = x + iy$$

folgt umgekehrt

$$tan(x + iy) = \xi + i\eta;$$

für die linke Seite substituiren wir den ursprünglichen Werth

$$\frac{(e^y + e^{-y})\sin x + i(e^y - e^{-y})\cos x}{(e^y + e^{-y})\cos x - i(e^y - e^{-y})\sin x} = \frac{tan\,x + i\,Q}{1 - i\,Q\,tan\,x},$$

wobei zur Abkürzung

16) $$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = Q$$

gesetzt worden ist, schaffen die Brüche weg und vergleichen die reellen und imaginären Theile; wir erhalten dann folgende zwei Gleichungen

$$tan\,x = \xi + \eta\,Q\,tan\,x, \qquad Q = \eta - \xi\,Q\,tan\,x.$$

Die erste Gleichung liefert

17) $$tan\,x = \frac{\xi}{1 - \eta Q},$$

und wenn man diesen Werth in die zweite Gleichung substituirt, so wird

$$\eta Q^2 - (1 + \xi^2 + \eta^2)\,Q = -\eta,$$

mithin

$$Q = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2 \pm \sqrt{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4\eta^2}}{2\eta}.$$

Das nöthige Vorzeichen bestimmt sich durch die Bemerkung, dass für $\eta = 0$ auch $y = 0$ und $Q = 0$ werden muss; daher ist nur das untere Zeichen zu gebrauchen. Setzt man zur Abkürzung

18) $$Z = \sqrt{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4\eta^2},$$

wo die Wurzel im absoluten Sinne zu nehmen ist, so wird

$$Q = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2 - Z}{2\eta}.$$

Aus Nro. 17) folgt jetzt

19) $$x = arctan\frac{\xi}{1 - \eta Q} \pm k\pi,$$

und dabei ist k eine positive ganze Zahl; soll aber x gleichzeitig mit

ξ verschwinden, so muss $k = 0$ genommen werden. Ferner ergiebt sich aus Nro. 16)

20) $$y = \tfrac{1}{2} l \left(\frac{1+Q}{1-Q}\right),$$

und da Q bekannt ist, so hat man auch x und y, mithin nach Nro. 15)

21) $$arctan\,(\xi + i\eta)$$
$$= arctan \frac{2\xi}{1 - \xi^2 - \eta^2 + Z} + i\tfrac{1}{2} l \left(\frac{\xi^2 + (1+\eta)^2 - Z}{Z - \xi^2 - (1-\eta)^2}\right).$$

In dem speciellen Falle $\xi = 0$ wird $Z = 1 - \eta^2$ oder $= \eta^2 - 1$, je nachdem η^2 weniger oder mehr als die Einheit beträgt, daher

$$arctan\,(i\eta) = i\tfrac{1}{2} l \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right), \qquad \eta^2 < 1,$$
$$arctan\,(i\eta) = i\tfrac{1}{2} l \left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right), \qquad \eta^2 > 1;$$

für $\eta = 1$ liefern beide Formeln:

$$arctan\, i = i\infty.$$

Die übrigen cyclometrischen Functionen können auf gleiche Weise behandelt werden.

§. 58.

Differentiation complexer Ausdrücke.

Den vorigen Untersuchungen zufolge kann eine Function, welche ausser der Variabelen z noch die imaginäre Einheit i enthält, auf die Normalform

1) $$f(z, i) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

gebracht werden, dann lässt sich aber auch eine bündige Erklärung über den Differentialquotienten von $f(z, i)$ geben. Unter $f'(z, i)$ versteht man nämlich den Ausdruck $\varphi'(z) + i\psi'(z)$ und es ist daher

2) $$\frac{df(z,i)}{dz} = \frac{d\varphi(z)}{dz} + i\frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Dieser Definition folgend wollen wir die Differentialquotienten der einfachen Functionen complexer Variabelen aufsuchen.

Die Potenz. Setzen wir nach §. 53

$$(x + iy)^\mu = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^\mu = r^\mu \cos\mu\theta + ir^\mu \sin\mu\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

so erhalten wir durch Differentiation in Beziehung auf x

$$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = -\mu r^\mu \sin\mu\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu r^{\mu-1}\cos\mu\theta \frac{\partial r}{\partial x}$$
$$+ i\left[\mu r^\mu \cos\mu\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu r^{\mu-1}\sin\mu\theta \frac{\partial r}{\partial x}\right];$$

es ist aber

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = +\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\cos\theta,$$

mithin nach Substitution dieser Werthe und gehöriger Zusammenziehung

$$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = \mu r^{\mu-1}\cos(\mu-1)\theta + i\mu r^{\mu-1}\sin(\mu-1)\theta$$
$$= \mu r^{\mu-1}[\cos(\mu-1)\theta + i\sin(\mu-1)\theta]$$

d. h.

3) $$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = \mu(x+iy)^{\mu-1}.$$

Durch eine gleich einfache Rechnung findet man

4) $$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial y} = i\mu(x+iy)^{\mu-1},$$

und nun folgt aus den Formeln 3) und 4), dass die Differentiation einer Potenz mit complexer Basis ebenso auszuführen ist, als wenn i ein reeller Coefficient wäre.

Die Exponentialgrösse. Durch Differentiation der Gleichung

$$e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$$

erhält man augenblicklich

5) $$\frac{\partial e^{x+iy}}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^{x+iy},$$

6) $$\frac{\partial e^{x+iy}}{\partial y} = -e^x\sin y + ie^x\cos y = ie^{x+iy};$$

wie man sieht, bleibt auch hier die Differentiationsregel ungestört.

Der Logarithmus. Die Formeln 6) und 7) in §. 56 können in die folgende zusammengezogen werden

$$l(\xi+i\eta) = \tfrac{1}{2}l(\xi^2+\eta^2) + i\left(\arctan\frac{\eta}{\xi} + c\right),$$

wo c eine von ξ und η unabhängige Grösse bezeichnet; daher ist

7) $$\frac{\partial l(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - i\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$
$$= \frac{1}{\xi + i\eta},$$

8) $$\frac{\partial l(\xi + i\eta)}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} + i\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} = i\frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$
$$= i\frac{1}{\xi + i\eta}.$$

Auch hier geschieht die Differentiation ebenso, als wenn i reell wäre.

Die trigonometrischen Functionen. Aus der Gleichung

$$sin(x + iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} sin\, x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2} cos\, x$$

erhält man

9) $$\frac{\partial\, sin(x + iy)}{\partial x} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} cos\, x - i\frac{e^y - e^{-y}}{2} sin\, x$$
$$= cos(x + iy),$$

10) $$\frac{\partial\, sin(x + iy)}{\partial y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} sin\, x + i\frac{e^y + e^{-y}}{2} cos\, x$$
$$= i\, cos(x + iy).$$

Für die übrigen trigonometrischen Functionen ist ebenso leicht nachzuweisen, dass die gewöhnlichen Differentiationsregeln ungeändert bleiben.

Die cyclometrischen Functionen. Setzen wir, wie in §. 57, Nro. 4)

$$arcsin(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wobei zwischen x und y die Gleichungen

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} sin\, x = \xi, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} cos\, x = \eta$$

stattfinden, so haben wir durch Differentiation in Beziehung auf ξ folgende drei Gleichungen

11) $$\frac{\partial\, arcsin(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} cos\, x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} sin\, x \frac{\partial y}{\partial \xi} = 1,$$

$$-\frac{e^y - e^{-y}}{2} sin\, x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} cos\, x \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x}{[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x]^2 + [\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x]^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x}{[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x]^2 + [\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x]^2};$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichung 11) und berücksichtigt die Relation

$$\frac{p + iq}{p^2 + q^2} = \frac{1}{p - iq},$$

so gelangt man zu der Formel

$$\frac{\partial \arcsin(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x - i\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos(x + iy)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x + iy)}}$$

oder

$$12) \qquad \frac{\partial \arcsin(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi + i\eta)^2}}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung findet sich

$$13) \qquad \frac{\partial \arcsin(\xi + i\eta)}{\partial \eta} = i\frac{1}{\sqrt{1 - (\xi + i\eta)^2}};$$

es gilt daher die gewöhnliche Regel zur Differentiation des *arcus sinus* auch bei complexen Variabelen. Für die übrigen cyclometrischen Functionen gestaltet sich die Sache ebenso.

Durch die Zulassung der Differentialquotienten complexer Ausdrücke erreicht man häufig den Vortheil, verschiedene Differentialquotienten unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zu bringen. So sind z. B. die Gleichungen

$$d\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right)\right] = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 x^2}dx,$$

$$d\arctan\frac{\beta x}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}dx$$

nicht wesentlich von einander verschieden; setzt man nämlich in der ersten $i\beta$ für β, so wird

$$d\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{\alpha + i\beta x}{\alpha - i\beta x}\right)\right] = i\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}dx$$

d. i. nach Formel 11) in §. 56

$$i\,d\left(arctan\frac{\beta x}{\alpha} \pm 2h\pi\right) = i\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2x^2}dx,$$

was mit der zweiten Gleichung übereinkommt.

Dass der Gebrauch complexer Zahlen auch bei der Entwickelung höherer Differentialquotienten von wesentlichem Nutzen sein kann, mag folgendes Beispiel zeigen.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta x - i\alpha} - \frac{1}{\beta x + i\alpha}\right)$$

erhält man durch m-malige Differentiation in Beziehung auf x

$$D^m\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = \frac{(-1)^m 1.2\ldots m\beta^m}{2i\alpha}\left\{\frac{1}{(\beta x - i\alpha)^{m+1}} - \frac{1}{(\beta x + i\alpha)^{m+1}}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^m 1.2\ldots m\beta^m}{2i}\cdot\frac{(\beta x + i\alpha)^{m+1} - (\beta x - i\alpha)^{m+1}}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{m+1}}.$$

Um die imaginären Ausdrücke wieder wegzuschaffen, setzen wir

$$\beta x \pm i\alpha = r(cos\,\theta \pm i\,sin\,\theta)$$

$$r = \sqrt{\beta^2x^2+\alpha^2}, \qquad \theta = arctan\frac{\alpha}{\beta x};$$

es wird dann

$$(\beta x + i\alpha)^{m+1} - (\beta x - i\alpha)^{m+1}$$

$$= r^{m+1}[cos(m+1)\theta + i\,sin(m+1)\theta]$$
$$- r^{m+1}[cos(m+1)\theta - i\,sin(m+1)\theta]$$

$$= 2ir^{m+1}sin(m+1)\theta = 2i(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}sin\left[(m+1)arctan\frac{\alpha}{\beta x}\right]$$

mithin

$$14)\quad D^m\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = (-1)^m 1.2.3\ldots m\beta^m\frac{sin\left[(m+1)\,arctan\dfrac{\alpha}{\beta x}\right]}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta x - i\alpha} + \frac{1}{\beta x + i\alpha}\right)$$

erhält man nach derselben Methode

$$15)\quad D^m\left(\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right) = (-1)^m 1.2..3..m\beta^m\frac{cos\left[(m+1)\,arctan\dfrac{\alpha}{\beta x}\right]}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Setzt man in der Formel 14) $\alpha = \beta = 1$, $m = n - 1$ und berücksichtigt, dass

$$D^{n-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = D^n \arctan x$$

ist, so kommt man auf dasselbe Resultat zurück, welches in §. 14, Nro. 13) durch ein weit umständlicheres Verfahren gefunden wurde.

§. 59.

Potenzenreihen mit imaginären Variabelen.

Vergleicht man die beiden früher erhaltenen Formeln

$$1)\qquad \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots\cdots$$

$$2)\qquad \arctan y = \tfrac{1}{1}y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \cdots\cdots$$

$$-1 < x < +1, \quad -1 < y < +1,$$

so fällt in die Augen, dass die erste Reihe mit der zweiten identisch werden würde, wenn man ihr den Zeichenwechsel zu verschaffen wüsste. Dies erreicht man durch die Substitution $x = iy$; die linke Seite der Gleichung 1) verwandelt sich dabei in

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right) = i \arctan y,$$

wobei $l\,1$ als eindeutig $= 0$ vorausgesetzt wird; die rechte Seite der Gleichung 1) geht über in

$$i\left(\tfrac{1}{1}y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \cdots\cdots\right),$$

ob aber die Gleichung 1) unter diesen Umständen noch besteht, ist eine andere und zwar nicht überflüssige Frage, weil die Formel 1) nur für reelle x bewiesen wurde. Die Gleichung 2) zeigt nun, dass in der That die Gleichung 1) für $x = iy$ ihre Gültigkeit behält.

Aehnlich verhält es sich mit den Formeln

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \cdots\cdots,$$

$$l\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = \frac{y}{1} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{y^5}{5} - \cdots\cdots;$$

$$-1 \leqq x \leqq +1, \quad -1 \leqq y \leqq +1,$$

deren zweite man auf demselben Wege erhalten kann, der in §. 47 zur Entwickelung der Reihe für $\arcsin x$ eingeschlagen wurde; auch hier lässt sich durch Substitution von $x = iy$ die erste Reihe in die zweite überführen, woraus folgt, dass die Reihe für $\arcsin x$ für ima-

ginäre x richtig bleibt, wenn deren Modulus die Einheit nicht überschreitet.

Behufs einer dritten Anwendung gehen wir von dem leicht beweisbaren Satze aus, dass ein Product von der Form

$$(1+\alpha_1 x)(1+\alpha_2 x)(1+\alpha_3 x)\cdots\cdots,$$

völlig entwickelt, zu einer Potenzenreihe

$$1+C_1 x+C_2 x^2+C_3 x^3+\cdots\cdots$$

führt, worin

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\cdots\cdot, \\ C_2 &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\cdots \\ &\quad +\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\cdots \\ &\quad\quad +\alpha_3\alpha_4+\cdots\cdot, \end{aligned}$$

u. s. w.

und überhaupt jeder Coefficient nach einem bekannten combinatorischen Gesetze gebildet ist. Demzufolge hat man z. B.

$$3)\qquad \left(1+\frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdot$$
$$=1+C_1 x+C_2 x^2+C_3 x^3+\cdots\cdots$$

und für den ersten Coefficienten

$$C_1=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

und nach §. 50, S. 243

$$C_1=\tfrac{1}{6}.$$

Auch die übrigen Coefficienten sind leicht zu bestimmen; setzt man nämlich $x=-z^2$ und multiplicirt beide Seiten der Gleichung 3) mit z, so erhält man

$$z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdot$$
$$=z-C_1 z^3+C_2 z^5-C_3 z^7+\cdots\cdots,$$

und hier ist die linke Seite identisch mit $\sin z$ (§. 49 Formel 16), mithin muss die rechte Seite mit der Sinusreihe übereinstimmen, woraus folgt

$$C_1=\frac{1}{1.2.3},\quad C_2=\frac{1}{1.2\ldots5},\quad C_3=\frac{1}{1.2\ldots7},\ \text{etc.}$$

Aus Formel 3) wird jetzt

$$\left(1+\frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdot$$
$$=1+\frac{x}{1.2.3}+\frac{x^2}{1.2\ldots5}+\frac{x^3}{1.2\ldots7}+\cdots\cdot$$

und zwar gilt dies für alle reellen x. Setzt man $x = +y^2$ und multiplicirt beiderseits mit y, so geht die Reihe über in

$$y + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2\ldots5} + \frac{y^7}{1.2\ldots7} + \cdots$$
$$= \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

und man hat daher die Gleichung

$$4)\quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = y\left(1 + \frac{y^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{y^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

welche zeigt, dass das unendliche Product für *sin* z auch in dem Falle richtig bleibt, wo z durch die imaginäre Variabele iy ersetzt wird.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten bei den Werthen

$$\alpha_1 = \frac{4}{1^2\pi^2},\quad \alpha_2 = \frac{4}{3^2\pi^2},\quad \alpha_3 = \frac{4}{5^2\pi^2},\ \text{etc.};$$

man gelangt nämlich zu der Formel

$$5)\quad \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \left(1 + \frac{4y^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4y^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4y^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots,$$

welche beweist, dass das unendliche Product für *cos* z auch im Falle $z = iy$ richtig bleibt.

Auf die Gleichungen 4) und 5) sind die nämlichen Transformationen anwendbar, welche in §. 50 mit den unendlichen Producten für *sin* z und *cos* z ausgeführt wurden. Nimmt man zuerst die Logarithmen und differenzirt nachher in Beziehung auf y, so erhält man

$$6)\quad \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$
$$= \frac{1}{y} + \frac{2y}{(1\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$7)\quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$
$$= \frac{2y}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$8)\quad \frac{2}{e^y - e^{-y}}$$
$$= \frac{1}{y} - \frac{2y}{(1\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} - \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$9)\quad \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$
$$= \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + y^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + y^2} - \cdots;$$

dieselben Resultate ergeben sich aus den Formeln 3), 4), 6) und 7) des §. 50 durch Substitutition von $z = iy$.

Verwandelt man ferner die soeben gefundenen Reihen in Potenzenreihen, so gelangt man zu folgenden Resultaten

10) $$\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$
$$= \frac{1}{y} + \frac{2^2 B_1}{1.2} y - \frac{2^4 B_3}{1.2..4} y^3 + \frac{2^6 B_5}{1.2..6} y^5 - \cdots,$$
$$-\pi < y < +\pi,$$

11) $$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$
$$= \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} y - \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2..4} y^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2...6} y^5 - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < y < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

12) $$\frac{2}{e^y - e^{-y}}$$
$$= \frac{1}{y} - \frac{2(2^1-1)B_1}{1.2} y + \frac{2(2^3-1)B_3}{1.2..4} y^3 - \frac{2(2^5-1)B_5}{1.2...6} y^5 + \cdots,$$
$$-\pi < y < +\pi,$$

13) $$\frac{2}{e^y + e^{-y}}$$
$$= 1 - \frac{\tau_2}{1.2} y^2 + \frac{\tau_4}{1.2..4} y^4 - \frac{\tau_6}{1.2..6} y^6 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < y < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

darin bedeuten B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen, τ_2, τ_4, τ_6 etc. die Secantencoefficienten.

Man ersieht aus den gefundenen vier Gleichungen, dass die Formeln 29), 30), 31) und 24) in §. 50 auch für $z = iy$ richtig bleiben, wenn y auf dasselbe Intervall wie z beschränkt wird.

Erscheinungen dieser Art veranlassen die allgemeinere Frage, ob es nicht möglich sein würde, das Theorem von Mac-Laurin auf complexe Variabelen auszudehnen, d. h. die Bedingungen zu finden, unter denen die Gleichung

$$f(x+iy)$$
$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x+iy) + \frac{f''(0)}{1.2}(x+iy)^2 + \cdots$$

gültig ist; diese Untersuchung werden wir im zweiten Bande erledigen.

Cap. IX.

Die Zerlegung rationaler algebraischer Functionen in Factoren und Partialbrüche.

§. 60.

Der Fundamentalsatz der Lehre von den algebraischen Gleichungen.

Aus der Algebra ist hinreichend bekannt, dass Gleichungen der vier ersten Grade jederzeit ebensoviel reelle oder complexe Wurzeln besitzen, als der Grad der Gleichung Einheiten zählt; es liegt daher die Frage nahe, ob diese Eigenschaft bei jedem höheren Grade gleichfalls stattfindet. Die Theorie der imaginären Zahlen macht eine genaue Discussion des Gegenstandes möglich, welcher wir nur eine Bemerkung vorauszuschicken haben.

Wenn eine Reihe positiver Grössen $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ gegeben ist und die Zahl q grösser als jeder der Quotienten

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \ldots \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

gewählt wird, so kann man aus den Ungleichungen

$$q > \frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad q > \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \ldots q > \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

leicht die folgenden ableiten

$$c_{k+1} < c_k q, \quad c_{k+2} < c_k q^2, \quad c_{k+3} < c_k q^3, \ldots$$

diese führen noch zu

$$c_{k+1} w^{k+1} + c_{k+2} w^{k+2} + \cdots + c_n w^n$$
$$< c_k w^k (q w + q^2 w^2 + \cdots\cdots + q^n w^n),$$

worin w eine beliebige positive Variabele bezeichnet. Wählt man letztere $< \frac{1}{2q}$, so wird $qw < \frac{1}{2}$ und

$$qw + q^2w^2 + \cdots + q^nw^n$$
$$< \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

wobei die Summe rechter Hand $= 1$ ist. Die nunmehrige Ungleichung

$$c_k w^k > c_{k+1} w^{k+1} + c_{k+2} w^{k+2} + \cdots + c_n w^n$$

enthält folgenden Satz: in der aus positiven Grössen bestehenden Reihe

$$c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots\cdots + c_n w^n$$

lässt sich w immer so klein wählen, dass irgend ein Term $c_k w^k$ mehr beträgt als die Summe aller nachherigen Glieder. — Sind die Glieder theils positiv theils negativ, so kann man sie auf ihre absoluten Werthe reduciren und dann bleibt die Schlussweise dieselbe. Man ersieht hieraus, dass bei hinreichend kleinen w das Vorzeichen der Summe

$$c_k w^k + c_{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n w^n$$

mit dem Vorzeichen des ersten Summanden übereinstimmt.

Wir betrachten nun einen Ausdruck von der Form

1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

welchen man eine ganze rationale algebraische Function nten Grades zu nennen pflegt. Setzt man für x die beliebige complexe Zahl $u + iv$, so stellt sich $f(x) = f(u + iv)$ unter die Form $M + iN$, wo M und N ganze rationale Functionen von u und v sind. Die Norm von $M + iN$, d. h. der Ausdruck $M^2 + N^2$, kann, wie leicht zu sehen ist, beliebig gross gemacht werden, wenn man u oder v oder u und v zugleich in's Unendliche wachsen lässt; dagegen kann $M^2 + N^2$ niemals negativ werden, und folglich hat dieser Ausdruck ein Minimum, welches entweder $= 0$ oder > 0 ist. Welcher von diesen Fällen stattfindet, wird die folgende Untersuchung lehren, worin das Minimum der Norm gleich mit $M^2 + N^2$ selber bezeichnet werden soll und $u + iv$ der complexe Werth von x sein möge, für welchen jenes Minimum eintritt.

Es bedeute ϱ eine Wurzel der positiven oder negativen Einheit, w eine beliebige reelle Grösse, und es werde in Nro. 1) $x = u + iv + \varrho w$ gesetzt; man erhält dann einen Ausdruck von der Form

2) $$f(u + iv + \varrho w) = P + iQ,$$

dessen Norm $P^2 + Q^2$ ist. Dieser Ausdruck lässt sich nach Potenzen von ϱw ordnen, indem man $u + iv + \varrho w$ als ein aus $u + iv$

und ϱw bestehendes Binom ansieht und dem entsprechend die Potenzen von $u + iv + \varrho w$ mittelst des binomischen Satzes entwickelt; man gelangt auf diesem Wege zu einer Gleichung folgender Gestalt

$$f(u + iv + \varrho w) = M + iN + (M_1 + iN_1)\varrho w + \cdots$$
$$\cdots + (M_n + iN_n)\varrho^n w^n,$$

worin M, N die vorige Bedeutung haben, und M_1, N_1, M_2, N_2, ... M_n, N_n rationale Functionen von u und v sind. Da möglicher Weise mehrere dieser Ausdrücke verschwinden können, so mögen M_k und N_k die ersten nicht gleichzeitig verschwindenden Functionen bedeuten; es ist dann

3) $$f(u + iv + \varrho w)$$
$$= M + iN + (M_k + iN_k)\varrho^k w^k + \cdots + (M_n + iN_n)\varrho^n w^n.$$

Für ϱ, welches bisher nicht näher bestimmt wurde, lassen sich vier verschiedene Wahlen treffen, nämlich

$$\varrho = (+1)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (-1)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (+i)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (-i)^{\frac{1}{k}},$$

welchen die Werthe

$$\varrho^k = +1, \quad \varrho^k = -1, \quad \varrho^k = +i, \quad \varrho^k = -i$$

entsprechen; bezeichnet demnach ε eine reelle (positive oder negative) Einheit, so kann einerseits $\varrho^k = \varepsilon$, mithin

$$f(u + iv + \varrho w)$$
$$= M + \varepsilon M_k w^k + \cdots + i(N + \varepsilon N_k w^k + \cdots),$$

andererseits $\varrho^k = \varepsilon i$, folglich

$$f(u + iv + \varrho w)$$
$$= M - \varepsilon N_k w^k + \cdots + i(N + \varepsilon M_k w^k + \cdots)$$

gemacht werden. Die Normen dieser Ausdrücke sind für die genannten Fälle

$$P^2 + Q^2 = M^2 + N^2 + 2\varepsilon(MM_k + NN_k)w^k + \cdots,$$
$$P^2 + Q^2 = M^2 + N^2 + 2\varepsilon(NM_k - MN_k)w^k + \cdots,$$

demnach ist es ebensowohl möglich

$$P^2 + Q^2 - (M^2 + N^2) = 2\varepsilon(MM_k + NN_k)w^k + \cdots$$

als

$$P^2 + Q^2 - (M^2 + N^2) = 2\varepsilon(NM_k - MN_k)w^k + \cdots$$

zu machen. Bei hinreichend kleinen w hat jede der Summen rechter Hand dasselbe Vorzeichen wie das erste Glied, man kann daher jene Summen negativ werden lassen, indem man dem ε das hierzu erforderliche Vorzeichen giebt. Dieses Resultat widerspricht aber der Voraussetzung, dass $M^2 + N^2$, das Minimum der Norm also $P^2 + Q^2$

$-(M^2+N^2)$ positiv sein soll, und dieser Widerspruch hört nur dann auf, wenn gleichzeitig

$$MM_k + NN_k = 0, \qquad NM_k - MN_k = 0$$

ist. Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so folgt

$$(M^2+N^2)(M_k^2+N_k^2) = 0,$$

und da $M_k^2 + N_k^2$ nicht $= 0$ ist, so muss $M^2 + N^2 = 0$, d. h. $M = 0$, $N = 0$, mithin auch $f(u+iv) = 0$ sein. Demnach existirt immer wenigstens ein complexer Werth $x = u + iv$, für welchen die ganze Function $f(x)$ verschwindet.

Bezeichnet r_1 einen complexen Werth der angegebenen Art, so ist $f(r_1) = 0$, mithin

$$f(x) = f(x) - f(r_1)$$
$$= a_1(x - r_1) + a_2(x^2 - r_1^2) + \cdots + a_n(x^n - r_1^n);$$

jeder auf der rechten Seite vorkommende Parentheseninhalt lässt sich durch $x - r_1$ ohne Rest dividiren, und daher hat man auch

$$f(x) = (x - r_1)\,[a_1 + a_2(x + r_1) + a_3(x^2 + xr_1 + r_1^2) + \cdots$$
$$\cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + r_1^{n-1})]$$
$$= (x - r_1)\,[a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_1^2 + \cdots + a_n r_1^{n-1}$$
$$+ (a_2 + a_3 r_1 + \cdots + a_n r_1^{n-2})\,x$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_n x^{n-1}]$$

oder unter Benutzung leicht verständlicher Abkürzungen

$$f(x) = (x - r_1)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}).$$

Der zweite Factor rechter Hand ist eine ganze Function $(n-1)$ten Grades, die wir mit $f_1(x)$ bezeichnen wollen, so dass

$$f(x) = (x - r_1)\,f_1(x).$$

Von der Function $f_1(x)$ gilt nun wieder der Satz, dass sie für einen gewissen Werth $x = r_2$ verschwinden muss; hieraus folgt durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$f_1(x) = (x - r_2)\,f_2(x),$$

wo $f_2(x)$ eine ganze Function $(n-2)$ten Grades bedeutet. Auf diesem Wege fortgehend, gelangt man schliesslich zu der Gleichung

$$f_{n-1}(x) = (x - r_n)\,f_n(x)$$

und darin ist $f_n(x)$ vom Grade $n - n = 0$, d. h. eine Constante C. Durch Substitution von jeder Gleichung in die folgende erhält man

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$= C(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n),$$

worin $C = a_n$ sein muss, wie man u. A. auf die Weise erkennt, dass man beide Seiten durch x^n dividirt und nachher x in's Unendliche wachsen lässt. Die Gleichung

4) $$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

zeigt, dass $f(x)$ jedesmal und nur dann verschwindet, wenn x einen der Werthe $r_1, r_2, \dots r_n$ erhält, d. h. mit anderen Worten: **jede algebraische Gleichung nten Grades $[f(x) = 0]$ hat n Wurzeln*).**

*) Obschon die numerische Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung in die Algebra gehört, wollen wir doch ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der reellen Wurzeln angeben, einerseits, weil dasselbe eine nette Anwendung der Differentialrechnung darbietet, andererseits, weil es für transcendente Gleichungen ebenso passt wie für algebraische.

Um einen reellen Werth von x zu finden, welcher die Gleichung
$$f(x) = 0$$
befriedigt, suche man zunächst zwei Näherungswerthe x_1 und x_2 der Art, dass die Functionen $f(x), f'(x), f''(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = x_1$ bis $x = x_2$, und dass $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Denkt man sich x_1 und $y_1 = f(x_1)$ sowie x_2 und $y_2 = f(x_2)$ als rechtwinklige Coordinaten zweier auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenachse liegender Curvenpunkte P_1 und P_2, wobei $OM_1 = x_1$, $M_1P_1 = y_1$, $OM_2 = x_2$, $M_2P_2 = y_2$ sein möge, so wird die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, die Abscissenachse zwischen M_1 und M_2 in einem Punkte M schneiden, dessen Abscisse OM das gesuchte x darstellt; auch existirt nur *ein* solcher Durchschnitt, wenn die Curve von P_1 bis P_2 entweder fortwährend steigt oder fortwährend fällt, d. h. wenn $f'(x)$ innerhalb des Intervalles $x = x_1$ bis $x = x_2$ sein Vorzeichen behält. Setzen wir noch voraus, dass $f''(x)$ innerhalb des genannten Intervalles gleichfalls keinen Zeichenwechsel erleide, so sind hinsichtlich des Verlaufs der Curve von P_1 bis P_2 nur vier Möglichkeiten vorhanden: die Curve steigt entweder mit convexer Krümmung oder sie fällt mit concaver Krümmung, oder sie fällt convex oder steigt concav. Im ersten und zweiten Falle haben $f'(x)$ und $f''(x)$ gleiche Vorzeichen; wir ziehen dann die Sehne P_1P_2, welche die Abscissenachse im Punkte S schneiden möge, legen an P_2 die Tangente P_2T_2, und haben in beiden Fällen
$$OS < OM < OT_2$$
d. i.

A) $$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} < x < x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Im dritten und vierten Falle sind $f'(x)$ und $f''(x)$ von entgegengesetzten Vorzeichen; wir legen dann an P_1 die Tangente P_1T_1, ziehen wie vorhin die Sehne und erhalten
$$OT_1 < OM < OS$$
d. i.

B) $$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x < \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Wenn die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ reell sind und $x = u + iv$ eine complexe Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet, so genügt dieser Gleichung auch der conjugirte complexe Werth $x = u - iv$, wie man aus den über $f(u + iv + \varrho w)$ angestellten Betrachtungen leicht erkennen wird; die complexen Wurzeln kommen daher nur paarweis vor. Ist nun z. B. $r_1 = \lambda + i\mu$ und die conjugirte Wurzel $r_2 = \lambda - i\mu$, so können die beiden complexen Factoren $x - r_1$ und $x - r_2$ zusammengezogen werden und liefern den reellen quadratischen Factor

$$(x - \lambda - i\mu)(x - \lambda + i\mu) = (x - \lambda)^2 + \mu^2.$$

Jede algebraische Function lässt sich daher in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegen.

Als Beispiel möge die Zerlegung von $f(x) = x^n - 1$ dienen, wobei die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ aus §. 54 bekannt sind. Man erhält für gerade n:

5) $$x^n - 1$$
$$= (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right),$$

dagegen für ungerade n:

6) $$x^n - 1$$
$$= (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right).$$

Durch Auflösung der Gleichung $x^n + 1 = 0$ gelangt man zu analogen Resultaten; es ist nämlich für gerade n:

7) $$x^n + 1$$
$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right),$$

Wenn demnach die anfangs ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind, so liefern, je nachdem $f'(x)$ und $f''(x)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Formeln A) oder B) neue und zwar genauere Näherungswerthe.

Durch mehrmalige Anwendung dieses Satzes kann man die Grenzen, zwischen denen die gesuchte Wurzel liegt, beliebig eng ziehen.

und für ungerade n:

$$8)\qquad x^n + 1$$
$$= (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\cdots$$
$$\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right).$$

Diese vier Sätze gestatten eine geometrische Interpretation, wenn man einen mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Kreis in $2n$ gleiche Theile theilt und die Theilpunkte mit einem festen Punkte verbindet, welcher auf dem durch den Nullpunkt der Theilung gehenden Durchmesser um x vom Centrum entfernt liegt.

§. 61.

Die Zerlegung ächt gebrochener Functionen.

Unter einer gebrochenen rationalen algebraischen Function versteht man einen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen sind; sie heisst ächt gebrochen, wenn der Nenner von höherem Grade als der Zähler ist, im Gegenfalle nennt man sie unächt gebrochen. Bei einer Function der letzteren Art kann man mit dem Nenner so lange in den Zähler dividiren, bis ein ächt gebrochener Rest zum Vorschein kommt, d. h. jede unächt gebrochene Function lässt sich in eine ganze und in eine ächt gebrochene Function zerlegen.

Die Summe mehrerer ächt gebrochenen Functionen ist wieder eine ächt gebrochene Function, deren Nenner im Allgemeinen das Product aus den Nennern der Summanden darstellt, z. B.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^2+1)};$$

man wird durch diese Bemerkung auf die Frage geführt, ob es umgekehrt wohl möglich sein würde, eine gegebene ächt gebrochene Function in einzelne Functionen derselben Art, in sogenannte Partialbrüche, zu zerlegen. Um dies zu untersuchen, denken wir uns vorerst den Nenner $F(x)$ in Factoren zerlegt, etwa

$$F(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

und nehmen $C = 1$, worin keine wesentliche Beschränkung liegt, weil man erforderlichen Falls Zähler und Nenner der gebrochenen

Function durch den Coefficienten der höchsten im Nenner vorkommenden Potenz dividiren kann. Da möglicherweise mehrere der Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_n$ gleich sein können, so wollen wir annehmen, es seien vorhanden α Wurzeln jede $= a$, β Wurzeln jede $= b$ u. s. w.; es ist dann

$$1) \qquad F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa = n$$

und die Grössen $a, b, c, \ldots k$ sind jetzt sämmtlich verschieden. Der Zähler der gegebenen Function heisse $f(x)$; sein Grad ist $< n$.

Für den Augenblick sei

$$2) \qquad \Phi(x) = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots . (x-k)^\varkappa,$$

mithin

$$3) \qquad F(x) = (x-a)^\alpha \Phi(x),$$

ferner

$$4) \qquad A = \frac{f(a)}{\Phi(a)}, \qquad f_1(x) = \frac{f(x) - A\Phi(x)}{x-a};$$

es gilt dann, wie durch Substitution der Werthe von A und $f_1(x)$ sogleich geprüft werden kann, die folgende identische Gleichung

$$5) \qquad \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \Phi(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\Phi(x)},$$

und daran knüpfen sich zwei wesentliche Bemerkungen. Da $\Phi(x)$ den Factor $x-a$ nicht enthält, so ist $\Phi(a)$ von Null verschieden, mithin A eine endliche bestimmte Grösse. Ferner hat man zufolge des Werthes von A

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \frac{f(a)}{\Phi(a)}\Phi(x)}{x-a};$$

der Zähler des vorstehenden Bruches ist eine ganze rationale Function von x und verschwindet für $x = a$; eben desswegen lässt sich diese Function ohne Rest durch $x - a$ dividiren und folglich ist der Quotient, d. h. $f_1(x)$ eine ganze Function von x. In der Gleichung 5) liegt demnach der Satz, dass die ursprünglich gegebene ächt gebrochene Function in zwei ächt gebrochene Functionen zerlegt werden kann, von denen die zweite dieselbe Form besitzt wie die Urfunction, während gleichzeitig der Grad ihres Nenners um eine Einheit niedriger ist. Indem man dasselbe Theorem wieder auf die zweite Function rechter Hand anwendet, erhält man

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\Phi(x)}$$

$$=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\,\Phi(x)},$$

$$A_1=\frac{f_1(a)}{\Phi(a)},\qquad f_2(x)=\frac{f_1(x)-A_1\,\Phi(x)}{x-a};$$

es erhellt augenblicklich, wie dieses Verfahren fortgesetzt werden kann und dass man dabei zu folgender Gleichung gelangen muss:

$$6)\qquad \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\Phi(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots\dots$$

$$\dots\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_\alpha(x)}{\Phi(x)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Psi(x)=(x-c)^\gamma\,\dots\,(x-k)^\varkappa,$$

so ist der letzte Bruch in der vorigen Gleichung

$$\frac{f_\alpha(x)}{\Phi(x)}=\frac{f_\alpha(x)}{(x-b)^\beta\,\Psi(x)};$$

mit dieser ächt gebrochenen Function lassen sich wieder dieselben Umwandlungen vornehmen wie in Nro. 6) und indem man dieses Verfahren fortsetzt, gelangt man schliesslich zu folgender Gleichung

$$7)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

$$+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

$$+\;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{K}{(x-k)^\varkappa}+\frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}}+\dots+\frac{K_{\varkappa-1}}{x-k}.$$

Nachdem hiermit die Möglichkeit sowie die Form der Zerlegung ächt gebrochener Functionen gezeigt worden ist, kommt es noch auf die Berechnung der constanten Zähler A, A_1, . . . $A_{\alpha-1}$, B, B_1 etc. an. Diese würden sich zwar bei wirklicher Ausführung der vorhin angedeuteten Operationen unmittelbar finden, doch ist dieses Verfahren so umständlich, dass ein kürzeres wünschenswerth bleibt.

Der nächstliegende Gedanke ist offenbar, allen auf der rechten Seite von Nro. 7) stehenden Grössen den gemeinsamen Nenner $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-k)^\varkappa=F(x)$ zu verschaffen und dann die Zähler zu vergleichen. Die völlige Identität von $f(x)$ und dem rechts zum Vorschein kommenden Zähler ist aber nur möglich, wenn beiderseits

gleich hohe Potenzen von x gleiche Coefficienten besitzen; man erhält damit $\alpha + \beta + \cdots + \varkappa$ Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der eben so viel Unbekannten.

Als Beispiel diene die Zerlegung von

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 1$ sind $x = +1$, $x = +1$, $x = -1$, daher ist $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 (x+1)$ und

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{9x^2 - 3x + 8}{(x-1)^2(x+1)}$$
$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Nach beiderseitiger Multiplication mit $(x-1)^2(x+1)$ hat man die beiden Zähler

$$9x^2 - 3x + 8$$
$$= (A_1 + B)x^2 + (A - 2B)x + (A - A_1 + B),$$

deren Identität folgende drei Gleichungen liefert

$$A_1 + B = 9, \quad A - 2B = -3, \quad A - A_1 + B = 8;$$

man findet hieraus $A = 7$, $A_1 = 4$, $B = 5$, mithin

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+1}.$$

Bei einer grösseren Anzahl von Partialbrüchen würde auch dieses Verfahren sehr weitläufig werden; wir wollen daher noch andere Methoden zeigen.

§. 62.

Die Zähler der Partialbrüche.

Zunächst mag der einfache Fall betrachtet werden, wo $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varkappa = 1$ ist, also der Nenner

1) $$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$$

keine gleichen Factoren enthält; die Gleichung 12) lautet jetzt

2) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k}.$$

Wir bringen dieselbe auf die kurze Form

3) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

wo $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ die Summe aller übrigen Partialbrüche bezeichnet und

$$\Phi(x) = (x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

mithin

4) $$F(x) = (x-a)\,\Phi(x)$$

ist. Durch Multiplication der Gleichungen 3) und 4) erhalten wir

$$f(x) = A\,\Phi(x) + (x-a)\,\varphi(x)$$

und für $x = a$

$$f(a) = A\,\Phi(a) \text{ oder } A = \frac{f(a)}{\Phi(a)}.$$

Um aus dieser Gleichung, welche mit Nro. 4) des vorigen Paragraphen übereinstimmt, $\Phi(a)$ zu entfernen, differenziren wir die Gleichung 4), wodurch entsteht

$$F'(x) = (x-a)\,\Phi'(x) + \Phi(x),$$

und nehmen auch hier $x = a$; dies giebt

$$F'(a) = \Phi(a),$$

mithin nach dem Vorigen

5) $$A = \frac{f(a)}{F'(a)}.$$

Für jeden anderen Zähler würde sich die Sache ganz analog gestalten und es ist daher

6) $$B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots \quad K = \frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Als Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6}.$$

Der Nenner desselben verschwindet für $x = -1$, $x = +2$, $x = -3$ und ist daher $= (x+1)(x-2)(x+3)$; die Zerlegung geschieht demnach in folgender Weise:

$$\frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

Hier ist $a = -1$, $b = +2$, $c = -3$,

$$f(x) = x^2 - 7, \qquad F'(x) = 3x^2 + 4x - 5,$$

$$A = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-6}{-6} = +1,$$

$$B = \frac{f(+2)}{F'(+2)} = \frac{-3}{+15} = -\tfrac{1}{5},$$

$$C = \frac{f(-3)}{F'(-3)} = \frac{+2}{+10} = +\tfrac{1}{5},$$

und daher zerlegt sich der betrachtete Bruch wie folgt

$$\frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Das soeben auseinandergesetzte Verfahren bleibt im Wesentlichen ungeändert, wenn einige oder alle der Wurzeln $a, b, c, \ldots k$ complex sind, denn die vorgenommenen Rechnungsoperationen gelten ganz gleichförmig für reelle und complexe Zahlen. Will man aber den Uebelstand vermeiden, dass auf der rechten Seite der Gleichung 2) imaginäre Grössen vorkommen, so braucht man nur je zwei solche Partialbrüche zu vereinigen, deren Nenner je zwei conjugirte complexe Wurzeln enthalten. Um dies näher zu erläutern, wollen wir vorerst annehmen, die Gleichung $F(x) = 0$ habe nur zwei complexe Wurzeln; diese sind dann einander conjugirt und von den Formen

$$a = p + iq, \qquad b = p - iq.$$

Aus der Gleichung 2) wird jetzt die folgende

$$7) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-p-iq} + \frac{B}{x-p+iq} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k},$$

und darin ist

$$A = \frac{f(p+iq)}{F'(p+iq)}, \qquad B = \frac{f(p-iq)}{F'(p-iq)}.$$

Die vollständige Entwickelung von A führt zu einem Werthe von complexer Form etwa

$$A = M + iN,$$

da sich aber A und B nur in dem Vorzeichen von i unterscheiden, so muss B den conjugirten Werth

$$B = M - iN$$

besitzen. In Nro. 7) lassen sich jetzt die beiden ersten Partialbrüche zusammenziehen; der gemeinschaftliche Nenner wird $(x-p)^2 + q^2$, im Zähler kann man zur Abkürzung

$$2M = P, \qquad -2(Mp + Nq) = Q$$

setzen und erhält dann

$$8) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Px+Q}{(x-p)^2+q^2} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k}.$$

Die beiden, zu conjugirten Wurzeln gehörigen imaginären Partialbrüche liefern also zusammen einen reellen Partialbruch mit quadratischem Nenner. Auf gleiche Weise behandelt man jedes Paar von Partialbrüchen, welches von einem Paare conjugirter Wurzeln herrührt.

Als Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x^2 + x + 5$ sind $x = 2 + i$, $x = 2 - i$, $x = -1$, mithin wird die Zerlegung

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{A}{x-2-i} + \frac{B}{x-2+i} + \frac{C}{x+1}.$$

Hier ist

$$a = 2 + i, \qquad b = 2 - i, \qquad c = -1,$$

$$f(x) = 7x - 3, \qquad F'(x) = 3x^2 - 6x + 1,$$

7(2+i) − 3

14+7i − 3

11+7i

$$A = \frac{f(2+i)}{F'(2+i)} = \frac{+11+7i}{-2+6i} = \tfrac{1}{2} - 2i,$$

$$B = \frac{f(2-i)}{F'(2-i)} = \frac{+11-7i}{-2-6i} = \tfrac{1}{2} + 2i,$$

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-10}{+10} = -1,$$

folglich die gesuchte Zerlegung

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{\frac{1}{2}-2i}{x-2-i} + \frac{\frac{1}{2}+2i}{x-2+i} - \frac{1}{x+1}$$

d. i. bei Zusammenziehung der beiden ersten Partialbrüche

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{x+2}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x+1}.$$

Als zweites Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1},$$

worin m und $n > m - 1$ positive ganze Zahlen bedeuten mögen. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{\pi}{n} = \vartheta$, so hat die Gleichung $x^n - 1 = 0$ bei geraden n die beiden reellen Wurzeln

$$x = +1, \qquad x = -1$$

und $n - 2$ complexe Wurzeln, welche aus den Formeln

$$x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$$

dadurch erhalten werden, dass man $h = 2, 4, 6 \ldots . n - 2$ nimmt. Nun ist im vorliegenden Falle

$$f(x) = x^{m-1}, \quad F(x) = x^n - 1, \quad F'(x) = nx^{n-1};$$

die beiden reellen Wurzeln liefern also die Partialbrüche

$$\frac{1}{n}\frac{1}{x-1}, \quad \frac{(-1)^m}{n}\frac{1}{x+1}.$$

Ferner giebt die Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ einen Partialbruch, dessen Zähler ist

$$R = \frac{(\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)^{m-1}}{n(\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)^{n-1}} = \frac{\cos h(m-n)\vartheta + i \sin h(m-n)\vartheta}{n},$$

wobei der Moivre'sche Satz benutzt wurde. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass $n\vartheta = \pi$ und h eine gerade Zahl ist, erhält man einfacher

$$R = \frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{n};$$

die Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ giebt also den Partialbruch

$$\frac{1}{n}\frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)}.$$

Der conjugirten Wurzel $x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$ entspricht der conjugirte Partialbruch

$$\frac{1}{n}\frac{\cos hm\vartheta - i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta - i \sin h\vartheta)};$$

beide Partialbrüche zusammen liefern den reellen Bruch

$$10) \quad \frac{2}{n}\frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$

dessen Zähler sich noch etwas reduciren lässt, was aber späterer Anwendungen wegen unterbleiben möge. Man erhält nun die gesuchte Zerlegung, wenn man die in Nro. 9) angegebenen Brüche nebst den Brüchen summirt, welche aus Nro. 10) für $h = 2, 4, 6, \ldots n - 2$ hervorgehen; unter Benutzung eines Summenzeichens (Σ) ist also für gerade n:

$$11) \quad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^m}{n}\frac{1}{x+1}$$
$$+ \frac{2}{n}\sum \frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 2, 4, 6, \ldots\ldots n - 2.$$

Bei ungeraden n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ folgende

$$x = +1,$$
$$x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta,$$
$$h = 2, 4, 6, \ldots n-1;$$

die Rechnung unterscheidet sich jetzt nur dadurch von der vorigen, dass die Wurzel $x = -1$ nebst dem entsprechenden Partialbruch wegfällt; daher ist für ungerade n:

$$12) \quad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1} + \frac{2}{n}\sum \frac{(x-\cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta\,\sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 2, 4, 6, \ldots . n-1.$$

Als letztes Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^{m-1}}{x^n + 1};$$

wir unterscheiden dabei wieder gerade und ungerade n. Im ersten Falle hat die Gleichung $x^n + 1 = 0$ nur complexe Wurzeln von den Formen

$$x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta,$$

wo $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und $h = 1, 3, 5, \ldots n-1$ zu setzen ist. Der Wurzel $x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta$ entspricht ein Partialbruch mit dem Zähler

$$R = \frac{\cos h(m-n)\vartheta + i\sin h(m-n)\vartheta}{n},$$

wofür man wegen $n\vartheta = \pi$ und wegen des ungeraden h schreiben kann

$$R = -\frac{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta}{n}.$$

Die beiden conjugirten Wurzeln liefern daher die conjugirten Partialbrüche

$$-\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta + i\sin h\vartheta)} \text{ und } -\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta - i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta - i\sin h\vartheta)},$$

die sich leicht zusammenziehen lassen. Damit gelangt man bei geraden n zu folgender Zerlegung:

$$13) \quad \frac{x^{m-1}}{x^n + 1} = \frac{2}{n}\sum \frac{-(x-\cos h\vartheta)\cos hm\vartheta + \sin h\vartheta\,\sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n-1.$$

Bei ungeraden n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$:

$$x = -1,$$
$$x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta,$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n - 2;$$

die Zerlegung geschieht also wie vorhin, nur kommt noch der Partialbruch hinzu, welcher der reellen Wurzel $x = -1$ entspricht. Man hat daher für ungerade n:

$$14) \quad \frac{x^{m-1}}{x^n + 1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n} \frac{1}{x+1}$$
$$+ \frac{2}{n} \sum \frac{-(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta + \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n - 2.$$

§. 63.

Fortsetzung und Schluss.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ nicht sämmtlich $= 1$ sind (Formel 7 in §. 61). Es sei r irgend eine der Grössen $a, b, c, \ldots k$, und es bedeute $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ die Summe aller Partialbrüche, in denen r nicht vorkommt; die Gleichung 7) in §. 61 lässt sich dann folgendermaassen darstellen:

$$1) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{R}{(x-r)^\varrho} + \frac{R_1}{(x-r)^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{R_{\varrho-1}}{x-r} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

und zwar ist hier

$$2) \qquad F(x) = (x-r)^\varrho \, \Phi(x).$$

Durch Multiplication beider Gleichungen, wobei zur Abkürzung

$$3) \quad R + R_1(x-r) + R_2(x-r)^2 + \cdots + R_{\varrho-1}(x-r)^{\varrho-1} = X$$

gesetzt werden möge, ergiebt sich

$$4) \qquad f(x) = X\Phi(x) + (x-r)^\varrho \varphi(x).$$

Diese Gleichung differenziren wir mehrmals nach einander und nehmen in jeder einzelnen Differentialgleichung wie auch in Nro. 12) selbst, $x = r$ was bei X und seinen Differentialquotienten X', X'' etc. durch ein angehangenes r bezeichnet werden möge; wir haben dann folgende Gleichungen:

$$f(r) = X_r \Phi(r),$$
$$f'(r) = X_r \Phi'(r) + X_r' \Phi(r),$$
$$f''(r) = X_r \Phi''(r) + 2X_r' \Phi'(r) + X_r'' \Phi(r),$$
u. s. w.

Andererseits ergeben sich aus Nro. 3) folgende Werthe von X_r, X_r', X_r'' etc.

$$X_r = R, \quad X_r' = 1 R_1, \quad X_r'' = 1.2 R_2, \quad X_r''' = 1.2.3 R_3 \text{ u. s. w.};$$

substituirt man dieselben in die vorigen Gleichungen und bezeichnet zur Abkürzung $1.2.3\ldots m$ mit m', so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$5)\left\{\begin{aligned} f(r) &= R\Phi(r), \\ f'(r) &= R\Phi'(r) + 1'R_1\Phi(r), \\ f''(r) &= R\Phi''(r) + 2.1'R_1\Phi'(r) + 2'R_2\Phi(r), \end{aligned}\right.$$

u. s. w.

deren allgemeines Schema ist

$$f^{(m)}(r) = R\Phi^{(m)}(r) + (m)_1\, 1'R_1\Phi^{(m-1)}(r) + (m)_2\, 2'R_2\Phi^{(m-2)}(r) + \ldots.$$

Man kennt hier $\Phi(x)$, mithin auch $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$, $\Phi''(r)$ etc.; die Gleichungen 5) enthalten daher nur die Unbekannten R, R_1, R_2 etc., welche der Reihe nach daraus entwickelt werden können.

Als Beispiel diene die Zerlegung

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Um zunächst A, A_1, A_2 zu bestimmen, hat man A für $R, r = 0$, und

$$\Phi(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1,$$

$$\Phi'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \qquad \Phi''(x) = 6x - 2$$

zu setzen, während $f(x)$ immer $= 1$ ist. Die Gleichungen 5) werden jetzt

$$1 = A,$$

$$0 = A(-1) + A_1,$$

$$0 = A(-2) + 2A_1(-1) + 2A_2,$$

und daraus ergeben sich die Werthe

$$A = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 2.$$

Um B und B_1 zu finden, schreibt man in Nro. 5) B statt R, setzt $r = 1$,

$$\Phi(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3,$$

$$\Phi'(x) = 4x^3 + 3x^2,$$

und erhält

$$1 = B.2, \qquad 0 = B.7 + B_1.2,$$

mithin

$$B = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = -\tfrac{7}{4}.$$

Zur Bestimmung von C gehören endlich die Substitutionen $R = C$, $r = -1$,

$$\Phi(x) = x^3(x-1)^2;$$

die erste der Gleichungen 5) liefert dann

$$1 = C(-4) \quad \text{oder} \quad C = -\tfrac{1}{4}.$$

Zufolge dieser Coefficientenwerthe hat man jetzt folgende Zerlegung

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2\,(x+1)}$$
$$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

Das angegebene Verfahren bleibt der Hauptsache nach ungeändert, wenn zwei oder mehrere der Grössen $a, b, c, \ldots k$ complex ausfallen, nur wird man das Imaginäre wie früher dadurch vermeiden, dass man je zwei Partialbrüche vereinigt, welche conjugirten Wurzeln entsprechen. Ein Beispiel dürfte hinreichen, um diese Modification kennen zu lernen.

Wenn es sich um die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}$$

handelt, so zerfällt man erst $x^2 + 1$ in $(x - i)\,(x + i)$ und setzt dann

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)} = \frac{x+1}{(x-i)^2\,(x+i)^2\,(x-1)}$$
$$= \frac{A}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{B}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{x+i} + \frac{C}{x-1}.$$

Die Gleichungen 5) liefern, wenn man $f(x) = x + 1$, A für R, i für r und $\Phi(x) = (x+i)^2\,(x-1)$ setzt, die Werthe

$$A = \frac{i}{4}, \qquad A_1 = -\frac{1-i}{4}.$$

Zur Bestimmung von B und B_1 ist keine neue Rechnung erforderlich, denn es würde sich diese nur darin von der vorigen unterscheiden, dass überall $-i$ an der Stelle von i und B statt A stände; man hat daher

$$B = -\frac{i}{4}, \qquad B_1 = -\frac{1+i}{4}.$$

Die Substitution $r = 1$, $R = C$, $\Phi(x) = (x^2+1)^2$ giebt noch $C = \frac{1}{2}$ und daher ist

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

$$=\frac{i}{4}\left[\frac{1}{(x-i)^2}-\frac{1}{(x+i)^2}\right]-\frac{1}{4}\left[\frac{1-i}{x-i}+\frac{1+i}{x+i}\right]+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1},$$

oder bei Zusammenziehung der conjugirten Partialbrüche

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}.$$

INTEGRALRECHNUNG.

Cap. X.

Fundamentalsätze der Integralrechnung.

§. 64.

Bestimmte und unbestimmte Integrale.

Die Betrachtung einer Function $F(x)$ und ihres Differentialquotienten $F'(x)$ veranlasst zwei verschiedene Aufgaben, nämlich entweder $F'(x)$ aus $F(x)$ abzuleiten, oder umgekehrt $F(x)$ zu finden, wenn $F'(x)$ gegeben ist. Mit der ersten Aufgabe beschäftigt sich die Differentialrechnung, die zweite gehört der Integralrechnung. Bezeichnen wir die gegebene Function mit $f(x)$, so würde es darauf ankommen, die unbekannte Function $F(x)$ zu ermitteln, von welcher $f(x)$ der Differentialquotient ist.

Eine directe Lösung dieses Problems lässt sich aus dem Begriffe des Differentialquotienten unmittelbar herleiten, indem man die Gleichung

$$1)\qquad \frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}=f(x)+\varrho$$

benutzt, in welcher ϱ eine mit δ gleichzeitig gegen die Null convergirende Grösse bezeichnet. Wir geben dieser Gleichung die Form

$$F(x+\delta)-F(x)=f(x)\,\delta+\varrho\,\delta,$$

nehmen darin der Reihe nach

$$x=a,\, a+\delta_1,\, a+\delta_1+\delta_2,\, \ldots\, a+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1},$$
$$\delta=\delta_1,\quad \delta_2,\qquad \delta_3,\qquad \ldots\qquad \delta_n$$

und bezeichnen die verschiedenen Werthe von ϱ, welche jenen Substitutionen entsprechen, mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$; auch wollen wir zur Ver-

meidung jeder Doppeldeutigkeit von $f(x)$ voraussetzen, dass $f(x)$ reell, endlich und continuirlich bleibe von $x = a$ bis $x = a + \delta_1 + \cdots + \delta_{n-1}$; wir haben dann folgende Gleichungen:

$$F(a+\delta_1) - F(a) = f(a)\,\delta_1 + \varrho_1\,\delta_1$$
$$F(a+\delta_1+\delta_2) - F(a+\delta_1) = f(a+\delta_1)\,\delta_2 + \varrho_2\,\delta_2$$
$$F(a+\delta_1+\delta_2+\delta_3) - F(a+\delta_1+\delta_2) = f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \varrho_3\,\delta_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(a+\delta_1+\cdots+\delta_n) - F(a+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1}) = f(a+\delta_1+\cdots+\delta_{n-1})\delta_n + \varrho_n\delta_n$$

Durch Addition derselben ergiebt sich

$$\begin{aligned} & F(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n) - F(a) \\ & = f(a)\,\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \cdots \\ & \cdots + f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1})\,\delta_n \\ & + \varrho_1\,\delta_1 + \varrho_2\delta_2 + \varrho_3\delta_3 + \cdots + \varrho_n\,\delta_n. \end{aligned}$$

Wählen wir die beliebigen Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ so, dass ihre Summe $b - a$ beträgt, so ist auch

$$2)\qquad \begin{aligned} & F(b) - F(a) - [\varrho_1\,\delta_1 + \varrho_2\,\delta_2 + \cdots + \varrho_n\,\delta_n] \\ & = f(a)\,\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \cdots\cdots \\ & \cdots + f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1})\,\delta_n. \end{aligned}$$

Zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b lassen sich nun beliebig viele Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ einschalten und wenn die Anzahl der letzteren willkührlich bleibt, so kann man dieselben um beliebig kleine Stufen wachsen lassen, d. h. die Unterschiede

$$x_1 - a,\quad x_2 - x_1,\quad x_3 - x_2, \ldots\ldots x_{n-1} - x_{n-2},\quad b - x_{n-1}$$

so klein machen, als man will *). Auf den vorliegenden Fall für

$$x_1 - a = \delta_1,\quad x_2 - x_1 = \delta_2, \ldots\ldots b - x_{n-1} = \delta_n$$

angewendet heisst dies, man kann jede der Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ beliebig verringern ohne hierbei die Bedingungsgleichung

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots\cdots + \delta_n = b - a$$

zu stören. Hieraus folgt nach Nro. 1), dass jede der Grössen ϱ_1, $\varrho_2, \ldots \varrho_n$ der Null beliebig nahe gebracht, mithin ihr absoluter Werth kleiner als eine willkührliche Grösse λ gemacht werden kann. Man hat also bei hinreichend grossen n und hinreichend kleinen δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_n$

*) Geometrisch ist dies der unmittelbar einleuchtende Satz, dass man zwischen den Endpunkten einer geradlinigen Strecke AB beliebig viele Punkte $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ einschalten und diese beliebig nahe nebeneinander setzen kann, wenn deren Anzahl so gross, als man will, gewählt werden darf.

$$-\lambda < \varrho_1 < +\lambda, \quad -\lambda < \varrho_2 < +\lambda, \ldots -\lambda < \varrho_n < +\lambda$$

folglich, weil alle δ positiv sind,

$$-\lambda(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots\cdots + \delta_n)$$
$$< \varrho_1 \delta_1 + \varrho_2 \delta_2 + \varrho_3 \delta_3 + \cdots + \varrho_n \delta_n <$$
$$+\lambda(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots\cdots + \delta_n)$$

oder

$$-\lambda(b-a) < \varrho_1 \delta_1 + \varrho_2 \delta_2 + \cdots + \varrho_n \delta_n < +\lambda(b-a).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Summe $\varrho_1 \delta_1 + \cdots + \varrho_n \delta_n$ beliebig weit verringert werden kann, wenn n in's Unendliche wächst und jedes δ unendlich abnimmt, während die Bedingung $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = b - a$ ungestört bleiben muss. Unter diesen Voraussetzungen ist

3) $$Lim(\varrho_1 \delta_1 + \varrho_2 \delta_2 + \cdots + \varrho_n \delta_n) = 0,$$

mithin nach Nro. 2)

4) $$F(b) - F(a)$$
$$= Lim\,[f(a)\delta_1 + f(a+\delta_1)\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\delta_3 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1})\delta_n].$$

Hiermit ist die anfangs erwähnte Aufgabe gelöst, weil es am Ende freisteht, x für das beliebige b zu schreiben.

Den vorhin ausgesprochenen Bedingungen, dass bei unendlich wachsenden n jedes δ gegen die Null convergiren und die Summe aller δ constant $= b - a$ bleiben muss, genügt man u. A. durch die Annahme

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \cdots\cdots = \delta_n = \frac{b-a}{n},$$

in welchem Falle einfach δ für δ_1, δ_2 etc. geschrieben werden möge; est ist dann

5*) $$F(b) - F(a)$$
$$= Lim\,\{[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\},$$
$$\delta = \frac{b-a}{n},$$

wobei $f(x)$ continuirlich bleiben muss von $x = a$ bis $x = b$.

Eine compendiösere Gestalt erlangt diese Gleichung, wenn man beachtet, dass die rechte Seite eine Summe darstellt, deren einzelne Glieder von der Form $f(x)\,\delta$ sind, dass man also schreiben könnte

*) Ein Beispiel zu der obigen Formel ist folgendes. Es sei einfach $f(x) = x$, mithin $F(x)$ die unbekannte Function, deren Differentialquotient $= x$ sein soll, so wird

$$F(b) - F(a) = Lim\, \Sigma f(x)\, \delta,$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Addition aller der Glieder bezieht, welche für

$$x = a,\, a + \delta,\, a + 2\,\delta, \ldots a + \overline{n-1}\,\delta$$

aus $f(x)\,\delta$ hervorgehen; noch kürzer ist die Bezeichnung

$$F(b) - F(a) = Lim \sum_a^b f(x)\,\delta,$$

wobei man nur zu merken hat, dass a der erste Werth von x, dass jeder folgende Werth um δ grösser und dass endlich $b - \delta$ der letzte Werth von x sein soll. Insofern hier δ die Differenz zwischen zwei Nachbarwerthen des x ausmacht, eignet sich das Zeichen Δx besser als δ, also

$$F(b) - F(a) = Lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Hier kann noch die beständige Wiederholung der Sylbe *Lim* erspart werden, wenn man sich erinnert, dass bei unendlich wachsenden n der Ausdruck $\frac{b-a}{n} = \delta = \Delta x$ die Null zur Grenze hat und dass diese unendliche Abnahme des Δx kürzer durch das Zeichen des Differentiales (dx) ausgedrückt wird; so bleibt also

$$F(b) - F(a) = \sum_a^b f(x)\, dx,$$

$$\begin{aligned} F(b) &- F(a) \\ &= Lim\,\{[a + (a+\delta) + (a + 2\delta) + \cdots + (a + \overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\} \\ &= Lim\,\{na\delta + (1 + 2 + 3 \cdots + \overline{n-1})\,\delta^2\} \\ &= Lim\,\left\{an\delta + \frac{n(n-1)}{2}\,\delta^2\right\} \end{aligned}$$

und wenn man für δ seinen Werth $\frac{b-a}{n}$ einsetzt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= Lim\,\left\{a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)\left(b - a - \frac{b-a}{n}\right)\right\} \\ &= a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, indem man x für b schreibt:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + F(a) - \tfrac{1}{2}a^2,$$

oder, wenn der von x unabhängige Theil $F(a) - \frac{1}{2}a^2$ mit C bezeichnet wird:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

wo nun C eine willkührliche Constante bedeutet. In der That wird $F'(x) = x$, wie verlangt wurde.

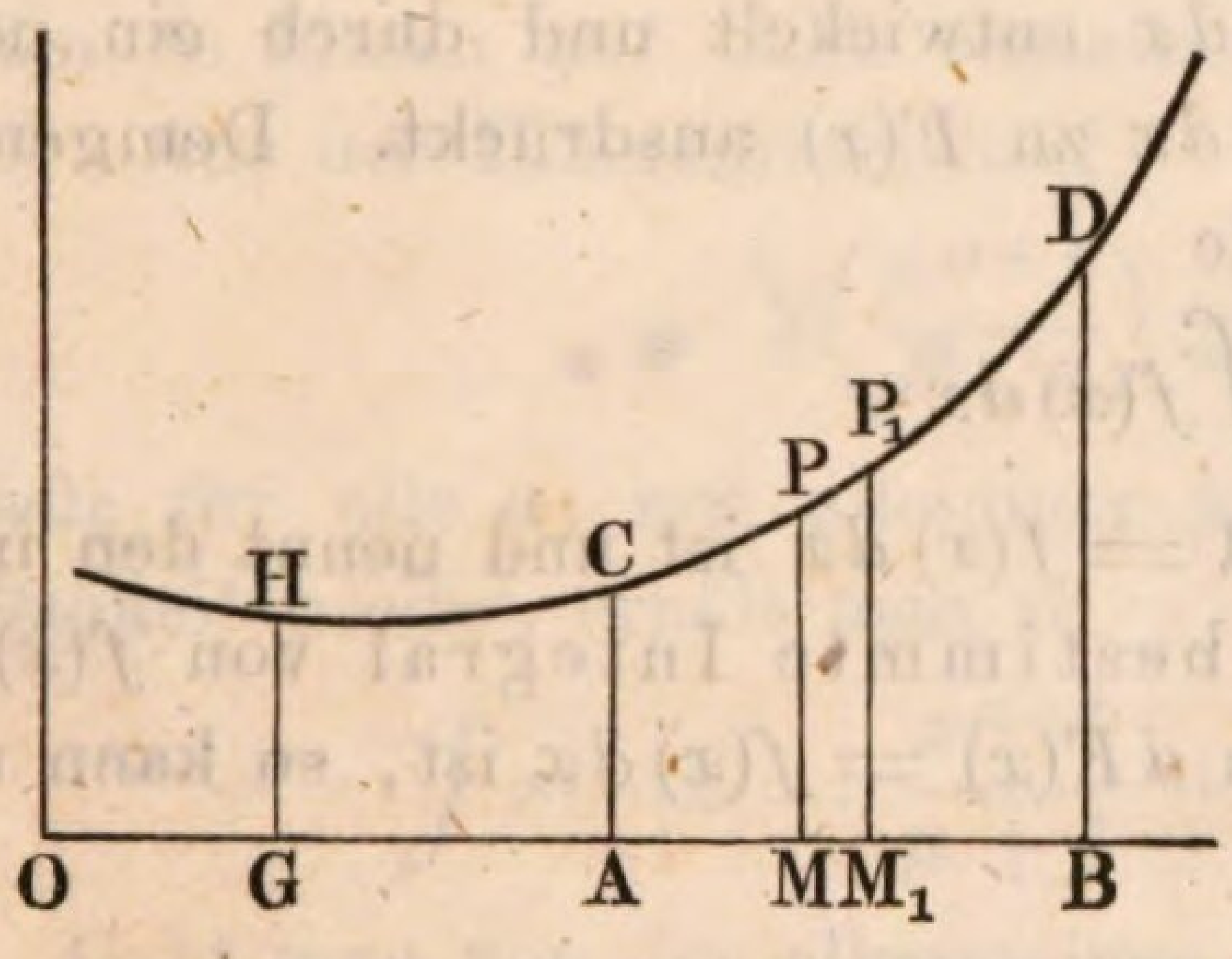
wobei es zur besseren Unterscheidung üblich geworden ist, statt des griechischen Buchstaben einen lateinischen zu gebrauchen; die Bezeichnung ist nun

6) $$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Den Ausdruck rechter Hand nennt man das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral von $f(x)\,dx$ oder auch das bestimmte Integral von $f(x)dx$, genommen von $x = a$ bis $x = b$.

Es ist nichts weniger als überflüssig, die geometrische Bedeutung dieses Ausdruckes kennen zu lernen, wenn wir auch jetzt nicht tiefer darauf eingehen. In Fig. 40 sei in rechtwinkligen Coordinaten $OM = x$ die Abscisse, $MP = f(x)$ die Ordinate und die von einer beliebigen aber festen Ordinate GH an gerechnete Fläche $GHPM = F(x)$, dann bedeutet $F(b) - F(a)$ eine Fläche, welche die Strecke $b - a$ der Abscissenachse zur Basis hat; für $OA = a$ und $OB = b$ ist demnach

Fig. 40.



$$F(b) - F(a) = \text{Fläche } ABDC.$$

Man wird sich ferner durch ähnliche Betrachtungen wie in §. 1 leicht überzeugen, dass der Differentialquotient von $F(x)$ gleich der Endordinate der Fläche $F(x)$ ist oder in Zeichen

7) $$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

dass also hier zwischen $F(x)$ und $f(x)$ dieselbe Beziehung stattfindet, welche wir anfangs voraussetzten. Um nun umgekehrt $F(x)$ oder $F(b) - F(a)$ durch $f(x)$ auszudrücken, genügt die geometrische Bemerkung, dass man einen Näherungswerth für die Fläche $ABDC$ erhält, wenn man sich dieselbe als eine Summe schmaler rechteckförmiger Streifen vorstellt; für $MM_1 = \Delta x$ ist die Fläche eines solchen Streifens $= f(x)\,\Delta x$, mithin näherungsweise

$$F(b) - F(a) = \sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

und genau

$$F(b) - F(a) = Lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx,$$

was mit dem Früheren übereinstimmt.

Das hiermit angegebene Verfahren zur Ableitung von $F(b) - F(a)$ aus $f(x)$ hat zwar den Vortheil, ganz direct zu sein und die auszuführenden Operationen (Summirung einer Reihe und nachherigen Grenzenübergang) deutlich übersehen zu lassen, aber es leidet an der Schwierigkeit, dass die genannten Operationen nur selten ausführbar sind, wie man bei einigen Versuchen bald finden wird. Man ist daher genöthigt, einen indirecten Weg einzuschlagen, welcher darin besteht, dass man von einer Function $F(x)$ den Differentialquotienten $f(x)$ oder das Differential $f(x)\,dx$ entwickelt und durch ein neues Zeichen den Rückgang von $f(x)\,dx$ zu $F(x)$ ausdrückt. Demgemäss versteht man unter dem Symbole

8) $$\int f(x)\,dx$$

jede Function, deren Differential $= f(x)\,dx$ ist und nennt den in 8) verzeichneten Ausdruck das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$. Weiss man also im Voraus, dass $dF(x) = f(x)\,dx$ ist, so kann man umgekehrt

9) $$\int f(x)\,dx = F(x)$$

oder auch

10) $$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

setzen, denn in beiden Fällen genügt die rechte Seite der ausgesprochenen Bedingung; es ist daher jederzeit erlaubt, einem unbestimmten Integrale eine willkührliche Constante anzuhängen. — Durch beiderseitige Differentiation der Gleichung 9) oder 10) ergiebt sich

$$d\int f(x)\,dx = dF(x) = f(x)\,dx,$$

woraus zu ersehen ist, dass die beiden Zeichen d und $\int$ sich gegenseitig aufheben.

Aus dem unbestimmten Integrale lässt sich auch das bestimmte Integral wieder herleiten; denn setzt man nach geschehener unbestimmter Integration einmal $x = b$, dann $x = a$, so folgt durch Subtraction

$$\int^{(x=b)} f(x)\,dx - \int_{(x=b)} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das bestimmte Integral kann demnach als die Differenz zweier Specialwerthe des unbestimmten Integrales angesehen werden, wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ und $x = b$ keine Unterbrechung der Continuität erleiden darf. Findet eine solche statt, so verlangt der eben ausgesprochene Satz eine Modification, die wir später erörtern werden.

§. 65.

Die Fundamentalformeln.

Der Definition des unbestimmten Integrales zufolge giebt jede Differentialformel Gelegenheit zur Aufstellung einer Integralformel, indem es hierzu nur einer veränderten Darstellung der ersteren bedarf. Aus der Differentialformel

$$d\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right) = x^\mu\, dx,$$

welche für alle μ, mit alleiniger Ausnahme des Falles $\mu = -1$, Gültigkeit besitzt, erhält man so

1) $$\int x^\mu\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + Const.,\ \mu \gtrless -1.$$

Geht man von der allgemeinen Formel

$$d\left\{\frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}\right\} = (a+bx)^\mu\, dx$$

aus, so findet sich auf gleiche Weise

2) $$\int (a+bx)^\mu\, dx = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b} + Const.,\ \mu \gtrless -1.$$

Die Differentialformel

$$dlx = \frac{1}{x}\, dx$$

giebt, in derselben Weise umgekehrt, bei positiven x

3) $$\int \frac{dx}{x} = lx + Const.;$$

allgemeiner ist

4) $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\, l(a+bx) + Const.,$$

womit für den Ausnahmefall $\mu = -1$ in den Formeln 1) und 2) die Entwickelung des Integrales gegeben ist. Mittelst desselben Verfahrens leitet man die folgende Integralformel ab:

5) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + Const.,$$

welche nur den speciellen Fall $\mu = -2$ von Formel 2) darstellt; ferner hat man nach §. 6

6) $$\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \, arctan \, \frac{\beta x}{\alpha} + Const.,$$

oder für $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, wo nun a und b nothwendig positiv sein müssen:

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \, arctan \, \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + Const.$$

Aus §. 6 ergiebt sich bei gleicher Behandlung

7) $$\int \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \, l\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right) + Const.,$$

oder

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \, l\left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + Const.,$$

wobei a und b an sich positiv sein müssen.

Nach §. 6 ist weiter

8) $$\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \, l(a + bx^2) + Const.$$

und hiermit schliesst sich die Reihe derjenigen Fundamentalformeln, in denen algebraische, von Wurzeln freie Ausdrücke unter dem Integralzeichen stehen.

Aus §. 6 erhält man ferner die Integralformel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\beta} \, l(\beta x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}) + Const.,$$

oder für $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$,

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \, l(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) + Const.;$$

auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\beta} \, arcsin \, \frac{\beta x}{\alpha} + Const.,$$

oder

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \, arcsin \, \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + Const.$$

Die Differentialformeln in §. 6 liefern noch die Integralformeln:

11) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{\sqrt{a + bx^2}}{b} + Const.,$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}^3} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}} + Const.,$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)}^3} = -\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}} + Const.$$

Hiermit ist die Reihe derjenigen Grundformeln beendet, welche irrationale algebraische Ausdrücke unter dem Integralzeichen enthalten.

Aus der Gleichung $d[xlx - x] = lx\,dx$ folgt weiter

14) $$\int lx\,dx = x(lx-1) + Const.$$

Durch Umkehrung der bekannten Formel

$$d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = e^{ax}dx$$

wird ferner

15) $$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + Const.$$

und damit sind zwei Formeln gewonnen, welche bei der Integration von logarithmischen und Exponentialfunctionen Anwendung finden.

Kehrt man ferner die vier Gleichungen um:

$$d\left(-\frac{\cos\mu u}{\mu}\right) = \sin\mu u\,du, \quad d\left(\frac{\sin\mu u}{\mu}\right) = \cos\mu u\,du,$$

$$d\left(-\frac{l\cos\mu u}{\mu}\right) = \tan\mu u\,du, \quad d\left(\frac{l\sin\mu u}{\mu}\right) = \cot\mu u\,du,$$

so ergeben sich unmittelbar die vier Integralformeln:

16) $$\int \sin\mu u\,du = -\frac{\cos\mu u}{\mu} + Const.$$

17) $$\int \cos\mu u\,du = +\frac{\sin\mu u}{\mu} + Const.$$

18) $$\int \tan\mu u\,du = -\frac{l\cos\mu u}{\mu} + Const.$$

19) $$\int \cot\mu u\,du = +\frac{l\sin\mu u}{\mu} + Const.$$

Die beiden letzten Gleichungen in §. 6 geben ferner

20) $$\int \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u + \beta^2\sin^2 u} = \frac{1}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\beta\tan u}{\alpha}\right) + Const.$$

21) $$\int \frac{du}{\alpha^2\cos^2 u - \beta^2\sin^2 u} = \frac{1}{2\alpha\beta}\,l\left(\frac{\alpha+\beta\tan u}{\alpha-\beta\tan u}\right) + Const.$$

Wir fügen endlich noch zwei Formeln bei, die aus den Differentialgleichungen

$$d\left[x \arcsin ax + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}\right] = \arcsin ax\, dx,$$

$$d\left[x \arctan ax - \frac{l(1 + a^2 x^2)}{2a}\right] = \arctan ax\, dx$$

entspringen, nämlich

22) $$\int \arcsin ax\, dx = x \arcsin ax + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a} + Const.$$

23) $$\int \arctan ax\, dx = x \arctan ax - \frac{l(1 + a^2 x^2)}{2a} + Const.$$

§. 66.

Allgemeine Reductionsformeln.

Sind die Differentiale, um deren Integration es sich handelt, nicht so einfach wie in den oben entwickelten Grundformeln, so muss man den gegebenen Ausdruck in Theile zu zerlegen suchen, welche, einzeln genommen, integrirt werden können, und nachher das Integral der complicirteren Grösse aus den Integralen ihrer Bestandtheile zusammensetzen. Hierzu dienen folgende Gesetze.

I. Es mögen a und b Constanten, U und V Functionen von x, endlich u und v die Differentialquotienten jener Functionen bezeichnen; es ist dann

$$d(aU + bV) = (au + bv)\, dx,$$

mithin umgekehrt

1) $$\int (au + bv)\, dx = aU + bV.$$

Zufolge der Bedeutung von u und v gelten ferner die Gleichungen

$$dU = u\, dx, \qquad dV = v\, dx,$$

aus denen folgt

$$U = \int u\, dx, \qquad V = \int v\, dx;$$

nach Substitution dieser Werthe geht die Gleichung 1) in die folgende über

2) $$\int (au + bv)\, dx = a \int u\, dx + b \int v\, dx,$$

welche die Regel zur Integration der Aggregate enthält.

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta x^2} dx = \int \frac{1}{x(\alpha + \beta x)} dx = \int \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{x} - \frac{\beta}{\alpha + \beta x}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{x} dx - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{1}{\alpha + \beta x} dx = \frac{1}{\alpha} l x - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{l(\alpha + \beta x)}{\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha} l\left(\frac{x}{\alpha + \beta x}\right).$$

Da die Differentialformel, von welcher wir anfangs ausgingen, auch für Aggregate von jeder endlichen Gliederzahl gilt, so lässt sich die Formel 2) gleichfalls auf jede endliche Reihe ausdehnen; z. B.

$$\int \frac{1 - x^n}{1 - x} dx$$

$$= \int (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) dx$$

$$= \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \cdots + \int x^{n-1}\,dx$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + Const.$$

II. Unter Beibehaltung der vorigen Zeichen erhält man aus der Differentialformel

$$d(UV) = Uv\,dx + Vu\,dx$$

die folgende Integralformel, wobei von der Regel für die Integration der Summen Gebrauch gemacht worden ist,

$$\int Uv\,dx + \int Vu\,dx = UV$$

oder

$$\int Uv\,dx = UV - \int Vu\,dx.$$

Zufolge des Werthes

$$V = \int v\,dx$$

ist die vorige Gleichung identisch mit

$$\int Uv\,dx = U\int v\,dx - \int \left[\int v\,dx\right] u\,dx,$$

wofür man einfacher zu schreiben pflegt

$$\int Uv\,dx = U\int v\,dx - \int u\,dx \int v\,dx,$$

oder auch, weil $u\,dx = dU$ war,

3)
$$\int Uv\,dx = U\int v\,dx - \int dU\int v\,dx.$$

Diese Formel der sogenannten **partiellen Integration** empfiehlt sich in allen den Fällen, wo das Integral von $v\,dx$ leicht gefunden werden kann und gleichzeitig dU ein nicht zu complicirter Ausdruck ist.

So hat man z. B. für $U = l(1+x^2)$, $v = x$,

$$\int l(1+x^2)x\,dx = l(1+x^2)\int x\,dx - \int\frac{2x\,dx}{1+x^2}\int x\,dx$$
$$= l(1+x^2)\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - \int\frac{x^3\,dx}{1+x^2},$$

und wenn man beachtet, dass weiter

$$\int\frac{x^3\,dx}{1+x^2} = \int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}l(1+x^2),$$

so ergiebt sich schliesslich

$$\int xl(1+x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}(1+x^2)\,l(1+x^2) - \tfrac{1}{2}x^2 + Const.$$

III. Befindet sich unter dem Integralzeichen eine zusammengesetzte Function, handelt es sich also um ein Integral von der Form

$$\int f[\varphi(x)]\,dx,$$

so leistet die Substitution einer neuen Variabelen häufig gute Dienste; man kann nämlich $\varphi(x) = y$ setzen und nunmehr y als neue unabhängige Variabele ansehen. Zunächst hat man die Gleichung $\varphi(x) = y$ auf x zu reduciren, wodurch man zu einem Resultate von der Form $x = \psi(y)$ kommt, man drückt nachher dx durch dy aus, indem man durch Differentiation der vorigen Gleichung $dx = \psi'(y)\,dy$ erhält, und gelangt so zu der Gleichung

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = \int f(y)\,\psi'(y)\,dy.$$

Lässt sich die Integration rechter Hand ausführen, wobei unter Anderm die partielle Integration von Nutzen sein kann, so entsteht zunächst ein Resultat von der Form

$$\int f(y)\,\psi'(y)\,dy = F(y) + Const.$$

und durch Wiedereinsetzung des Werthes von y

$$\int f[\varphi(x)]\,dx = F[\varphi(x)] + Const.,$$

womit die verlangte Integration ausgeführt ist.

So z. B. wird man in dem Integrale

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$e^x = y$ setzen, woraus $x = ly$, $dx = \frac{dy}{y}$ folgt; das Integral verwandelt sich jetzt in das folgende

$$\int \frac{1}{y + \frac{1}{y}} \frac{dy}{y} = \int \frac{dy}{y^2 + 1},$$

dessen Werth $arctan\, y + Const.$ ist; man hat daher

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = arctan(e^x) + Const.$$

Hinsichtlich der vorhin erwähnten Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = y$ müssen wir noch bemerken, dass dieselbe möglicherweise mehrere verschiedene Werthe für x geben kann (aus $\frac{x^2 - 1}{2x} = y$ z. B. folgt ebensowohl $x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ als $x = y - \sqrt{y^2 + 1}$) und es wäre daher die Frage, welcher von diesen Werthen zu nehmen sei. Man sieht aber leicht, dass man jeden beliebigen dieser Werthe wählen kann, weil am Ende y wieder rückwärts durch x ausgedrückt wird und man also jedenfalls zu demselben $\varphi(x)$ zurückkommt, von welchem man ausgegangen war.

§. 67.

Integration durch unendliche Reihen.

Wenn die vorigen Mittel nicht ausreichen, um die Integration einer gegebenen Function zu bewerkstelligen, so versucht man, das Integral in eine unendliche Reihe zu verwandeln; dies geschieht meistens auf folgende Weise.

Das Integral sei von der Form

$$\int f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

und $f(x)$ eine Function, die sich wenigstens für alle zwischen $x = \lambda$ und $x = \mu$ liegenden x, in eine unendliche Reihe verwandeln lässt, etwa

1) $$f(x) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdot;$$

es ist dann

$$2)\qquad \int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int (X_0 + X_1 + X_2 + \cdots)\,\varphi(x)\,dx.$$

Hier fragt sich vor Allem, ob der in §. 54, I. für endliche Reihen bewiesene Satz auch bei unendlichen Reihen anwendbar bleibt; wäre dies der Fall, so würde

$$3)\qquad \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \int X_0\,\varphi(x)\,dx + \int X_1\,\varphi(x)\,dx + \int X_2\,\varphi(x)\,dx + \cdots.$$

sein, und wenn die Integrale rechter Hand entwickelt werden können, so wäre das gesuchte Integral durch eine unendliche Reihe ausgedrückt.

Die Vorfrage, wovon die Anwendbarkeit dieser Integrationsmethode abhängt, lässt sich hier im Allgemeinen noch nicht entscheiden, doch können wir vorläufig den gewöhnlichen Fall, wo die Reihe nach Potenzen von x fortschreitet, vollständig erörtern.

I. Die Reihe für $f(x)$ habe die Form

$$4)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

und es sei bei unendlich wachsenden n

$$Lim\,\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda,$$

woraus folgt, dass die obige Reihe für $-\lambda < x < +\lambda$ convergirt; endlich sei zur Abkürzung

$$5)\qquad \psi(x,\,n) = \int x^n\,\varphi(x)\,dx,$$

wobei dem Integrale keine willkührliche Constante angehangen werden möge. Wenn nun die Reihe $a_0\,\psi(x,\,0) + a_1\,\psi(x,\,1) +$ etc. innerhalb jener Grenzen convergirt, so ist ihre Summe eine bestimmte Function von x etwa

$$6)\qquad F(x) = a_0\,\psi(x,\,0) + a_1\,\psi(x,\,1) + a_2\,\psi(x,\,2) + \cdots,$$

und von dieser wollen wir den Differentialquotienten aufsuchen. Lassen wir x um h wachsen, wobei aber h so klein zu wählen ist, dass auch $x + h$ zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ fällt, so haben wir zunächst

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= a_0\,\frac{\psi(x+h,0) - \psi(x,0)}{h} + a_1\,\frac{\psi(x+h,1) - \psi(x,1)}{h} + \cdots.$$

Rechter Hand benutzen wir das bekannte Theorem

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=\psi'(x+\vartheta h),\quad 0<\vartheta<1,$$

welches voraussetzt, dass $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x=-\lambda$ bis $x=+\lambda$ stetig und endlich bleiben; ferner substituiren wir gemäss Nro. 5) $x^n\varphi(x)$ statt $\psi'(x, n)$ und erhalten

7)
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=a_0\varphi(x+\vartheta_0 h)+a_1(x+\vartheta_1 h)\varphi(x+\vartheta_1 h)+a_2(x+\vartheta_2 h)^2\varphi(x+\vartheta_2 h)+\cdots$$

wo ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 etc. positive echte Brüche bedeuten.

Um vorerst den einfachsten Fall zu erörtern, wollen wir x und alle Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. als positiv voraussetzen. Nun lässt sich h so klein wählen, dass die Function $\varphi(z)$ von $z=x$ bis $z=x+h$ entweder nur wächst oder nur abnimmt; im ersten Falle ist jede der Grössen $\varphi(x+\vartheta_0 h)$, $\varphi(x+\vartheta_1 h)$ etc. grösser als $\varphi(x)$ und kleiner als $\varphi(x+h)$, während im zweiten Falle die Sache umgekehrt wird. Ferner liegt $(x+\vartheta_n h)^n$ immer zwischen x^n und $(x+h)^n$; bei positiven h und wachsenden $\varphi(x)$ ist demnach die Summe der Reihe in Nro. 7) grösser als

$$a_0\varphi(x)+a_1 x\varphi(x)+a_2x^2\varphi(x)+\cdots=f(x)\varphi(x)$$

und kleiner als

$$a_0\varphi(x+h)+a_1(x+h)\varphi(x+h)+\cdots=f(x+h)\varphi(x+h),$$

also

$$f(x)\varphi(x)<\frac{F(x+h)-F(x)}{h}<f(x+h)\varphi(x+h);$$

bei abnehmenden $\varphi(x)$ tritt das Zeichen $>$ an die Stelle von $<$. Aehnlich verhält sich die Sache bei negativen h, aber in jedem Falle erhält man beim Uebergange zur Grenze für verschwindende h

$$F'(x)=f(x)\varphi(x),$$

mithin umgekehrt

$$F(x)=\int f(x)\varphi(x)\,dx+Const.$$

d. i.

$$F(x)=\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\varphi(x)\,dx+Const.$$

Vergleicht man dies mit der ursprünglichen Bedeutung von $F(x)$ in Nro. 6) und substituirt die Werthe von $\psi(x, 0)$, $\psi(x, 1)$ etc., so hat man folgende Gleichung

8)
$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\varphi(x)\,dx+Const.$$

$$= a_0 \int \varphi(x)\,dx + a_1 \int x\,\varphi(x)\,dx + a_2 \int x^2\,\varphi(x)\,dx + \cdots;$$

diese lehrt, dass hier die Integration auf gewöhnliche Weise ausgeführt werden darf. Auch bleiben die vorigen Schlüsse an der Grenze der Convergenz, d. h. für $x = +\lambda$, richtig, wofern die beiden Reihen noch convergiren, nur muss man in diesem Falle h negativ nehmen, um das Intervall der Convergenz nicht zu überschreiten.

Wenn die Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

positive und negative Glieder enthält, so kann man doch x immer als positiv ansehen, indem man die verschiedenen Vorzeichen auf Rechnung der Coefficienten schreibt; ferner lassen sich alle positiven sowie alle negativen Glieder zusammenfassen und es erscheint dann $f(x)$ als Differenz zweier Reihen, deren jede für sich nur positive Glieder enthält. Der anfänglichen Voraussetzung zufolge convergiren diese Reihen und daher sind ihre Summen bestimmte endliche Functionen, etwa $f_1(x)$ und $f_2(x)$, also

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Hieraus folgt

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int f_1(x)\,\varphi(x)\,dx - \int f_2(x)\,\varphi(x)\,dx;$$

auf die einzelnen Integrale rechter Hand ist der vorige Satz anwendbar und man gelangt damit zu dem Resultate, dass die Gleichung 8) auch in dem Falle gilt, wo die Reihe positive und negative Glieder besitzt. Bei Integrationen von der genannten Form sind demnach nur zwei Bedingungen einzuhalten, nämlich die Convergenz der vorkommenden Reihen und andererseits die Endlichkeit und Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $\int x^n\,\varphi(x)\,dx$.

Hiernach ist z. B. bei echt gebrochenen x

$$\int \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,x^{\alpha-1}\,dx$$

$$= \frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3} + \cdots + Const.$$

Beträgt dagegen der absolute Werth von x mehr als die Einheit, so darf diese Entwickelung nicht angewendet werden, vielmehr wird man

$$\int \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int \frac{x^{\alpha-2}}{\frac{1}{x}+1}\,dx$$

und $\frac{1}{x} = y$ oder $x = \frac{1}{y}$ setzen, wo nun y ein echter Bruch ist. Das Integral wird jetzt

$$-\int \frac{y^{-\alpha}}{1+y} dy = -\int (1 - y + y^2 - y^3 + \cdots) y^{-\alpha} dy$$

$$= -\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{y^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{y^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \cdots + Const.$$

oder durch Restitution des Werthes von y

$$\int \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \frac{x^{\alpha-2}}{\alpha-2} + \frac{x^{\alpha-3}}{\alpha-3} - \frac{x^{\alpha-4}}{\alpha-4} + \cdots + Const.,$$

so dass nun der Werth des Integrales für alle Fälle entwickelt ist.

II. Ein anderes Verfahren um über die Gültigkeit der allgemeinen Gleichung 3) zu entscheiden, besteht darin, dass man die Reihe 1) vorerst als endliche nimmt und ihre Ergänzung hinzufügt, nämlich

9) $$f(x) = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + R_n.$$

Dies giebt

10) $$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx - \int R_n\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int X_0\,\varphi(x)\,dx + \int X_1\,\varphi(x)\,dx + \cdots + \int X_{n-1}\,\varphi(x)\,dx,$$

und wenn nun beide Reihen in's Unendliche fortgesetzt werden sollen, so muss erstens $Lim\,R_n = 0$, d. h. die Reihe in Nro. 9) convergent sein und ausserdem

$$Lim \int R_n\,\varphi(x)\,dx = 0$$

werden, was aus $Lim\,R_n = 0$ nicht geschlossen werden kann und daher einer besonderen Untersuchung bedarf. Hierzu gehören aber einige Sätze von den bestimmten Integralen, welche erst später entwickelt werden.

Aus der Bemerkung, dass viele Functionen in unendliche Reihen verwandelbar sind, geht unmittelbar hervor, dass die Methode der Integration durch unendliche Reihen einen hohen Grad allgemeiner Anwendbarkeit besitzt; es sollen daher in den nächsten Capiteln auch nur diejenigen Differentialformeln betrachtet werden, deren Integration ohne jenes Hülfsmittel, d. h. in geschlossener Form, möglich ist.

Cap. XI.

Integration rationaler algebraischer Functionen.

§. 68.

Fixirung der Aufgabe; einfachste Fälle derselben.

Das allgemeine Problem, womit wir uns im vorliegenden Capitel beschäftigen, ist die Entwickelung des Integrales

$$S = \int \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \lambda x^m}{a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n} dx,$$

wobei m und n ganze positive Zahlen bedeuten. Die unter dem Integralzeichen stehende gebrochene rationale algebraische Function kann echt oder unecht gebrochen sein; im letzteren Falle lässt sich dieselbe durch Division in eine ganze Function und in einen echt gebrochenen Rest zerlegen, was durch die Gleichung

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \lambda x^m}{a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n}$$
$$= \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \cdots + \varkappa_1 x^{m-n}$$
$$+ \frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Mx^{n-1}}{a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n}$$

ausgedrückt werden möge. Bezeichnet man den echt gebrochenen Rest mit $\frac{f(x)}{F(x)}$, so ist

$$S = \int \left[\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \cdots + \varkappa_1 x^{m-n} + \frac{f(x)}{F(x)} \right] dx$$

und durch Integration der einzelnen Theile

$$S = \alpha_1 \frac{x}{1} + \beta_1 \frac{x^2}{2} + \gamma_1 \frac{x^3}{3} + \cdots + \varkappa_1 \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} + \int \frac{f(x)}{F(x)} dx.$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass die Integration einer unecht gebrochenen Function auf die Integration einer echt gebrochenen zurückgeführt werden kann; wir haben uns daher nur mit letzterer zu beschäftigen.

Ist der Nenner vom ersten Grade, so wird das letzte Integral zu folgendem

$$\int \frac{A}{a+bx}\,dx = A\int \frac{1}{a+bx}\,dx,$$

dessen Werth sich unmittelbar aus der Grundformel 4) in §. 65 ergiebt.

Ist der Nenner vom zweiten Grade, so hat man es mit dem Integrale

$$\int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}\,dx$$

zu thun; dieses zerfällt in zwei Integrale, nämlich

$$A\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx + B\int \frac{x}{a+bx+cx^2}\,dx,$$

deren Entwickelung auf folgende Weise geschieht.

I. Es ist identisch

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{c\,dx}{ac+bcx+c^2x^2}$$

$$= \int \frac{c\,dx}{(ac-\frac{1}{4}b^2)+(cx+\frac{1}{2}b)^2},$$

und wenn man eine neue Variabele y mittelst der Substitution

$$cx+\tfrac{1}{2}b = y\,,\quad c\,dx = dy$$

einführt, so wird aus der vorigen Gleichung

$$3)\qquad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dy}{(ac-\frac{1}{4}b^2)+y^2}.$$

Hier sind die Fälle zu unterscheiden, ob $ac - \frac{1}{4}b^2$ positiv, Null oder negativ ist; denn der Werth des Integrales erhält nach den Grundformeln 6) und 7) verschiedene Gestalten, je nachdem im Nenner die Summe oder die Differenz zweier Quadrate vorkommt.

Im ersten Falle

$$ac - \tfrac{1}{4}b^2 > 0 \quad \text{oder} \quad 4ac - b^2 > 0$$

ist $\sqrt{ac - \frac{1}{4}b^2}$ eine reelle Grösse, die wir mit α bezeichnen wollen; die Gleichung 3) giebt dann unter Anwendung der Fundamentalformel 6)

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dy}{\alpha^2+y^2} = \frac{1}{\alpha}\,\arctan\frac{y}{\alpha} + Const.$$

Nach Restitution der Werthe von y und α hat man

$$4)\quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} + Const.$$

$$4ac - b^2 > 0.$$

Im zweiten Falle ($ac - \frac{1}{4}b^2 = 0$) wird die Gleichung 3) zur folgenden

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + Const.$$

d. i. vermöge des Werthes von y

$$5)\quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{2}{b+2cx} + Const.$$

$$4ac - b^2 = 0.$$

Im dritten Falle ($ac - \frac{1}{4}b^2 < 0$) ist $\frac{1}{4}b^2 - ac$ positiv, mithin $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - ac}$ eine reelle Grösse, die α heissen möge; die Gleichung 3) lautet jetzt

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dy}{-\alpha^2+y^2} = \int \frac{(-1)\,dy}{\alpha^2-y^2}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\, l\left(\frac{\alpha+y}{\alpha-y}\right) + Const.,$$

und daraus ergiebt sich nach Substitution der Werthe von y und α

$$6)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\, l\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}-b-2cx}\right) + Const.$$

$$4ac - b^2 < 0.$$

Eine etwas andere Form erhält dieses Integral, wenn man von der identischen Gleichung

$l\left(\frac{p}{q}\right) = l\left(\frac{p\cdot -1}{-q}\right) = l\left(\frac{p}{-q}\cdot -1\right)$ =

$$l\left(\frac{p}{q}\right) = l\left(\frac{p}{-q}\right) + l(-1)$$

Gebrauch macht und die constante Grösse $l(-1)$ in die willkührliche Integrationsconstante einrechnet; es ist dann

$$7)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\, l\left(\frac{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}\right) + Const.$$

und man wird nun die Formel 6) oder die Formel 7) benutzen, je nachdem im speciellen Falle $\sqrt{b^2-4ac}$ mehr oder weniger als $b+2cx$ beträgt.

II. Um das zweite der in Nro. 2) verzeichneten Integrale zu entwickeln, gehen wir von der Differentialformel aus

$$dl(a+bx+cx^2) = \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\,dx.$$

Die Umkehrung derselben giebt

$$\int \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\,dx = l(a+bx+cx^2)$$

oder durch Integration der einzelnen Theile

$$b\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} + 2c\int \frac{x\,dx}{a+bx+cx^2} = l(a+bx+cx^2),$$

und wenn man das zweite Integral als Unbekannte ansieht, so erhält man

$$8)\int \frac{x\,dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c}\,l(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}.$$

Das gesuchte Integral ist hiermit auf ein schon bekanntes Integral zurückgeführt.

III. Setzt man in der Gleichung

$$\int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}\,dx = A\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} + B\int \frac{x\,dx}{a+bx+cx^2}$$

statt des zweiten Integrales rechter Hand seinen Werth aus Nro. 8), so erhält man

$$9) \qquad \int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}\,dx$$

$$= \frac{B}{2c}\,l(a+bx+cx^2) + \frac{2Ac-Bb}{2c}\int \frac{dx}{a+bx+cx^2},$$

und damit erledigt sich die Integration der echt gebrochenen algebraischen Functionen mit quadratischem Nenner.

§. 69.

Folgerungen aus dem Vorigen.

Bevor wir die Integration solcher echt gebrochenen Functionen vornehmen, deren Nenner den zweiten Grad übersteigen, wollen wir erst nachweisen, dass Integrale von der Form

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}}$$

auf die obigen Integrale zurückgeführt werden können, wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

Bezeichnen wir das Trinom $a + bx + cx^2$ kurz mit T, so ist durch gewöhnliche Differentiation

$$d\left(\frac{b+2cx}{T^n}\right) = -n\frac{(b+2cx)^2}{T^{n+1}}dx + 2c\frac{dx}{T^n};$$

unter Anwendung der identischen Gleichung

$$(b+2cx)^2 = 4cT - (4ac-b^2)$$

und durch Vereinigung der gleichartigen Grössen wird hieraus

$$d\left(\frac{b+2cx}{T^n}\right) = (4ac-b^2)\,n\frac{dx}{T^{n+1}} - 2c(2n-1)\frac{dx}{T^n}.$$

Die Integration giebt

$$\frac{b+2cx}{T^n} = (4ac-b^2)\,n\int\frac{dx}{T^{n+1}} - 2c(n-1)\int\frac{dx}{T^n};$$

reducirt man auf das erste Integral rechter Hand und setzt zur Abkürzung

1) $$4ac - b^2 = \lambda,$$

so gelangt man zu folgender Beziehung

2) $$\int\frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda}\int\frac{dx}{T^n}.$$

Diese Reductionsformel liefert der Reihe nach die Werthe von

$$\int\frac{dx}{T^2},\ \int\frac{dx}{T^3},\ \int\frac{dx}{T^4},\ \dots$$

indem man successive $n = 1, 2, 3, \dots$ nimmt und jeden gewonnenen Werth in die nächste Gleichung einsetzt. Man hat demnach

$$\text{für } n = 1,\quad \int\frac{dx}{T^2} = \frac{b+2cx}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda}\int\frac{dx}{T},$$

wo das Integral rechter Hand aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen bekannt ist; ferner

$$\text{für } n = 2,\quad \int\frac{dx}{T^3} = \frac{b+2cx}{2\lambda T^2} + \frac{3c}{\lambda}\int\frac{dx}{T^2}$$

$$= \frac{b+2cx}{2\lambda T^2} + \frac{3c(b+2cx)}{\lambda^2 T} + \frac{6c^2}{\lambda^2}\int\frac{dx}{T}$$

u. s. w.

Ueberhaupt können nach diesem Verfahren alle Integrale von der Form

$$\int\frac{dx}{T^{n+1}}$$

auf das in §. 68, I. betrachtete Integral zurückgeführt, mithin auch vollständig entwickelt werden.

Weiter ist nun, wie man durch Differentiation findet,

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{T^n}\right) = (m-1)\frac{x^{m-2}}{T^n}\,dx - n\,\frac{x^{m-1}(b+2cx)}{T^{n+1}}\,dx,$$

oder, wenn man rechter Hand Alles auf gleichen Nenner bringt und das Gleichartige vereinigt,

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{T^n}\right) = (m-1)\,a\,\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}} - (n-m+1)\,b\,\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}$$
$$- (2n-m+1)\,c\,\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}}\,.$$

Umgekehrt ist die entsprechende Integralgleichung

$$\frac{x^{m-1}}{T^n} = (m-1)\,a\int\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}} - (n-m+1)\,b\int\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}$$
$$- (2n-m+1)\,c\int\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}}\,,$$

oder

$$3)\quad \int\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n-m+1)\,c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^n}$$
$$-\frac{(n-m+1)\,b}{(2n-m+1)\,c}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}} + \frac{(m-1)\,a}{(2n-m+1)\,c}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}}\,.$$

Geht man von dem Werthe $m = 1$ aus und sieht das Integral von $dx : T^{n+1}$ als bekannt an, so kann man der Reihe nach die Integrale

$$\int\frac{x\,dx}{T^{n+1}}\,,\quad \int\frac{x^2\,dx}{T^{n+1}}\,,\quad \int\frac{x^3\,dx}{T^{n+1}}\,,\ \ldots$$

entwickeln, nämlich

$$m = 1,\qquad \int\frac{x\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{1}{2nc\,T^n} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{T^{n+1}}\,,$$

$$m = 2,\qquad \int\frac{x^2\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{x}{(2n-1)c\,T^n} - \frac{(n-1)\,b}{(2n-1)c}\int\frac{x\,dx}{T^{n+1}}$$
$$+ \frac{a}{(2n-1)c}\int\frac{dx}{T^{n+1}}\,,$$

wo rechter Hand noch der Werth des ersten Integrales aus der vorigen Gleichung zu nehmen ist u. s. w. — Durch successive Anwendung der Formeln 2) und 3) kann nun auch der Werth jedes Integrales von der Form

$$\int\frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Hx^h}{(a + bx + cx^2)^{n+1}}\,dx$$

vollständig ermittelt werden.

Es ist nicht überflüssig, zu bemerken, dass die Gleichung 3) für negative m gleichfalls gelten muss, weil sie die Umkehrung einer für alle möglichen m und n richtig bleibenden Differentialformel darstellt. Lassen wir nun $-m+2$ an die Stelle von m treten, so nimmt die Gleichung 3) folgende Form an:

$$\int \frac{dx}{x^{m-2}\,T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n+m-1)c}\,\frac{1}{x^{m-1}\,T^{n}}$$

$$-\frac{(n+m-1)\,b}{(2n+m-1)\,c}\int\frac{dx}{x^{m-1}\,T^{n+1}} - \frac{(m-1)\,a}{(2n+m-1)\,c}\int\frac{dx}{x^{m}\,T^{n+1}}$$

und wenn man das letzte Integral rechterseits als Unbekannte betrachtet, so hat man

$$4)\qquad \int\frac{dx}{x^{m}\,T^{n+1}} = -\frac{1}{(m-1)a\,x^{m-1}\,T^{n}}$$

$$-\frac{(n+m-1)b}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\,T^{n+1}} - \frac{(2n+m-1)c}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\,T^{n+1}}.$$

Für $m=1$ ist diese Formel nicht brauchbar; man kann in diesem Falle die Substitution $x=\frac{1}{z}$ anwenden und erhält dadurch direct

$$\int\frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^{n+1}} = -\int\frac{z^{2n+1}\,dz}{(c+bz+az^2)^{n+1}},$$

wo man rechter Hand die Integration mittelst der Formeln 2) und 3) auszuführen und nachher rückwärts $z=\frac{1}{x}$ zu setzen hat. Nimmt mann hierauf in Nro. 4) $m=2, 3, \ldots$, so kann man die Integrale

$$\int\frac{dx}{x^2\,T^{n+1}},\ \int\frac{dx}{x^3\,T^{n+1}},\ \ldots$$

der Reihe nach entwickeln und überhaupt den Werth jedes unter der Form

$$\int\left\{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\cdots+\frac{H}{x^h}\right\}\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}}$$

stehenden Integrales ermitteln.

§. 70.

Die Integration echt gebrochener Functionen.

Wenn es sich um die Ausführung der Integration

$$\int \frac{M_0 x^m + M_1 x^{m-1} + \cdots + M_{m-1} x + M_m}{N_0 x^n + N_1 x^{n-1} + \cdots + N_{n-1} x + N_n} dx$$

handelt, worin m und $n > m$ ganze positive Zahlen bedeuten, so ist es von Vortheil, zunächst x^n von seinem Coefficienten zu befreien, was einfach dadurch geschieht, dass man Zähler und Nenner mit N_0 dividirt; der neue Nenner heisse dann $F(x)$, der Zähler $f(x)$. Wir unterscheiden hier wieder dieselben Fälle wie in §. 62.

I. Ist der Nenner von der Form

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots . (x-k),$$

wobei $a, b, c, \ldots k$ als verschieden von einander vorausgesetzt werden, so hat man

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$$
$$= \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k} \right) dx.$$

Bei reellen $a, b, c, \ldots k$ lässt sich die Integration sofort ausführen und giebt

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$$
$$= A\, l(x-a) + B\, l(x-b) + C\, l(x-c) + \cdots + K l(x-k) + Const.$$

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} dx$$
$$= l(x+1) - \tfrac{1}{5} l(x-2) + \tfrac{1}{5} l(x+3) + Const.$$

Sind einige der Grössen $a, b, c, \ldots k$ von complexer Form, etwa $a = p + iq$, $b = p - iq$, so giebt die Formel 8) in §. 62

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$$
$$= \int \frac{Px + Q}{(x-p)^2 + q^2} dx + C l(x-c) + \cdots + K l(x-k);$$

das noch übrige Integral rechter Hand gehört unter diejenigen, womit wir uns in §. 68, III. beschäftigt haben, und kann daher entwickelt werden. So ist z. B.

$$\int \frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}\,dx = \int \frac{2+x}{5-4x+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2} l(5-4x+x^2) + 4\, arctan(x-2) - l(1+x) + Const.$$

II. Es sei ferner $F(x)$ von der Form

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa,$$

mithin

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{K}{(x-k)^\varkappa} + \frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}} + \cdots + \frac{K_{\varkappa-1}}{x-k}$$

Unter der Voraussetzung, dass $a, b, c, \ldots k$ reell sind, hat man sogleich

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$$
$$= -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \frac{A_1}{(\alpha-2)(x-a)^{\alpha-2}} - \cdots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1}\, l(x-a)$$
$$-\frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \frac{B_1}{(\beta-2)(x-b)^{\beta-2}} - \cdots - \frac{B_{\beta-2}}{x-b} + B_{\beta-1}\, l(x-b)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{K}{(\varkappa-1)(x-k)^{\varkappa-1}} - \frac{K_1}{(\varkappa-2)(x-k)^{\varkappa-2}} - \cdots - \frac{K_{\varkappa-2}}{x-k} + K_{\varkappa-1}\, l(x-k).$$

So ist z. B.

$$\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2(x+1)}$$
$$= \int \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}\right] dx$$
$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2lx - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\, l(x-1) - \frac{1}{4}\, l(x+1) + Const.$$

Wenn endlich unter den Grössen $a, b, c, \ldots k$ complexe Zahlen vorkommen, so entstehen Partialbrüche von der Form

$$\frac{\psi(x)}{[(x-p)^2+q^2]^s},$$

wo s eine ganze positive Zahl ist; auch diese sind nach §. 69 immer integrabel. So hat man z. B.

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx$$

$$= \int \left[-\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\,l(x^2+1) - \frac{1}{2}\,arctan\,x + \frac{1}{2}\,l(x-1) + Const.$$

Ein paar allgemeinere Beispiele für diese Integrationsmethoden sind folgende.

III. Nach §. 62 (S. 291) gilt unter Voraussetzung eines geraden n die Zerlegung

1) $$\frac{x^{m-1}}{x^n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^m}{n}\frac{1}{x+1}$$
$$+ \frac{2}{n}\sum \frac{(x - cos\,h\vartheta)\,cos\,hm\vartheta - sin\,h\vartheta\,sin\,hm\vartheta}{x^2 - 2x\,cos\,h\vartheta + 1},$$
$$h = 2, 4, 6, \ldots n-2;$$

dagegen ist für ungerade n:

2) $$\frac{x^{m-1}}{x^n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x-1}$$
$$+ \frac{2}{n}\sum \frac{(x - cos\,h\vartheta)\,cos\,hm\vartheta - sin\,h\vartheta\,sin\,hm\vartheta}{x^2 - 2x\,cos\,h\vartheta + 1};$$

multiplicirt man diese Gleichungen mit dx und integrirt nach der leicht zu prüfenden Formel

$$\int \frac{(x - cos\,h\vartheta)\,cos\,hm\vartheta - sin\,h\vartheta\,sin\,hm\vartheta}{x^2 - 2x\,cos\,h\vartheta + 1}\,dx$$
$$= cos\,hm\vartheta \cdot \tfrac{1}{2}\,l(x^2 - 2x\,cos\,h\vartheta + 1) - sin\,hm\vartheta \,.\, arctan\,\frac{x - cos\,h\vartheta}{sin\,h\vartheta},$$

so gelangt man zu folgenden Resultaten:

a. für gerade n und $\vartheta = \dfrac{\pi}{n}$:

3) $$\int \frac{x^{m-1}}{x^n-1}\,dx = \frac{1}{n}\,l(x-1) + \frac{(-1)^m}{n}\,l(x+1)$$
$$+ \frac{1}{n}\sum \left[cos\,hm\vartheta \,.\, l(x^2 - 2x\,cos\,h\vartheta + 1) \right]$$
$$- \frac{2}{n}\sum \left[sin\,hm\vartheta \,.\, arctan\,\frac{x - cos\,h\vartheta}{sin\,h\vartheta} \right] + C,$$
$$h = 2, 4, 6, \ldots n-2;$$

b. für ungerade n:

$$4)\qquad \int \frac{x^{m-1}}{x^n-1}\,dx = \frac{1}{n}\,l(x-1) + \frac{1}{n}\sum\Big[\cos h m\vartheta \,.\, l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\Big] - \frac{2}{n}\sum\Big[\sin h m\vartheta \,.\, \arctan\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\Big] + C,$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n-1.$$

IV. Nach §. 62 (S. 292) ist für gerade n:

$$5)\qquad \frac{x^{m-1}}{x^n+1} = \frac{2}{n}\sum\frac{-(x-\cos h\vartheta)\cos h m\vartheta + \sin h\vartheta\,\sin h m\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1},$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots n-1,$$

dagegen für ungerade n:

$$6)\qquad \frac{x^{m-1}}{x^n+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n}\,\frac{1}{x+1} + \frac{2}{n}\sum\frac{-(x-\cos h\vartheta)\cos h m\vartheta + \sin h\vartheta\,\sin h m\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1},$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots n-2;$$

multiplicirt man diese Gleichungen mit dx und integrirt wie vorhin, so erhält man

a. für gerade n und $\vartheta = \frac{\pi}{n}$:

$$7)\qquad \int \frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx = -\frac{1}{n}\sum\Big[\cos h m\vartheta \,.\, l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\Big] + \frac{2}{n}\sum\Big[\sin h m\vartheta \,.\, \arctan\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\Big] + C,$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots n-1;$$

b. für ungerade n:

$$8)\qquad \int \frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{n}\,l(x+1) - \frac{1}{n}\sum\Big[\cos h m\vartheta \,.\, l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)\Big] + \frac{2}{n}\sum\Big[\sin h m\vartheta \,.\, \arctan\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\Big] + C,$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots n-2.$$

V. Auf die soeben entwickelten Integrale lässt sich das etwas allgemeinere Integral

$$\int \frac{z^{m-1}}{az^n \pm b} dz$$

leicht zurückführen. Unter der Voraussetzung, dass a und b an sich positiv sind, substituirt man nämlich

$$z = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} x, \qquad x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} z$$

und erhält

$$\int \frac{z^{m-1}}{az^n \pm b} dz = \frac{1}{b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \int \frac{x^{m-1}}{x^n \pm 1} dx,$$

wo nun die rechte Seite wie vorhin entwickelbar ist.

Endlich können wir noch bemerken, dass auch jede Integration von der Form

$$\int \frac{A + Bz + Cz^2 + \cdots + Kz^k}{az^n \pm b} dz$$

völlig ausgeführt werden kann, indem man auf die einzelnen Bestandtheile derselben die eben erwähnte Substitution anwendet.

Cap. XII.

Integration irrationaler Functionen.

§. 71.

Einfachste Fälle.

Unter den Fundamentalformeln des §. 65 befinden sich nur wenige, die zur Integration irrationaler Functionen dienen können; bei genauerer Ansicht bemerkt man noch, dass darin nur Quadratwurzeln aus ganzen Functionen ersten oder zweiten Grades vorkommen. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit Verallgemeinerungen jener Integrale.

I. Das einfachste von den Integralen irrationaler Functionen ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + Const.;$$

ein allgemeineres erhält man aus der Formel

$$\int (a+bx)^\mu\, dx = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b} + Const.$$

für $\mu = k - \frac{1}{2}$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten möge; es wird nämlich

$$1) \qquad \int \frac{(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2(a+bx)^k\sqrt{a+bx}}{(2k+1)b} + Const.$$

Man hat ferner durch theilweise Integration

$$\int \frac{x^m (a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}} dx = x^m \int \frac{(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}} dx - m \int x^{m-1} dx \int \frac{(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}} dx$$

$$= \frac{2x^m (a+bx)^k \sqrt{a+bx}}{(2k+1)b} - \frac{2m}{(2k+1)b} \int x^{m-1}(a+bx)^k \sqrt{a+bx}\, dx$$

oder, wenn in dem Integrale rechter Hand

$$\sqrt{a+bx} = \frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}$$

gesetzt, jeder einzelne Theil integrirt und die Gleichung mit $(2k+1)b$ multiplicirt wird,

$$(2k+1)b\int\frac{x^m(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx$$

$$= 2x^m(a+bx)^k\sqrt{a+bx} - 2ma\int\frac{x^{m-1}(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx$$

$$- 2mb\int\frac{x^m(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx.$$

Schafft man das letzte Integral rechter Hand auf die linke Seite, so erhält man

$$2)\qquad \int\frac{x^m(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx$$

$$= \frac{2x^m(a+bx)^k\sqrt{a+bx}}{(2m+2k+1)b} - \frac{2ma}{(2m+2k+1)b}\int\frac{x^{m-1}(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx;$$

für $m = 1, 2, 3$ etc. ergeben sich hieraus der Reihe nach die Integrale

$$\int\frac{x(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx,\qquad \int\frac{x^2(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx \text{ u. s. w.},$$

daher lässt sich auch das Integral

$$\int\frac{f(x)\,(a+bx)^k}{\sqrt{a+bx}}dx$$

jederzeit entwickeln, wenn $f(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x, und k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

II. Um ferner den Werth des Integrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zu bestimmen, gehen wir einen ähnlichen Weg wie in §. 68, I., doch müssen wir dabei die Fälle eines positiven und eines negativen c unterscheiden.

Der absolute Werth von c heisse γ, so ist im ersten Falle $c = +\gamma$ und

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+\gamma x^2}}=\int\frac{\sqrt{\gamma}\,dx}{\sqrt{a\gamma+b\gamma x+\gamma^2x^2}}$$
$$=\sqrt{\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{(a\gamma-\frac{1}{4}b^2)+(\frac{1}{2}b+\gamma x)^2}}.$$

Zur Abkürzung sei $a\gamma-\frac{1}{4}b^2=k$ und gleichzeitig werde eine neue Variabele y mittelst der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}b+\gamma x=y,\quad x=\frac{y-\frac{1}{2}b}{\gamma},\quad dx=\frac{1}{\gamma}dy$$

eingeführt; es ist dann

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dy}{\sqrt{k+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l(y+\sqrt{k+y^2})+C$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l[\tfrac{1}{2}b+\gamma x+\sqrt{\gamma(a+bx+\gamma x^2)}]+C.$$

Den in der Parenthese stehenden Ausdruck bringen wir auf den gemeinschaftlichen Nenner 2 und setzen

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l2+C=Const.;$$

vermöge der Bedeutung von γ haben wir dann folgende Integralformel

$$3)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,l(b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+Const.$$
$$c>0.$$

Im zweiten Falle $c=-\gamma$ rechnen wir ähnlich:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-\gamma x^2}}=\int\frac{\sqrt{\gamma}\,dx}{\sqrt{a\gamma+b\gamma x-\gamma^2x^2}}$$
$$=\sqrt{\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2+a\gamma)-(\gamma x-\frac{1}{2}b)^2}}$$

und setzen $\frac{1}{4}b^2+a\gamma=\alpha^2$,

$$\gamma x-\tfrac{1}{2}b=y,\quad x=\frac{y+\frac{1}{2}b}{\gamma},\quad dx=\frac{1}{\gamma}dy;$$

dies giebt unter Anwendung einer bekannten Fundamentalformel

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,arcsin\,\frac{y}{\alpha}+Const.$$

Nach Substitution der Werthe von $\gamma=-c$, α und y folgt nun

$$4)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-b-2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} + Const.$$
$$c < 0.$$

Der dritte Fall $c = 0$ bedarf keiner Behandlung, weil er auf das zu Anfang von Nro. I. betrachtete Integral zurückführen würde.

III. Die soeben gewonnenen Resultate können wiederum als Ausgangspunkte für fernere Entwickelungen dienen, wenn man die in §. 69 unter 2), 3) und 4) entwickelten Reductionsformeln damit in Verbindung bringt und berücksichtigt, dass die citirten Formeln die Umkehrungen zweier Differentialgleichungen sind, die für beliebige m und n gelten. Setzen wir nämlich in der Formel

$$5)\quad \int \frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda}\int \frac{dx}{T^n}$$
$$[T = a + bx + cx^2,\quad \lambda = 4ac - b^2]$$

der Reihe nach $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc., so gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$\int \frac{dx}{T\sqrt{T}} = 2\frac{b+2cx}{\lambda\sqrt{T}},$$
$$\int \frac{dx}{T^2\sqrt{T}} = \frac{2}{3}\frac{b+2cx}{\lambda T\sqrt{T}} + \frac{8}{3\lambda}\int \frac{dx}{T\sqrt{T}}$$

u. s. w.,

aus denen hervorgeht, dass sich jedes Integral von der Form

$$\int \frac{dx}{T^k\sqrt{T}},$$

worin k eine positive ganze Zahl bezeichnet, vollständig entwickeln lässt und für $k > 0$ eine algebraische Function von x ist.

Kehrt man die Gleichung 5) um, drückt also das Integral rechter Hand durch das Integral linker Hand aus, so hat man weiter

$$6)\quad \int \frac{dx}{T^n} = -\frac{b+2cx}{(2n-1)2cT^n} + \frac{n\lambda}{(2n-1)2c}\int \frac{dx}{T^{n+1}};$$

für $n = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ etc. entspringen hieraus die Gleichungen

$$\int dx\sqrt{T} = \frac{b+2cx}{4c}\sqrt{T} + \frac{\lambda}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{T}},$$
$$\int dx\,T\sqrt{T} = \frac{b+2cx}{8c}\,T\sqrt{T} + \frac{3\lambda}{16c}\int dx\sqrt{T}$$

u. s. w.,

durch deren wiederholte Anwendung sich jedes Integral von der Form

$$\int dx\, T^k \sqrt{T}$$

für ein ganzes positives k entwickeln lässt. — Ueberhaupt ist nach diesen Betrachtungen der Werth des Integrales

$$\int T^p\, dx = \int (a + bx + cx^2)^p\, dx$$

als bekannt anzusehen, wenn p unter die Form $\pm (k + \frac{1}{2})$ gehört.

Mittelst der Formeln 3) und 4) in §. 69 folgt hieraus unmittelbar, dass für jedes ganze positive m auch die Integrale

$$\int x^m\, T^p\, dx \text{ und } \int \frac{1}{x^m} T^p\, dx$$

entwickelt werden können, indem man $n + 1 = \pm (k + \frac{1}{2})$ setzt und im Uebrigen ganz so wie dort verfährt. So erhält man z. B. für $n = -\frac{1}{2}$:

$$7)\qquad \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{T}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{T}}{mc} - \frac{(2m-1)b}{2mc} \int \frac{x^{m-1}\, dx}{\sqrt{T}} - \frac{(m-1)a}{mc} \int \frac{x^{m-2}\, dx}{\sqrt{T}},$$

woraus die Werthe der Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{T}}, \ldots$$

der Reihe nach leicht hergeleitet werden können.

§. 72.

Integration durch Wegschaffung des Wurzelzeichens.

Ein sehr brauchbares Verfahren zur Integration irrationaler Ausdrücke besteht in der Substitution einer neuen Variabeln von der Art, dass die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse zu einer vollständigen Potenz wird, aus welcher die Wurzel gezogen werden kann; das Integral erhält dadurch von selbst eine rationale Form und unterliegt dann den Methoden des vorigen Capitels. Die Fälle, bei denen das genannte Verfahren gute Dienste leistet, sind folgende.

I. Um ein Radical von der Form $\sqrt{\alpha + \beta x}$ wegzuschaffen, setzt man einfach

1) $\sqrt{\alpha + \beta x} = y$, mithin $x = \frac{y^2 - \alpha}{\beta}$, $dx = \frac{2y}{\beta} dy$;

da die Werthe von x und dx rational sind, so leistet die Substitution das Verlangte.

Hiernach ist z. B.

$$\int \frac{dx}{a + b\sqrt{\alpha + \beta x}} = \frac{2}{\beta} \int \frac{y\,dy}{a + by} = \frac{2}{b\beta} \int \left(1 - \frac{a}{a + by}\right) dy$$

$$= \frac{2}{b\beta} \left[y - \frac{a}{b} l(a + by)\right].$$

$$= \frac{2}{b\beta} \left[\sqrt{\alpha + \beta x} - \frac{a}{b} l(a + b\sqrt{\alpha + \beta x})\right].$$

Als zweites Beispiel diene die Entwickelung

$$\int \frac{dx}{(a + bx)\sqrt{\alpha + \beta x}}$$

$$= \frac{2}{\beta} \int \frac{y\,dy}{\left(a + b\frac{y^2 - \alpha}{\beta}\right) y} = 2 \int \frac{dy}{(a\beta - b\alpha) + by^2}.$$

Hier ist zu unterscheiden, ob $a\beta - b\alpha$ und b gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen; in jedem Falle kann aber die Integration leicht ausgeführt werden.

Das erwähnte Verfahren bleibt auch dann anwendbar, wenn ein Radical von der Form $\sqrt[n]{\alpha + \beta x}$ wegzuschaffen ist; man setzt nämlich

$$\sqrt[n]{\alpha + \beta x} = y, \text{ mithin } x = \frac{y^n - \alpha}{\beta}, \quad dx = \frac{ny^{n-1}}{\beta} dy$$

und hat eine ganz ähnliche Rechnung.

II. Wenn ein Radical von der Form $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$ vorkommt, so ist die vorige Substitution ohne Nutzen; die Gleichung $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = y$ giebt nämlich

$$x = \frac{\sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\beta}, \quad dx = \frac{y\,dy}{\beta\sqrt{y^2 - \alpha^2}},$$

woraus zu ersehen ist, dass man zwar die eine Wurzel los wird, statt deren aber durch x und dx zwei neue Radicale hereinbringt. Man setzt in diesem Falle

2) $$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} - \beta x}{\alpha} = y;$$

hieraus folgt

$$3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{1-y^2}{2y}, \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2 x^2} = \alpha \dfrac{1+y^2}{2y}, \\ dx = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{1+y^2}{2y^2} dy, \end{cases}$$

und diese Ausdrücke sind sämmtlich rational.

Mittelst des angegebenen Verfahrens erhält man z. B.

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2+\beta^2 x^2}} = -2\int \frac{dy}{b\alpha + 2a\beta y - b\alpha y^2};$$

nach Formel 7) in §. 68 ist die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}\, l\left(\frac{a\beta - b\alpha y + \sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}{a\beta - b\alpha y - \sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}\right) + Const.,$$

und wenn man hier den Werth von y aus Nro. 2) einsetzt, so gelangt man zu der Formel

$$4)\quad \int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}\, l\left(\frac{a\beta + b\beta x - b\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2} + \sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}{a\beta + b\beta x - b\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2} - \sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}}\right) + C.$$

III. Um ein Radical von der Form $\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}$ wegzuschaffen, benutzt man die Substitution

$$5)\quad \sqrt{\frac{\alpha-\beta x}{\alpha+\beta x}} = y,$$

welche giebt

$$6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2} = \dfrac{2\alpha y}{1+y^2}, \\ dx = -\dfrac{4\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{y\,dy}{(1+y^2)^2}; \end{cases}$$

die letzten drei Ausdrücke sind rational und bringen daher keine neue Wurzel in das Integral.

Nach diesem Verfahren erhält man z. B.

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}} = -2\int \frac{dy}{a\beta + b\alpha + (a\beta - b\alpha)y^2};$$

hier sind rechter Hand die Fälle zu unterscheiden, ob $a\beta - b\alpha$ positiv, Null oder negativ ist, und zwar entsprechen den genannten Fällen die folgenden Werthe

$$-\frac{2}{\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}}\, arctan\left(\frac{\sqrt{a\beta-b\alpha}}{\sqrt{a\beta+b\alpha}}y\right)+Const.,$$

$$-\frac{2y}{a\beta+b\alpha}+Const.,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{b^2\alpha^2-a^2\beta^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b\alpha+a\beta}+\sqrt{b\alpha-a\beta}\,.\,y}{\sqrt{b\alpha+a\beta}-\sqrt{b\alpha-a\beta}\,.\,y}\right)+Const.$$

Nach Wiedereinsetzung des Werthes von y gelangt man zu folgenden drei Integralformeln

7) für $a\beta-b\alpha>0$, $\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

$$=-\frac{2}{\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}}\, arctan\sqrt{\frac{(a\beta-b\alpha)(\alpha-\beta x)}{(a\beta+b\alpha)(\alpha+\beta x)}}+Const.;$$

8) für $a\beta-b\alpha=0$, $\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

$$=-\frac{2}{a\beta+b\alpha}\sqrt{\frac{\alpha-\beta x}{\alpha+\beta x}}+Const.;$$

9) für $a\beta-b\alpha<0$, $\int\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b^2\alpha^2-a^2\beta^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{(b\alpha+a\beta)(\alpha+\beta x)}+\sqrt{(b\alpha-a\beta)(\alpha-\beta x)}}{\sqrt{(b\alpha+a\beta)(\alpha+\beta x)}-\sqrt{(b\alpha-a\beta)(\alpha-\beta x)}}\right)+C.$$

Als zweites Beispiel diene folgende Entwickelung. Nach Nro. 6) erhält man

$$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}=-2\int\frac{(1+y^2)\,dy}{[1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2]^2}$$

$$=-\frac{2}{1-\varepsilon}\int\left\{\frac{1}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2}-\frac{2\varepsilon}{[1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2]^2}\right\}dy,$$

und wenn man auf das zweite Integral rechter Hand die Reductionsformel

$$\int\frac{dy}{(a+cy^2)^2}=\frac{y}{2a(a+cy^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dy}{a+cy^2}$$

anwendet, so findet man für die rechte Seite der vorigen Gleichung:

$$\frac{2}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{\varepsilon y}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2}-\int\frac{dy}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)y^2}\right\}.$$

Die noch übrige Integration ist leicht ausführbar, wobei die Fälle $\varepsilon<1$, $\varepsilon=1$ und $\varepsilon>1$ zu unterscheiden sind; durch Restitution des Werthes von y erhält man schliesslich

10) für $\varepsilon < 1$, $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left\{ \frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} - \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)(1-x)}{(1+\varepsilon)(1+x)}} \right\} + C;$$

11) für $\varepsilon = 1$,

$$\int \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3} \frac{2+x}{1+x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$$

12) für $\varepsilon > 1$, $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left\{ -\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} l \left(\frac{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+x)} + \sqrt{(1-\varepsilon)(1-x)}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(1+x)} - \sqrt{(1-\varepsilon)(1-x)}} \right) \right\} + C.$$

IV. Durch ähnliche Substitutionen, wie sie in den beiden vorigen Abschnitten benutzt wurden, lässt sich auch eine Wurzel von der Form $\sqrt{\alpha + \beta x \pm \gamma x^2}$ wegschaffen, wobei γ an und für sich immer als positiv betrachtet wird.

Im Fall das obere Zeichen gilt, sei zur Abkürzung

13) $$\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} = \lambda;$$

man benutzt dann die Substitution

14) $$\frac{2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} - (\beta + 2\gamma x)}{\lambda} = y$$

und erhält

15) $$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda(1-y^2) - 2\beta y}{4\gamma y}, \\ \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \dfrac{\lambda}{4\sqrt{\gamma}} \dfrac{1+y^2}{y}, \\ dx = -\dfrac{\lambda}{4\gamma} \dfrac{1+y^2}{y^2} dy. \end{cases}$$

Wenn dagegen das untere Zeichen gilt, so setze man zur Abkürzung

16) $$\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2} = \mu$$

und mache Gebrauch von der Substitution

17) $$\sqrt{\frac{\mu + \beta - 2\gamma x}{\mu - \beta + 2\gamma x}} = y,$$

aus welcher sich folgende Werthe ergeben:

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\mu+\beta-(\mu-\beta)y^2}{2\gamma(1+y^2)}, \\ \sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2} &= \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}}\frac{y}{1+y^2}, \\ dx &= -\frac{2\mu}{\gamma}\frac{y\,dy}{(1+y^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

Nach diesen Formeln hat man z. B.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\int\frac{dy}{1+y^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\,arctan\,y = -\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\,arctan\sqrt{\frac{1-\frac{2\gamma x-\beta}{\mu}}{1+\frac{2\gamma x-\beta}{\mu}}}.$$

Hier lässt sich *arctan.* in *arccos.* oder *arcsin.* umsetzen, wenn man bemerkt, dass aus der Gleichung $\cos u = z$ folgt:

$$\tan\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}},\quad \tfrac{1}{2}u = arctan\sqrt{\frac{1-z}{1+z}},$$

$$2\,arctan\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = arccos\,z = \frac{\pi}{2} - arcsin\,z;$$

es wird nämlich

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,arcsin\frac{2\gamma x-\beta}{\mu} + Const.,$$

was mit Formel 4) in §. 71 übereinstimmt.

§. 73.

Integration binomischer Differentiale.

Unter dem Namen der binomischen Differentiale versteht man Ausdrücke von der Form

$$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx,$$

worin m, n, p und q ganze positive Zahlen bezeichnen. Die Integration solcher Differentiale kann auf zweierlei Weise geschehen, entweder durch Wegschaffung des Wurzelzeichens, oder durch Reduction auf ähnliche und einfachere Integrationen.

I. Setzt man erstlich

1) $$x = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ mithin } dx = \frac{q}{nb} z^{q-1} \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

so gelangt man zu der Gleichung

2) $$\int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$$

$$= \frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}} \int (z^q - a)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1} dz$$

und hier ist rechter Hand ein rationales Differential vorhanden, sobald $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ausmacht. So z. B. hat man nach den obigen Formeln

$$\int x^5(1 - x^2)^{\frac{2}{7}} dx = -\frac{7}{2}\int (z^7 - 1)^2 z^8 dz,$$

wo die Integration in Beziehung auf z durch Entwickelung von $(z^7 - 1)^2$ ausgeführt werden kann, und am Schlusse derselben der Werth von z aus der Gleichung

$$x = \left(\frac{z^7 - 1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 - z^7)^{\frac{1}{2}}$$

zu nehmen, also

$$z = (1 - x^2)^{\frac{1}{7}}$$

einzusetzen ist.

Eine zweite Substitution, welche ebenfalls zu einer rationalen Form führen kann, ist

3) $$x = \left(\frac{a}{z^q - b}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ also } dx = -\frac{qa^{\frac{1}{n}}}{n} \frac{z^{q-1} dz}{(z^q - b)^{\frac{1}{n}+1}};$$

man erhält durch dieselbe:

4) $$\int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = -\frac{qa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n} \int \frac{z^{p+q-1} dz}{(z^q - b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}$$

und hier wird das Differential rechter Hand rational, wenn $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. So hat man beispielsweise

$$\int (x 1 + x^3)^{\frac{1}{3}} dx = -\int \frac{z^3 dz}{(z^3 - 1)^2}$$

und darin

$$x = \left(\frac{1}{z^3 - 1}\right)^{\frac{1}{3}} \text{oder } z = \frac{(1 + x^3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

nach welchen Angaben die Rechnung keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegt.

II. Ist weder $\frac{m}{n}$ noch $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, so lässt sich das binomische Differential im Allgemeinen nicht rational machen; man benutzt dann die nachstehend entwickelten Reductionsformeln, die übrigens allgemein für beliebige m und n gelten.

Bezeichnen wir $\frac{p}{q}$ kurz mit s und $a + bx^n$ mit X, so giebt die partielle Integration:

$$\int x^{m-1} X^s dx = X^s \int x^{m-1} dx - s \int X^{s-1} dX \int x^{m-1} dx$$

$$= X^s \frac{x^m}{m} - s \int X^{s-1} dX \frac{x^m}{m},$$

und weil $dX = bnx^{n-1} dx$ ist:

$$5) \qquad \int x^{m-1} X^s dx = \frac{x^m X^s}{m} - \frac{bns}{m} \int x^{m+n-1} X^{s-1} dx.$$

Dieser Formel wird man sich bedienen, wenn eine Vermehrung von m und eine gleichzeitige Verminderung von s wünschenswerth ist.

Durch Umkehrung der Formel 5) hat man noch

$$\int x^{m+n-1} X^{s-1} dx = \frac{x^m X^s}{bns} - \frac{m}{bns} \int x^{m-1} X^s dx$$

oder, wenn $m - n$ für m und $s + 1$ für s gesetzt wird,

$$6) \int x^{m-1} X^s dx = \frac{x^{m-n} X^{s+1}}{bn(s+1)} - \frac{m-n}{bn(s+1)} \int x^{m-n-1} X^{s+1} dx;$$

mittelst dieser Formel verkleinert man m und vergrössert gleichzeitig s.

Wenn man ferner die rechte Seite der identischen Gleichung

$$\int x^{m-1} X^s dx = \int x^{m-1} (a + bx^n) X^{s-1} dx$$

$$= a \int x^{m-1} X^{s-1} dx + b \int x^{m+n-1} X^{s-1} dx$$

mit der rechten Seite der Gleichung 5) zusammenhält, so ist zunächst

$$\frac{x^m X^s}{m} - \frac{bns}{m}\int x^{m+n-1} X^{s-1}\,dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx + b\int x^{m+n-1} X^{s-1}\,dx,$$

in dieser Gleichung schreiben wir $s + 1$ für s und sehen das erste Integral rechter Hand als Unbekannte an; es wird so:

$$7)\quad \int x^{m-1} X^s\,dx = \frac{x^m X^{s+1}}{am} - \frac{b(m+ns+n)}{am}\int x^{m+n-1} X^s\,dx;$$

diese Reductionsformel vergrössert m ohne s zu ändern. Drückt man das Integral rechter Hand durch die übrigen Grössen aus und schreibt nachher $m - n$ für m, so ist:

$$8)\quad \int x^{m-1} X^s\,dx = \frac{x^{m-n} X^{s+1}}{b(m+ns)} - \frac{a(m-n)}{b(m+ns)}\int x^{m-n-1} X^s\,dx,$$

womit eine Verkleinerung von m ohne Aenderung von s herbeigeführt wird.

Gehen wir wiederum von der identischen Gleichung aus:

$$\int x^{m-1} X^s\,dx = a\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx + b\int x^{m+n-1} X^{s-1}\,dx,$$

so giebt die Anwendung der Formel 6) auf das Integral rechter Hand:

$$\int x^{m-1} X^s\,dx$$
$$= a\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx + b\left[\frac{x^m X^s}{bns} - \frac{m}{bns}\int x^{m-1} X^s\,dx\right].$$

Durch Vereinigung der gleichartigen Grössen folgt hieraus

$$9)\quad \int x^{m-1} X^s\,dx = \frac{x^m X^s}{m+ns} + \frac{ans}{m+ns}\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx,$$

welche Formel zur Verkleinerung von s ohne Aenderung von m dient. — Schreibt man noch $s + 1$ für s und reducirt die Gleichung 9) auf das Integral rechter Hand, so ergiebt sich

$$10)\quad \int x^{m-1} X^s\,dx = -\frac{x^m X^{s+1}}{an(s+1)} + \frac{m+n+ns}{an(s+1)}\int x^{m-1} X^{s+1}\,dx,$$

und hiermit ist die Möglichkeit geboten, s ohne Störung des m zu vergrössern.

Es versteht sich von selbst, dass man von diesen sechs Reductionsformeln die benutzen wird, welche im gegebenen speciellen Falle am raschesten auf ein bereits bekanntes Integral führt. Wäre z. B. das zu entwickelnde Integral

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int x^{k-\frac{1}{2}} (a-x)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

und darin k eine ganze positive Zahl, so liegt es am nächsten, durch successive Verkleinerung von k auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \arcsin \frac{2x - a}{a} + Const.$$

zurückzugehen; in diesem Falle ist also die Anwendung der Formel 8) indicirt und man erhält dadurch

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{x^{k-1}\sqrt{ax - x^2}}{k} + \frac{a(2k-1)}{2k} \int \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

wie man auch aus der Formel 7) in §. 71 finden kann. Aehnlicher Ueberlegungen bedarf es in jedem anderen Falle.

Zu bemerken ist noch, dass die obigen Reductionsformeln für $m - n = 0$, sowie für $m + ns = 0$ nicht in Anspruch genommen werden dürfen, wie ein Rückblick auf ihre Herleitung leicht erkennen lässt. In diesen beiden Fällen können aber (nach I.) die Differentialformeln rational gemacht werden und bedürfen der genannten Reductionsformeln nicht.

§. 74.

Integration mittelst unendlicher Reihen.

Wenn die bisherigen Mittel nicht hinreichen um die Integration eines irrationalen Differentiales auszuführen, so benutzt man gewöhnlich das in §. 67 angegebene Verfahren und stellt das Integral als Summe einer unendlichen Reihe dar. Diese Methode gestattet häufig so mancherlei Modificationen, dass einige Beispiele nicht überflüssig sein dürften.

a. Handelt es sich um das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2) x^2 + \alpha^2 \beta^2 x^4}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 x^2}} dx,$$

worin α, β und x echte Brüche sein mögen, so kann man zwei verschiedene Wege gehen, je nachdem man nur einen der beiden unter dem Integralzeichen vorkommenden Factoren in eine Reihe verwandelt oder beide Factoren entwickelt.

Bei Anwendung des ersten Verfahrens ist es von Vortheil, denjenigen Factor zu entwickeln, welcher den kleineren der beiden Brüche α und β enthält, weil die Reihe um so rascher convergirt je

kleiner die Grösse ist, nach deren Potenzen sie fortschreitet. Unter der Voraussetzung $\alpha^2 > \beta^2$ erhält man zufolge des Gesagten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2 x^2)(1-\beta^2 x^2)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \frac{1.3}{2.4}\beta^4 x^4 + \cdots \right\}$$

oder, wenn man die einzelnen Integrale rechter Hand mit X_0, X_2, X_4 etc. bezeichnet und eine Integrationsconstante hinzufügt,

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2 x^2)(1-\beta^2 x^2)}} + Const.$$

$$= X_0 + \frac{1}{2}\beta^2 X_2 + \frac{1.3}{2.4}\beta^4 X_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^6 X_6 + \cdots$$

Das erste der Integrale X_0, X_2, X_4 etc. ist unmittelbar bekannt, nämlich

2) $$X_0 = \frac{\arcsin \alpha x}{\alpha};$$

zur Berechnung der übrigen dient die Reductionsformel

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$$

$$= -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}{m\alpha^2} + \frac{m-1}{m\alpha^2}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$$

oder

3) $$X_m = \frac{(m-1) X_{m-2} - x^{m-1}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}{m\alpha^2},$$

worin der Reihe nach $m = 2, 4, 6$ etc. zu setzen ist.

Will man den zweiten der angedeuteten Wege gehen, so hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1.3}{2.4}\alpha^4 x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^6 x^6 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \frac{1.3}{2.4}\beta^4 x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^6 x^6 + \cdots$$

mit einander zu multipliciren; das Resultat ist von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2 x^2)(1-\beta^2 x^2)}} = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \cdots,$$

und zwar

$$4)\quad \begin{cases} C_0 = 1, \\ C_2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ C_4 = \frac{1}{8}(3\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 3\beta^4) \\ C_6 = \frac{1}{16}(5\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + 5\beta^6) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$5)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2)(1-\beta^2x^2)}} = \frac{C_0 x}{1} + \frac{C_2 x^3}{3} + \frac{C_4 x^5}{5} + \cdots,$$

wo nur noch eine willkührliche Constante beizufügen ist.

b. Als zweites Beispiel diene die Entwickelung des Integrales

$$\int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx, \qquad \varepsilon^2 < 1,\ x^2 < 1,$$

welches bei den geometrischen Anwendungen der Integralrechnung vorkommen wird. Ist ε ein kleiner echter Bruch höchstens $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so thut man am besten, nur den Zähler in eine Reihe zu verwandeln und zur Abkürzung

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = U_m$$

zu setzen. Man findet

$$6)\quad \int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= Const. + U_0 - \frac{U_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\,\frac{U_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{U_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots,$$

und dabei geschieht die Berechnung der mit U bezeichneten Integrale nach den Formeln

$$7)\quad U_0 = \arcsin x, \qquad U_m = \frac{(m-1)\,U_{m-2} - x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}.$$

Wenn dagegen ε wenig von der Einheit differirt, so besitzt die gefundene Reihe 6) eine so langsame Convergenz, dass man eine sehr grosse Menge von Reihengliedern summiren müsste, um eine nur mässige Genauigkeit zu erreichen; dann sind folgende Transformationen von Nutzen.

Man hat identisch

$$\int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{1 + \frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-x^2}}\,dx$$

und hier lässt sich die Wurzel rechter Hand in eine convergirende Reihe verwandeln, sobald

$$\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-x^2} \leqq 1, \text{ d. h. } x^2 \leqq \frac{1}{2-\varepsilon^2}$$

ist; dies giebt

$$\int \left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-x^2} - \frac{1}{2.4}\,\frac{(1-\varepsilon^2)^2x^4}{(1-x^2)^2} + \cdots\right\} dx.$$

Durch Integration der einzelnen Reihenglieder*) erhält man

$$8) \qquad \int \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= Const. + x + \frac{1-\varepsilon^2}{2} V_1 - \frac{1}{2}\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4} V_2 + \frac{1.3}{2.4}\frac{(1-\varepsilon^2)^3}{6} V_3 - \cdots$$

$$x^2 \leqq \frac{1}{2-\varepsilon^2},$$

wobei zur Abkürzung

$$\int \frac{x^{2k}dx}{(1-x^2)^k} = V_k$$

gesetzt worden ist. Mit Hülfe der Reductionsformel 6) in §. 73 findet man leicht

$$9) \quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2}\, l\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - x, \\[2ex] V_k = \dfrac{1}{2k-2}\left\{\dfrac{x^{2k-1}}{(1-x^2)^{k-1}} - (2k-1)\,V_{k-1}\right\}, \end{cases}$$

wonach die successive Berechnung von V_2, V_3 etc. keine Schwierigkeit bietet.

Im Fall x^2 die angegebene Grenze übersteigt, verliert die Formel 8) ihre Anwendbarkeit; man benutzt dann die identische Gleichung

*) Die Befugniss zu dieser Operation ersieht man leicht, wenn man sich für den Augenblick

$$\frac{x^2}{1-x^2} = z^2 \text{ oder } x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

gesetzt denkt; es wird hierdurch

$$\int \sqrt{1 + \frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}}\sqrt{1+(1-\varepsilon^2)z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}}\left\{1 + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)z^2 - \frac{1}{8}(1-\varepsilon^2)^2z^4 + \cdots\right\}.$$

Die letzte Reihe schreitet nach Potenzen von z fort und daher dürfen ihre einzelnen Glieder nach §. 67 integrirt werden, wofern $(1-\varepsilon^2)z^2$ ein echter Bruch ist; durch Restitution des Werthes von z gelangt man nachher zu der oben angegebenen Reihe.

$$\int\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-\varepsilon^2x^2}}},$$

worin, wegen $x^2 < 1$, auch immer

$$\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-\varepsilon^2x^2} < 1$$

und daher die Reihenentwickelung erlaubt ist. Dies giebt

$$\int\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{(1-\varepsilon^2)x^2}{1-\varepsilon^2x^2}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{(1-\varepsilon^2)^2x^4}{(1-\varepsilon^2x^2)^2}+\cdots\right\}dx$$

und durch Integration der einzelnen Glieder

$$10)\qquad \int\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= Const. + x + \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)W_1 + \frac{1.3}{2.4}(1-\varepsilon^2)^2W_2 + \cdots;$$

dabei ist

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\varepsilon^3}\left\{\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varepsilon x}{1-\varepsilon x}\right)-\varepsilon x\right\},\\ W_k &= \frac{1}{(2k-2)\varepsilon^2}\left\{\frac{x^{2k-1}}{(1-\varepsilon^2x^2)^{k-1}}-(2k-1)W_{k-1}\right\},\end{aligned}\right.$$

wie man mittelst der Reductionsformel 6) in §. 73 leicht findet.

Endlich liesse sich die verlangte Integration auch dadurch ausführen, dass man die beiden Gleichungen

$$\sqrt{1-\varepsilon^2x^2} = 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2x^2-\tfrac{1}{8}\varepsilon^4x^4-\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\cdots$$

mit einander multiplicirt und Alles nach Potenzen von x ordnet; die Rechnung ist dann ähnlich wie bei der letzten Entwickelung des ersten Beispieles.

c. Es versteht sich von selbst, dass man die Integration mittelst unendlicher Reihen auch in dem Falle anwenden kann, wo bereits auf anderem Wege der Werth des Integrales in geschlossener Form entwickelt ist; die nach beiden Methoden abgeleiteten Werthe eines und desselben Integrales können nur um eine Constante differiren und lassen daher eine Vergleichung zu, welche jederzeit auf ein zur Theorie der Reihen gehörendes Resultat führt.

So hat man z. B. einerseits

$$\int\frac{1}{1+x}\,dx = l(1+x)+C_1,$$

andererseits, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt,

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) dx$$
$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots + C_2,$$

mithin durch Vergleichung

$$l(1+x) + Const. = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Der Werth von $Const. = C_1 - C_2$ bestimmt sich durch die Specialisirung $x = 0$; man findet $Const. = 0$ und kommt damit auf ein bekanntes Resultat zurück.

Nach demselben Verfahren lässt sich die Reihe für $arctan\, x$ aus der Gleichung

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) dx,$$
$$x^2 < 1,$$

herleiten, ebenso die Reihe für $arcsin\, x$ aus

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left\{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots\right\} dx,$$
$$x^2 < 1.$$

Ein ähnliches Resultat liefert die Gleichung

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \cdots\right\} dx$$

d. i.

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) + Const.$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Für $x = 0$ erhält man $Const. = 0$, mithin

12) $$l(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \cdots,$$
$$-1 < x < +1,$$

wie schon in §. 59 erwähnt wurde.

Cap. XIII.

Integration transcendenter Functionen.

§. 75.

Differentiale mit Exponentialgrössen.

I. Enthält die zu integrirende Function nur Exponentialgrössen, ist also das Integral von der Form

$$\int f(e^{ax})\,dx,$$

so kann es mittelst der Substitution

1) $$e^{ax}=z, \text{ mithin } x=\frac{lz}{a},\ dx=\frac{1}{a}\,\frac{dz}{z}$$

auf ein anderes zurückgeführt werden, worin keine Exponentialgrösse vorkommt; man erhält nämlich

2) $$\int f(e^{ax})\,dx=\frac{1}{a}\int f(z)\frac{dz}{z}.$$

Hiernach ist z. B.

3) $$\int\frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{z+\frac{1}{z}}\,\frac{dz}{z}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$=\frac{1}{a}\,arctan\,z+Const.=\frac{1}{a}\,arctan(e^{ax})+Const.$$

Als zweites Beispiel diene das Integral

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+e^{ax}}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1+z}}\,\frac{dz}{z};$$

für $1+z=u^2$, woraus $\sqrt{1+z}=u$, $z=u^2-1$ und $dz=2u\,du$ folgen, verwandelt sich das letzte Integral in

$$\frac{2}{a}\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{a}\,l\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+Const.,$$

mithin ist durch Restitution der Werthe von u und z

$$4)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{ax}}}=\frac{1}{a}\,l\left(\frac{\sqrt{1+e^{ax}}-1}{\sqrt{1+e^{ax}}+1}\right)+Const.$$

II. Betrachten wir nun den Fall, wo das Differential Exponentialgrössen und Potenzen enthält. Die einfachste Form eines solchen Integrales ist

$$\int x^m e^{ax}\,dx,$$

und es liegt nahe, die Regel der partiellen Integration

$$\int uv\,dx=u\int v\,dx-\int du\int v\,dx$$

darauf anzuwenden, indem man von der Fundamentalformel

$$5)\qquad \int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}+Const.$$

Gebrauch macht; man findet so

$$6)\qquad \int x^m e^{ax}\,dx=\frac{x^m e^{ax}}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}\,dx.$$

Im Fall m eine ganze positive Zahl ist, kann man durch wiederholte Anwendung dieser Formel, den Exponenten von x fortwährend verkleinernd, zuletzt auf das Integral 5) zurückkommen; in der That erhält man unter der gemachten Voraussetzung:

$$7)\qquad \int x^m e^{ax}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^m}{a}-\frac{m\,x^{m-1}}{a^2}+\frac{m(m-1)\,x^{m-2}}{a^3}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^m\frac{m(m-1)\ldots 2.1}{a^{m+1}}\right]e^{ax}+Const.$$

Hiernach lässt sich auch das Integral

$$\int\varphi(x)\,e^{ax}\,dx$$

entwickeln, wenn $\varphi(x)$ unter der Form $A+Bx+Cx^2+$ etc. enthalten ist.

Setzt man in der Gleichung 6) $-m+1$ an die Stelle von m und reducirt auf das Integral rechter Hand, so gelangt man zu der Formel

$$8)\qquad \int\frac{1}{x^m}e^{ax}\,dx=-\frac{e^{ax}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{a}{m-1}\int\frac{1}{x^{m-1}}e^{ax}\,dx,$$

welche für ganze m mit Ausnahme von $m = 1$ benutzt werden kann. Im letzteren Falle giebt die Formel ein unbrauchbares Resultat und es bleibt dann nichts übrig, als eine Reihenverwandlung vorzunehmen; vermöge der für alle x geltenden Gleichung

$$\frac{e^{ax}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{1} + \frac{a^2 x}{1.2} + \frac{a^3 x^2}{1.2.3} + \cdots$$

erhält man

$$9)\ \int \frac{1}{x} e^{ax}\, dx = Const. + lx$$

$$+ \frac{1}{1}\,\frac{ax}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(ax)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{(ax)^3}{1.2.3} + \cdots$$

und nunmehr lassen sich aus der Formel 8) für $m = 2, 3, \ldots$ die Werthe der Integrale

$$\int \frac{1}{x^2} e^{ax}\, dx, \quad \int \frac{1}{x^3} e^{ax}\, dx, \ldots$$

der Reihe nach ableiten. Eine weitere Folgerung hiervon ist, dass das Integral

$$\int \psi(x)\, e^{ax}\, dx, \text{ worin } \psi(x) = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \cdots$$

jederzeit auf das in Nro. 9) entwickelte Integral zurückgeführt werden kann.

Ist der Exponent von x ein Bruch, so kann man ihn zwar verkleinern, indem man die Formeln 6) oder 8) anwendet, je nachdem er positiv oder negativ ist; aber man wird zuletzt immer wieder zu einer Reihenentwickelung genöthigt. Desselben Mittels muss man sich in allen übrigen Fällen bedienen, wo Integrale von anderen als den hier betrachteten Formen vorkommen. Ein Beispiel wird genügen, um dies zu zeigen.

Das gegebene Integral sei

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, e^x\, dx,$$

so kann man für den Fall eines echtgebrochenen x die Umwandlung

$$\int \left\{1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \cdots \right\} e^x\, dx$$

vornehmen und die einzelnen Glieder mittelst der Formel 7) integriren; ist dagegen $x > 1$, so wird man $x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ für $\sqrt{1 + x^2}$ setzen und dem Integrale die Form:

$$\int \frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^6}+\cdots\right]e^x\,dx,$$

geben, wo die Formeln 9) und 8) anwendbar sind.

§. 76.

Logarithmische Differentiale.

Enthält das zu integrirende Differential nur Logarithmen in der Weise, dass

$$\int f(lz)\,dz$$

das fragliche Integral ist, so leistet die Substitution

1) $$lz = y, \text{ also } z = e^y,\ dz = e^y\,dy$$

gute Dienste; man erhält nämlich

2) $$\int f(lz)\,dz = \int f(y)\,e^y\,dy,$$

wo nun die Entwickelungen des vorigen Paragraphen benutzt werden können.

So hat man z. B. für ein ganzes positives m

$$\int (lz)^m\,dz = \int y^m e^y\,dy$$

$$= \left[y^m - my^{m-1} + m(m-1)\,y^{m-2} - \cdots + (-1)^m m(m-1..2.1\right]e^y,$$

und indem man den Werth von y wieder einsetzt:

3) $$\int (lz)^m\,dz = \Big[(lz)^m - m(lz)^{m-1} + m(m-1)(lz)^{m-2} - \cdots$$
$$\cdots\cdots + (-1)^m m(m-1)\ldots 2.1\Big]z + Const.$$

Auf gleiche Weise erhält man mittelst der Formel 9) des vorigen Paragraphen:

4) $$\int \frac{dz}{lz} = Const. + l(lz)$$
$$+\frac{1}{1}\frac{lz}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

und aus der Formel 8):

5) $$\int \frac{dz}{(lz)^m} = -\frac{z}{(m-1)(lz)^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{dz}{(lz)^{m-1}}.$$

Die unter Nro. 1) angegebene Substitution ist auch bei dem allgemeineren Integrale

$$\int z^{\mu} f(lz)\, dz$$

vortheilhaft anwendbar, sie giebt nämlich

6) $$\int z^{\mu} f(lz)\, dz = \int e^{(\mu+1)y} f(y)\, dy.$$

So ist z. B. für den speciellen Fall $\mu = -1$, $f(lz) = (lz)^m$:

7) $$\int \frac{1}{z} (lz)^m\, dz = \int y^m\, dy = \frac{y^{m+1}}{m+1} + Const.$$
$$= \frac{(lz)^{m+1}}{m+1} + Const., \left(m \gtrless -1\right),$$

und in dem Ausnahmefalle $m = -1$:

8) $$\int \frac{1}{z\,lz}\, dz = \int \frac{1}{y}\, dy = ly + Const.$$
$$= l(lz) + Const.$$

Für ein von -1 verschiedenes μ und ein ganzes positives m liefert die Gleichung 6) zunächst:

$$\int z^{\mu} (lz)^m\, dz = \int e^{(\mu+1)y}\, y^m\, dy,$$

nachher durch Anwendung der Formel 7) des vorigen Paragraphen und durch Wiedereinsetzung des Werthes von y:

9) $$\int z^{\mu} (lz)^m\, dz = \left[\frac{(lz)^m}{\mu+1} - \frac{m(lz)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)\,(lz)^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{(\mu+1)^{m+1}}\right] z^{\mu+1} + Const.$$

In allen übrigen Fällen müssen die Integrationen logarithmischer Differentiale durch Reihenentwickelungen ausgeführt werden.

Als Beispiel diene das Integral

$$\int \frac{l(1+z)}{z}\, dz,$$

worin $1 + z$ positiv, mithin z zwischen -1 und $+\infty$ enthalten sein muss, wenn $l(1+z)$ reelle Werthe haben soll. Behufs der Reihenentwickelung sind hier die beiden Fälle $-1 < z < +1$ und $z > +1$ zu unterscheiden; im ersten Falle ist

$$l(1+z) = \tfrac{1}{1} z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \cdots$$

folglich

10) $$\int \frac{l(1+z)}{z}\, dz = Const. + \frac{z}{1^2} - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \cdots$$
$$-1 < z < +1.$$

Für den zweiten Fall benutzt man die Transformation

$$l(1+z) = lz + l\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

$$= lz + \frac{1}{1}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} - \cdots$$

und erhält

11) $$\int \frac{l(1+z)}{z} dz$$

$$= Const. + \frac{1}{2}(lz)^2 - \frac{1}{1^2 z} + \frac{1}{2^2 z^2} - \frac{1}{3^2 z^3} + \cdots$$

$$z > 1.$$

Die Integration der einzelnen Glieder ist hier erlaubt, weil die Substitution $\frac{1}{z} = x$ zu einer nach Potenzen von x fortgehenden Reihe führen würde.

§. 77.

Rein goniometrische Differentiale.

I. Wenn das gegebene Differential nur aus den verschiedenen goniometrischen Functionen eines und desselben Bogens besteht, wenn mithin das gesuchte Integral unter der Form

$$\int F(\sin u, \cos u, \tan u, \ldots) du$$

enthalten ist, so kann man sich zuerst der Gleichungen

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}, \quad \tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}, \text{ etc.}$$

bedienen, um alle vorkommenden Functionen durch $\sin u$ auszudrücken; das Integral erhält dann die Form

$$\int f(\sin u)\, du,$$

wobei immer vorausgesetzt werden darf, dass u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten sei. Mit Hülfe der Substitution

$$\sin u = x, \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ergiebt sich nun

$$\int f(\sin u)\, du = \int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und damit ist das Integral auf ein anderes zurückgeführt, welches keine goniometrischen Functionen mehr enthält.

Nach diesem Verfahren hat man z. B.

$$\int sec\,u\,du = \int \frac{du}{\sqrt{1-sin^2 u}} = \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+sin\,u}{1-sin\,u}\right)$$

und bei Anwendung einer bekannten goniometrischen Formel

1) $$\int sec\,u\,du = l\,tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u) + C.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\int csc\,u\,du = \int \frac{du}{sin\,u} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\,l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = -\,l\left(\frac{1+cos\,u}{sin\,u}\right)$$

oder kürzer

2) $$\int csc\,u\,du = l\,tan\,\tfrac{1}{2}u + C.$$

Mit Hülfe der genannten Substitution erhält man auch

$$\int sin^p u\,cos^q u\,du = \int x^p\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dx;$$

auf das rechter Hand stehende Integral sind die sechs Reductionsformeln des §. 73 anwendbar, wobei $a = 1$, $b = -1$, $m = p+1$, $n = 2$, $s = \frac{1}{2}(q-1)$ zu setzen ist. Führt man nachher die Werthe von $x = sin\,u$ und $dx = cos\,u\,du$ wieder ein, so gelangt man zu folgenden Gleichungen

3) $$\int sin^p u\,cos^q u\,du$$

$$= \frac{sin^{p+1} u\,cos^{q-1} u}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int sin^{p+2} u\,cos^{q-2} u\,du$$

$$= -\frac{sin^{p-1} u\,cos^{q+1} u}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\int sin^{p-2} u\,cos^{q+2} u\,du$$

$$= \frac{sin^{p+1} u\,cos^{q+1} u}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\int sin^{p+2} u\,cos^{q} u\,du$$

$$= -\frac{sin^{p-1} u\,cos^{q+1} u}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int sin^{p-2} u\,cos^{q} u\,du$$

$$= \frac{sin^{p+1} u\,cos^{q-1} u}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int sin^{p} u\,cos^{q-2} u\,du$$

$$= -\frac{sin^{p+1} u\,cos^{q+1} u}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\int sin^{p} u\,cos^{q+2} u\,du.$$

Mittelst dieser Formeln bringt man das ursprüngliche Integral auf ein anderes derselben Art zurück, worin p oder q oder beide um 2 grössere oder kleinere Werthe besitzen; die fortgesetzte Anwendung der genannten Reductionsformeln führt schliesslich auf ein Integral, worin die Exponenten von $\sin u$ und $\cos u$ nicht ausserhalb des Intervalles -1 bis $+1$ liegen. Sind p und q positive oder negative ganze Zahlen, so kommt man zuletzt auf eines der folgenden Integrale

$$\int du, \quad \int \sin u\, du, \quad \int \cos u\, du,$$

$$\int \sin u \cos u\, du, \quad \int \frac{du}{\sin u}, \quad \int \frac{du}{\cos u},$$

$$\int \tan u\, du, \quad \int \cot u\, du, \quad \int \frac{du}{\sin u \cos u},$$

die sämmtlich durch die Substitution $\sin u = x$ entwickelt werden können. So erhält man z. B., wenn p und q positive ganze Zahlen bezeichnen,

4) für gerade p, $\int \sin^p u\, du$

$$= -\frac{\cos u}{p}\left\{\sin^{p-1} u + \frac{p-1}{p-2}\sin^{p-3} u + \frac{(p-1)(p-3)}{(p-2)(p-4)}\sin^{p-5} u + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 3}{(p-2)(p-4)\ldots 2}\sin u\right\}$$
$$+ \frac{(p-1)(p-3)\ldots 3.1}{p(p-2)(p-4)\ldots 4.2}u + Const.;$$

5) für ungerade p, $\int \sin^p u\, du$

$$= -\frac{\cos u}{p}\left\{\sin^{p-1} u + \frac{p-1}{p-2}\sin^{p-3} u + \frac{(p-1)(p-3)}{(p-2)(p-4)}\sin^{p-5} u + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 4.2}{(p-2)(p-4)\ldots 3.1}\right\} + Const.;$$

6) für gerade q, $\int \cos^q u\, du$

$$= \frac{\sin u}{q}\left\{\cos^{q-1} u + \frac{q-1}{q-2}\cos^{q-3} u + \frac{(q-1)(q-3)}{(q-2)(q-4)}\cos^{q-5} u + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(q-1)(q-3)\ldots 3}{(q-2)(q-4)\ldots 2}\cos u\right\}$$
$$+ \frac{(q-1)(q-3)\ldots 3.1}{q(q-2)(q-4)\ldots 4.2}u + Const.;$$

7) für ungerade q, $\int cos\, u\, du$

$$= \frac{sin u}{q}\left\{ cos^{q-1}u + \frac{q-1}{q-2} cos^{q-3}u + \frac{(q-1)(q-3)}{(q-2)(q-4)} cos^{q-5}u + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{(q-1)(q-3)\ldots 4.2}{(q-2)(q-4)\ldots 3.1} \right\} + Const.;$$

8) für gerade p, $\int tan^p u\, du$

$$= \frac{tan^{p-1}u}{p-1} - \frac{tan^{p-3}u}{p-3} + \frac{tan^{p-5}u}{p-5} - \ldots.$$

$$\cdot\cdot + (-1)^{\frac{1}{2}p-1}\frac{tan u}{1} + (-1)^{\frac{1}{2}p}u + C;$$

9) für ungerade p, $\int tan^p u\, du$

$$= \frac{tan^{p-1}u}{p-1} - \frac{tan^{p-3}u}{p-3} + \frac{tan^{p-5}u}{p-5} - \ldots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}\frac{tan^2 u}{2} + (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} l cos u + C.$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass sich die Integrale

$$\int sin^p u\, du \quad \text{und} \quad \int cos^q u\, du$$

auch auf andere Weise entwickeln lassen. Bei geraden m hat man nämlich (s. §. 55 Formel 11)

$$(-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} sin^m u$$

$$= (m)_0 cos mu - (m)_1 cos(m-2)u + (m)_2 cos(m-4)u - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1}(m)_{\frac{1}{2}m-1} cos 2u + (-1)^{\frac{1}{2}m}\tfrac{1}{2}(m)_{\frac{1}{2}m}$$

und daraus folgt sehr leicht

10) für gerade m, $\int sin^m u\, du$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^{m-1}}\left\{ \frac{sin mu}{m} - (m)_1 \frac{sin(m-2)u}{m-2} + (m)_2 \frac{sin(m-4)u}{m-4} - \cdots \right.$$

$$\left. \cdot\cdot + (-1)^{\frac{1}{2}m-1}(m)_{\frac{1}{2}m-1}\frac{sin 2u}{2} + (-1)^{\frac{1}{2}m}(m)_{\frac{1}{2}m}\frac{u}{2} \right\} + C.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

11) für ungerade m, $\int sin^m u\, du,$

$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}}{2^{m-1}}\left\{\frac{cos\, m u}{m}-(m)_1\frac{cos(m-2)u}{m-2}+(m)_2\frac{cos(m-4)u}{m-4}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}(m)_{\frac{1}{2}(m-1)}\frac{cos\, u}{1}\right\}+C;$$

12) für gerade m, $\int cos^m u\, du$

$$=\frac{1}{2^{m-1}}\left\{\frac{sin\, m u}{m}+(m)_1\frac{sin(m-2)u}{m-2}+(m)_2\frac{sin(m-4)u}{m-4}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(m)_{\frac{1}{2}m-1}\frac{sin\, 2u}{2}+(m)_{\frac{1}{2}m}\frac{u}{2}\right\}+C;$$

13) für ungerade m, $\int cos^m u\, du$

$$=\frac{1}{2^{m-1}}\left\{\frac{sin\, m u}{m}+(m)_1\frac{sin(m-2)u}{m-2}+(m)_2\frac{sin(m-4)u}{m-4}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdot+(m)_{\frac{1}{2}(m-1)}\frac{sin\, u}{1}\right\}+C.$$

II. Eine zweite Umwandlung des Integrales

$$\int F(sin\, u,\ cos\, u,\ tan\, u,\ \ldots)\, du$$

besteht darin, dass man alle vorkommenden goniometrischen Functionen durch $cos\, u$ ausdrückt, wodurch das Integral die Form

$$\int \varphi(cos\, u)\, du$$

erhält, und nachher

$$cos\, u = y,\quad \text{mithin}\quad du = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

substituirt; damit gelangt man zu der Gleichung

$$\int \varphi(cos\, u)\, du = -\int \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Im Wesentlichen ist diese Reduction von der vorigen nicht verschieden, jedoch bequemer, wenn nur der Cosinus vorkommt. So hat man z. B.

$$\int \frac{du}{a+b\, cos\, u} = -\int \frac{dy}{(a+by)\sqrt{1-y^2}};$$

für $a > b$ ist der Werth des Integrales rechter Hand (§. 72 Formel 7)

$$= -\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \sqrt{\frac{(a-b)(1-y)}{(a+b)(1+y)}}$$

mithin nach Substitution von $y = \cos u$ und einer kleinen goniometrischen Umwandlung

$$14)\quad \int \frac{du}{a+b\cos u} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \tfrac{1}{2}u\right) + C, \quad b < a.$$

Ebenso leicht findet man

$$15)\quad \int \frac{du}{a+b\cos u} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{1}{2}u}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{1}{2}u}\right) + C, \quad b > a.$$

Dasselbe Verfahren liefert auch folgende Integralformeln

$$16)\quad \text{für } \varepsilon < 1, \quad \int \frac{du}{(1+\varepsilon\cos u)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan\tfrac{1}{2}u\right) - \frac{\varepsilon \sin u}{1+\varepsilon\cos u}\right\} + C;$$

$$17)\quad \text{für } \varepsilon > 1, \quad \int \frac{du}{(1+\varepsilon\cos u)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2-1}\left\{\frac{\varepsilon\sin u}{1+\varepsilon\cos u} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\, l\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}+\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{1}{2}u}{\sqrt{1+\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{1}{2}u}\right)\right\} + C.$$

III. Man kann endlich das Integral

$$\int F(\sin u, \cos u, \tan u, \ldots)\, du$$

auch so behandeln, dass man erst alle goniometrischen Functionen durch $\tan u$ ausdrückt, wodurch die Form

$$\int \psi(\tan u)\, du$$

entsteht, und nachher die Substitution

$$\tan u = z, \quad du = \frac{dz}{1+z^2}$$

vornimmt; letztere giebt

$$\int \psi(\tan u)\, du = \int \frac{\psi(z)\, dz}{1+z^2}.$$

Diese Transformation bietet den Vortheil, dass sie zu einer rationalen Form führt, wenn $\psi(z)$ eine rationale Function ist.

Beispielsweis hat man

$$\int tan^p u\, du = \int \frac{z^p\, dz}{1+z^2},$$

woraus die Formeln 8) und 9) hervorgehen, sobald gerade und ungerade p unterschieden werden.

Ein zweites Beispiel ist

$$\int \frac{du}{\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u} = \int \frac{dz}{\alpha^2 + \beta^2 z^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\, arctan \frac{\beta z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta}\, arctan \frac{\beta\, tan u}{\alpha} + C,$$

übereinstimmend mit der Grundformel 20) in §. 65.

Nach demselben Verfahren ergiebt sich

$$\int \frac{cos^2 u\, du}{(\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u)^2} = \int \frac{dz}{(\alpha^2 + \beta^2 z^2)^2}$$

$$= \frac{z}{2\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 z^2)} + \frac{1}{2\alpha^3\beta}\, arctan \frac{\beta z}{\alpha}$$

d. i.

18) $$\int \frac{cos^2 u\, du}{(\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u)^2}$$

$$= \frac{cos u\, sin u}{2\alpha^2(\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u)} + \frac{1}{2\alpha^3\beta}\, arctan \frac{\beta\, tan u}{\alpha} + C.$$

Ebenso leicht findet sich

19) $$\int \frac{sin^2 u\, du}{(\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u)^2}$$

$$= -\frac{cos u\, sin u}{2\beta^2(\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u)} + \frac{1}{2\alpha\beta^3}\, arctan \frac{\beta\, tan u}{\alpha} + C,$$

und durch Addition der Formeln 18) und 19)

20) $$\int \frac{du}{(\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u)^2}$$

$$= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha^2\beta^2}\, \frac{cos u\, sin u}{\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{2\alpha^3\beta^3}\, arctan \frac{\beta\, tan u}{\alpha} + C.$$

§. 78.

Gemischt goniometrische Differentiale.

I. Wir betrachten zunächst den Fall, wo Sinus oder Cosinus in Verbindung mit Potenzen vorkommen, wie z. B. in dem Integrale

$$\int u^m sin\, \beta u\, du.$$

Durch Anwendung der partiellen Integration ergiebt sich sehr leicht

$$\int u^m \sin\beta u\, du = -\frac{u^m \cos\beta u}{\beta} + \frac{m}{\beta}\int u^{m-1}\cos\beta u\, du;$$

ferner ist, wenn man dasselbe Verfahren auf das letzte Integral anwendet,

$$\int u^{m-1}\cos\beta u\, du = \frac{u^{m-1}\sin\beta u}{\beta} - \frac{m-1}{\beta}\int u^{m-2}\sin\beta u\, du,$$

mithin durch Substitution von dieser Gleichung in die vorhergehende

$$1)\quad \int u^m \sin\beta u\, du = -\frac{u^m\cos\beta u}{\beta} + \frac{m u^{m-1}\sin\beta u}{\beta^2} - \frac{m(m-1)}{\beta^2}\int u^{m-2}\sin\beta u\, du.$$

Hiernach kann das gesuchte Integral auf ein anderes zurückgeführt werden, welches von derselben Gattung und worin der Exponent von u um 2 kleiner ist. Wendet man die Formel 1) im Falle eines ganzen positiven m mehrmals nach einander an, so kommt man schliesslich auf eines der beiden Integrale

$$\int \sin\beta u\, du = -\frac{\cos\beta u}{\beta} + C,$$

$$\int u\sin\beta u\, du = -\frac{u\cos\beta u}{\beta} + \frac{\sin\beta u}{\beta^2} + C,$$

deren erstes unmittelbar bekannt ist, und deren zweites aus Nro. 1) für $m = 1$ folgt.

Setzt man in der vorigen Reductionsformel $m = -n + 2$ und sieht das Integral rechter Hand als Unbekannte an, so erhält man

$$2)\quad \int \frac{\sin\beta u}{u^n}du = -\frac{\sin\beta u}{(n-1)u^{n-1}} - \frac{\beta\cos\beta u}{(n-1)(n-2)u^{n-2}} - \frac{\beta^2}{(n-1)(n-2)}\int\frac{\sin\beta u}{u^{n-2}}du.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Formel unbrauchbar und es bleibt dann nichts übrig, als mit Hülfe unendlicher Reihen zu integriren. Im ersten Falle giebt die Anwendung der Sinusreihe

$$3)\quad \int\frac{\sin\beta u}{u}du = C + \frac{1}{1}\,\frac{\beta u}{1} - \frac{1}{3}\,\frac{\beta^3 u^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\,\frac{\beta^5 u^5}{1.2..5} - \cdots;$$

im zweiten Falle hat man zunächst durch theilweise Integration

$$4)\qquad \int\frac{\sin\beta u}{u^2}du = -\frac{\cos\beta u}{u} + \beta\int\frac{\cos\beta u}{u}du,$$

und vermöge der Cosinusreihe

$$5)\quad \int \frac{\cos\beta u}{u}\,du = C + lu - \frac{1}{2}\,\frac{\beta^2 u^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{\beta^4 u^4}{1.2..4} - \dots$$

Die Formel 2) dient nun, um die Integrale

$$\int \frac{\sin\beta u}{u^3}\,du, \qquad \int \frac{\sin\beta u}{u^4}\,du, \quad \text{etc.}$$

auf die Integrale 3) und 5) zurückzuführen.

Ist der Exponent von u weder eine positive noch eine negative ganze Zahl, so lässt er sich zwar mittelst der Formeln 1) und 2) vergrössern oder verkleinern, am Ende wird man aber doch zur Integration durch Reihen greifen müssen.

Die nämlichen Betrachtungen gelten fast wörtlich für das Integral

$$\int u^m \cos\beta u\,du$$

und liefern zunächst die Reductionsformel

$$6)\quad \int u^m \cos\beta u\,du = \frac{u^m \sin\beta u}{\beta} + \frac{m u^{m-1} \sin\beta u}{\beta^2} - \frac{m(m-1)}{\beta^2}\int u^{m-2}\cos\beta u\,du,$$

welche bei ganzen positiven m auf eines der beiden Integrale

$$\int \cos\beta u\,du = \frac{\sin\beta u}{\beta} + C,$$

$$\int u\cos\beta u\,du = \frac{u\sin\beta u}{\beta} + \frac{\cos\beta u}{\beta^2} + C$$

zurückführt. Für $m = -n + 2$ ergiebt sich durch Umkehrung von Nr. 6)

$$7)\quad \int \frac{\cos\beta u}{u^n}\,du = -\frac{\cos\beta u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\beta\sin\beta u}{(n-1)(n-2)u^{n-2}} - \frac{\beta^2}{(n-1)(n-2)}\int \frac{\cos\beta u}{u^{n-2}}\,du.$$

Auf die speciellen Fälle $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Formel nicht anwendbar; im ersten Falle benutzt man die in Nro. 5) angegebene Reihe, im zweiten Falle hat man erst durch partielle Integration

$$8)\quad \int \frac{\cos\beta u}{u^2}\,du = -\frac{\cos\beta u}{u} - \beta\int \frac{\sin\beta u}{u}\,du$$

und entwickelt dann das Integral rechter Hand nach Nr. 3). Im Uebrigen dient die Formel 7), um die Integrale

$$\int \frac{\cos\beta u}{u^3}\,du, \qquad \int \frac{\cos\beta u}{u^4}\,du, \quad \text{etc.}$$

auf die in Nro. 3) und 5) betrachteten Integrale zurückzuführen. Ist der Exponent von u weder eine positive noch eine negative ganze Zahl, so kann man ihn zwar vergrössern oder verkleinern, muss aber schliesslich doch Reihenentwickelungen benutzen.

Das Gesammtresultat dieser Untersuchungen lautet dahin, dass Integrale von den Formen

$$\int f(u) \sin\beta u\, du \quad \text{und} \quad \int f(u) \cos\beta u\, du$$

in endlicher Gestalt ausführbar sind, wenn

$$f(u) = A + Bu + Cu^2 + \cdots + Ku^k$$

ist, und dass sie auf die Integrale 3) und 5) zurückkommen, wenn $f(u)$ unter der Form

$$f(u) = A + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} + \cdots + \frac{K}{u^k}$$

enthalten ist.

II. Wir betrachten zweitens die Combination der Exponentialgrösse mit Sinus oder Cosinus, nämlich die beiden Integrale

$$P = \int e^{\alpha u} \sin\beta u\, du \quad \text{und} \quad Q = \int e^{\alpha u} \cos\beta u\, du.$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich

$$P = e^{\alpha u}\left(-\frac{\cos\beta u}{\beta}\right) + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha u} \cos\beta u\, du$$

d. i.

$$P = \frac{-e^{\alpha u}\cos\beta u + \alpha Q}{\beta},$$

und analog, wenn man ebenso mit Q verfährt,

$$Q = \frac{+e^{\alpha u}\sin\beta u - \alpha P}{\beta};$$

die zwei erhaltenen Gleichungen bestimmen die beiden Unbekannten P und Q, nämlich

9) $$\int e^{\alpha u} \sin\beta u\, du = \frac{e^{\alpha u}(\alpha \sin\beta u - \beta\cos\beta u)}{\alpha^2 + \beta^2} + C,$$

10) $$\int e^{\alpha u} \cos\beta u\, du = \frac{e^{\alpha u}(\alpha \cos\beta u + \beta\sin\beta u)}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

III. Die beiden allgemeineren Integrale

$$\int u^m e^{\alpha u} \sin\beta u\, du \quad \text{und} \quad \int u^m e^{\alpha u} \cos\beta u\, du$$

gestatten eine ähnliche Behandlung. Bezeichnet man nämlich das erste mit P_m, das zweite mit Q_m, so findet man durch theilweise Integration und unter Benutzung der Formeln 9) und 10)

$$P_m = \frac{u^m e^{\alpha u}(\alpha \sin\beta u - \beta \cos\beta u) - m\alpha P_{m-1} + m\beta Q_{m-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$Q_m = \frac{u^m e^{\alpha u}(\alpha \cos\beta u + \beta \sin\beta u) - m\alpha Q_{m-1} - m\beta P_{m-1}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Damit sind die gesuchten Integrale auf zwei andere derselben Art zurückgeführt, worin der Exponent von u um eine Einheit verringert ist. Bei ganzen positiven m lässt sich diese Operation m-mal anwenden und dann erhält man P_m und Q_m ausgedrückt, durch P_0 und Q_0, welche letzteren Integrale mit den unter Nr. 9) und 10) entwickelten identisch sind.

Hieraus folgt noch, dass die Werthe der Integrale

$$\int f(u) e^{\alpha u} \sin\beta u \, du \quad \text{und} \quad \int f(u) e^{\alpha u} \cos\beta u \, du$$

in geschlossener Form dargestellt werden können, wenn $f(u)$ eine ganze rationale algebraische Function von u ist.

Dasselbe gilt von den Integralen

$$\int f(u) e^{\alpha u} \sin^p u \, du \quad \text{und} \quad \int f(u) e^{\alpha u} \cos^p u \, du,$$

falls p eine ganze positive Zahl ist. Mittelst der Formeln 9) bis 12) in §. 55 lässt sich nämlich jede ganze Potenz von $\sin u$ oder $\cos u$ in eine endliche Reihe der Sinus oder Cosinus von Vielfachen des Bogens u auflösen, und dann ist jedes einzelne Glied nach den vorigen Formeln integrabel. So hat man z. B.

$$\int f(u) e^{\alpha u} \cos^6 u \, du$$

$$= \tfrac{1}{32} \int f(u) e^{\alpha u} (\cos 6u + 6\cos 4u + 15\cos 2u + 10)\, du,$$

wodurch man auf vier einzelne, unter der Form

$$\int f(u) e^{\alpha u} \cos\beta u \, du$$

enthaltene Integrale zurückkommt.

In allen Fällen, welche hier nicht erörtert wurden, ist die Hülfe unendlicher Reihen in Anspruch zu nehmen.

§. 79.

Cyclometrische Differentiale.

Enthält das gegebene Differential eine cyclometrische Function allein, so ist es leicht auf ein goniometrisches Differential zurückzuführen; mittelst der Substitution

1) $$arcsin\, x = u, \quad x = sin\, u, \quad dx = cos\, u\, du$$

erhält man nämlich ohne Weiteres

2) $$\int f(arcsin\, x)\, dx = \int f(u) cos\, u\, du.$$

Nicht minder einfach ist die Ableitung der folgenden Formeln:

3) $$\int f(arccos\, x)\, dx = -\int f(u)\, sin\, u\, du, \quad u = arccos\, x,$$

4) $$\int f(arctan\, x)\, dx = \int f(u) sec^2 u\, du, \quad u = arctan\, x,$$

5) $$\int f(arccot\, x)\, dx = -\int f(u)\, csc^2 u\, du, \quad u = arccot\, x.$$

So hat man z. B. nach der Formel 2) und nach Nro. 12) des vorigen Paragraphen

$$\int e^{\alpha\, arcsin\, x}\, dx = \int e^{\alpha u} cos\, u\, du$$
$$= \frac{\alpha\, cos\, u + sin\, u}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha u} + Const.,$$

mithin rückwärts für $sin\, u = x$, $cos\, u = \sqrt{1 - x^2}$:

$$\int e^{\alpha\, arcsin\, x}\, dx = \frac{\alpha\sqrt{1 - x^2} + x}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha\, arcsin\, x} + Const.$$

Auf gleiche Weise würden sich die beiden Integrale

$$\int (arcsin\, x)^m\, dx \quad \text{und} \quad \int (arccos\, x)^m\, dx$$

mittelst der Formeln 10) und 11) des vorigen Paragraphen entwickeln lassen.

Leicht integrabel sind auch die Differentiale von der Form $f(x)\, \psi(x)\, dx$, wenn $\psi(x)$ eine cyclometrische Function und $f(x)$ so beschaffen ist, dass das Integral von $f(x)\, dx$ eine algebraische Function bildet; in der That genügt unter diesen Voraussetzungen die theilweise Integration des gegebenen Differentiales, um sogleich auf das Integral eines algebraischen Ausdruckes zu kommen. Man hat nämlich für $\psi(x) = arcsin\, x$:

$$\int arcsin x\, f(x)\, dx$$

$$= arcsin x \int f(x)\, dx - \int d\, arcsin x \int f(x)\, dx$$

oder

$$1)\quad \int f(x)\, arcsin x\, dx = arcsin x \int f(x)\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\, dx;$$

mit gleicher Leichtigkeit sind die folgenden Formeln entwickelbar:

$$2)\quad \int f(x)\, arccos x\, dx = arccos x \int f(x)\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\, dx,$$

$$3)\quad \int f(x)\, arctan x\, dx = arctan x \int f(x)\, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x)\, dx,$$

$$4)\quad \int f(x)\, arccot x\, dx = arccot x \int f(x)\, dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x)\, dx.$$

So ist z. B. in dem speciellen Falle $f(x) = 1$ nach Nro. 1):

$$5)\quad \int arcsin x\, dx = arcsin x \,.\, x - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, x$$

$$= x\, arcsin x + \sqrt{1-x^2} + Const.,$$

und nach Nro. 3):

$$6)\quad \int arctan x\, dx = arctan x \,.\, x - \int \frac{dx}{1+x^2}\, x$$

$$= x\, arctan x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2) + Const.;$$

überhaupt allgemeiner für $f(x) = x^{m-1}$:

$$7)\quad \int x^{m-1}\, arcsin x\, dx = \frac{x^m\, arcsin x}{m} - \frac{1}{m} \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$8)\quad \int x^{m-1}\, arctan x\, dx = \frac{x^m\, arctan x}{m} - \frac{1}{m} \int \frac{x^m\, dx}{1+x^2},$$

wo die rechter Hand vorkommenden Integrationen bei ganzem positiven m jederzeit ausführbar sind.

Ein etwas zusammengesetzteres Beispiel ist folgendes. Man hat zunächst nach Nro. 3)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, arctan x\, dx = -\, arctan x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\, dx,$$

ferner

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{1+x^2} - 1 \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$$

Schafft man das Wurzelzeichen in dem rechter Hand befindlichen Integrale weg (§. 72) und integrirt nachher, so findet sich:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

und durch Substitution dieses Werthes:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\arcsin x\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,\arctan x$$

$$+ \sqrt{2}\,\arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C.$$

Lässt sich keine der erwähnten Methoden anwenden, so muss man wie immer die Integration durch unendliche Reihen zu bewerkstelligen suchen.

Cap. XIV.

Geometrische Anwendungen einfacher Integrationen.

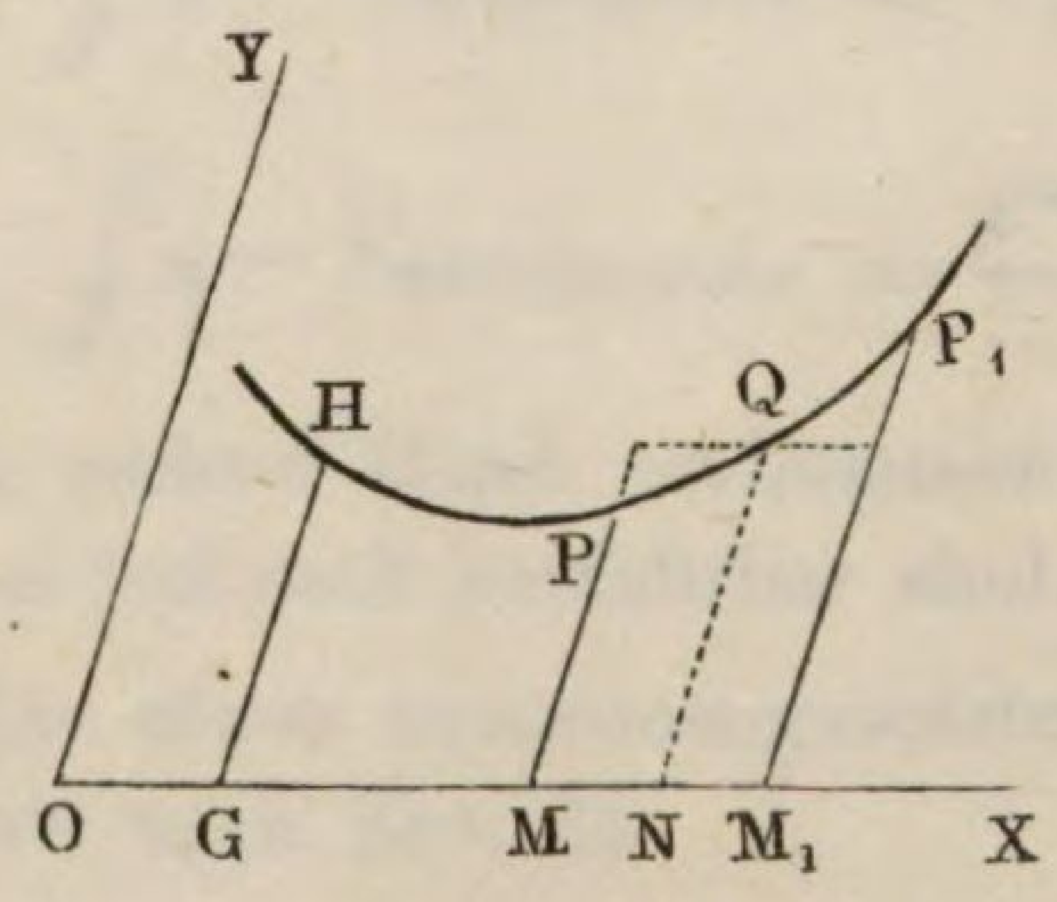
§. 80.

Quadraturen in Parallelcoordinaten.

Schon in §. 64 haben wir darauf hingewiesen, dass ein Integral als die ebene Fläche betrachtet werden kann, welche von der Abscissenachse, zwei darauf senkrechten Ordinaten und einer Curve begrenzt wird; dort benutzten wir diese geometrische Construction, um den Begriff des Integrales zu veranschaulichen, hier soll sie zur Bestimmung der Fläche einer gegebenen Plancurve dienen. Zugleich verallgemeinern wir die Betrachtung durch die Annahme eines beliebigen schiefwinkligen Coordinatensystemes.

In Fig. 41 sei $\angle XOY = \gamma$, $OM = x$, $MP = y$ und $y = f(x)$ die Gleichung der Curve $HPQP_1$, ferner die Fläche $GMPH = U$ und $MM_1 = \Delta x$ ein beliebiger Zuwachs der Abscisse x; die entsprechende Flächenzunahme $MM_1P_1P = \Delta U$ kann einem Parallelogramme verglichen werden, welches MM_1 zur einen Seite und eine gewisse, zwischen MP und M_1P_1 eingeschaltete Ordinate NQ zur anderen Seite hat, daher

Fig. 41.



$$\Delta U = \Delta x \,.\, NQ \,.\, \sin\gamma, \qquad \frac{\Delta U}{\Delta x} = NQ \,.\, \sin\gamma.$$

Aus dieser Gleichung, welche so lange gilt, als die Curve stetig verläuft, zieht man

$$\frac{dU}{dx} = y \sin\gamma$$

und umgekehrt durch Integration

1) $$U = \sin\gamma \int y\, dx + Const.$$

Die Bedeutung der willkührlichen Constanten besteht darin, dass es für die letzte Ordinate y gleichgültig ist, von welcher Anfangsordinate GH ab die Fläche U gerechnet wird, dass mithin so lange eine Unbestimmtheit in der Aufgabe liegt, als jene Anfangsordinate nicht besonders angegeben ist. Nennen wir x_0 die Abscisse OG der Anfangsordinate GH, so muss $U = 0$ werden, wenn x den Specialwerth $x = x_0$ erhält; durch Zusatz dieser Bedingung bestimmt sich die Constante, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

a. Die Parabel. Aus der bekannten Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p} = \frac{x^2}{q}$$

ergiebt sich augenblicklich

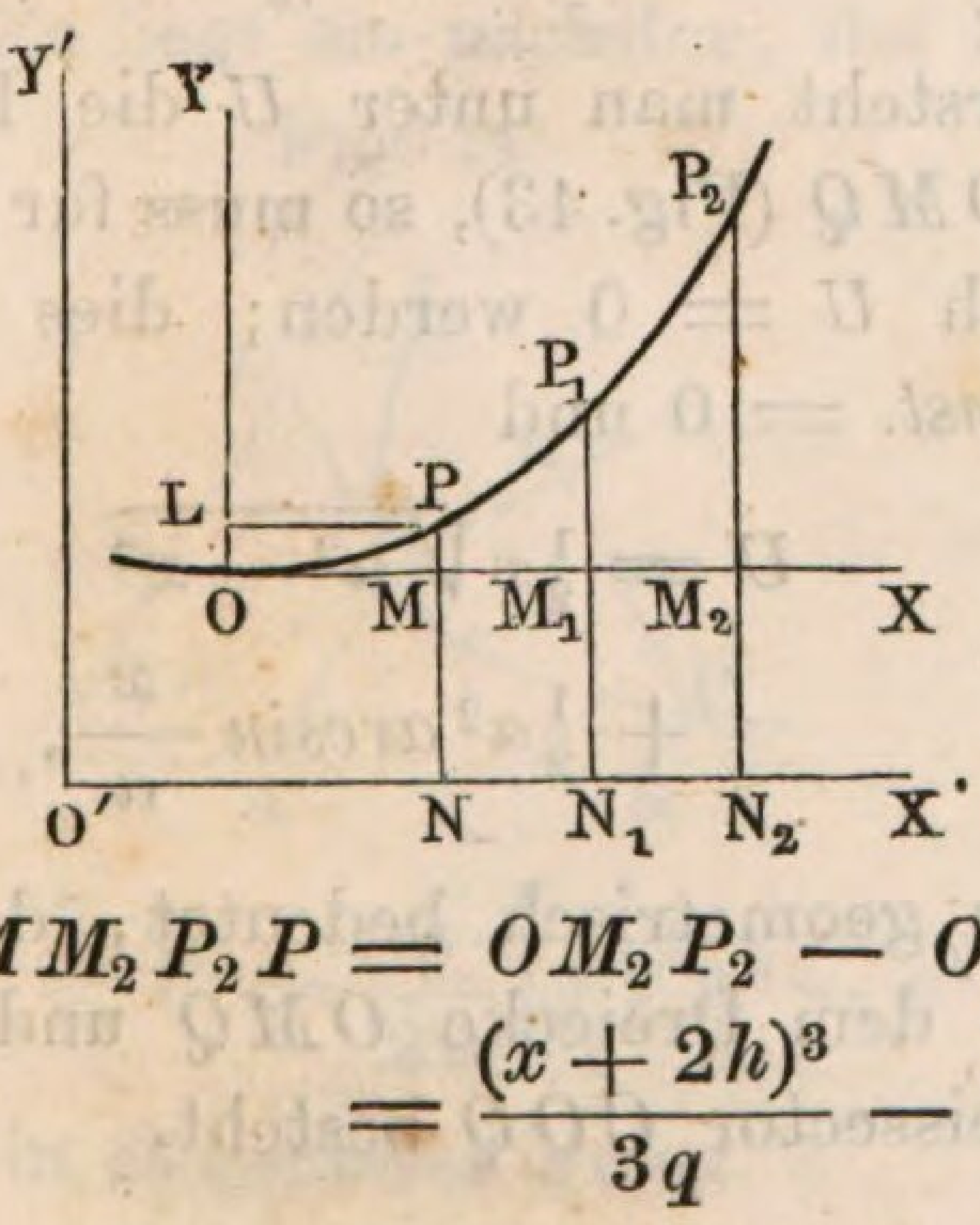
$$U = \frac{x^3}{3q} + Const.$$

Soll die Fläche vom Scheitel aus gerechnet werden, das heisst U gleich der Fläche OMP sein, so müssen x und U gleichzeitig verschwinden; dies giebt $0 = 0 + Const.$, mithin

2) $$U = \frac{x^3}{3q} = \frac{1}{3} xy.$$

Daraus folgt auch der bekannte Satz des Archimedes, dass die Fläche $OLP = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}\, LOMP$ sein muss.

Fig. 42.



Eine elegante und später brauchbare Erweiterung des Theoremes 2) ist folgende. Man ziehe noch zwei Ordinaten M_1P_1 und M_2P_2 in den Abständen $MM_1 = M_1M_2 = h$ und berechne die Fläche zwischen MP und M_2P_2, nämlich (Fig. 42)

$$MM_2P_2P = OM_2P_2 - OMP$$
$$= \frac{(x+2h)^3}{3q} - \frac{x^3}{3q} = \frac{1}{3}h\,\frac{6x^2 + 12xh + 8h^2}{q},$$

oder auch

$$MM_2P_2P = \tfrac{1}{3}h\left[\frac{x^2}{q} + 4\frac{(x+h)^2}{q} + \frac{(x+2h)^2}{q}\right].$$

Bezeichnen wir die drei Ordinaten MP, M_1P_1, M_2P_2 mit y, y_1, y_2, so wird die vorige Gleichung zur folgenden

$$MM_2P_2P = \tfrac{1}{3}h(y + 4y_1 + y_2).$$

Um dieses Resultat zu verallgemeinern, legen wir durch einen beliebigen Punkt O' ein neues Coordinatensystem parallel dem früheren; der Abstand der Achsen OX und $O'X'$ sei $MN = b$ und

$NP = \eta = y + b$, $N_1P_1 = \eta_1 = y_1 + b$, $N_2P_2 = \eta_2 = y_2 + b$.

Nach diesen Voraussetzungen hat man

$$\begin{aligned}\text{Fläche } NN_2P_2P &= \text{Rechteck } MN_2M_2M + \text{Fläche } MM_2P_2P \\ &= 2hb + \tfrac{1}{3}h[\eta - b + 4(\eta_1 - b) + \eta_2 - b]\end{aligned}$$

und bei gehöriger Zusammenziehung

3) $$\text{Fläche } NN_2P_2P = \tfrac{1}{3}h(\eta + 4\eta_1 + \eta_2).$$

Legt man demnach durch drei Punkte P, P_1, P_2, deren Ordinaten gleiche Abstände halten, eine Parabel, deren Achse parallel der Ordinatenachse ist, so kann man die Fläche des entstandenen parabolischen Doppelstreifens aus den drei Ordinaten und ihrer gegenseitigen Entfernung berechnen, ohne den Scheitel und den Parameter jener Parabel aufsuchen zu müssen.

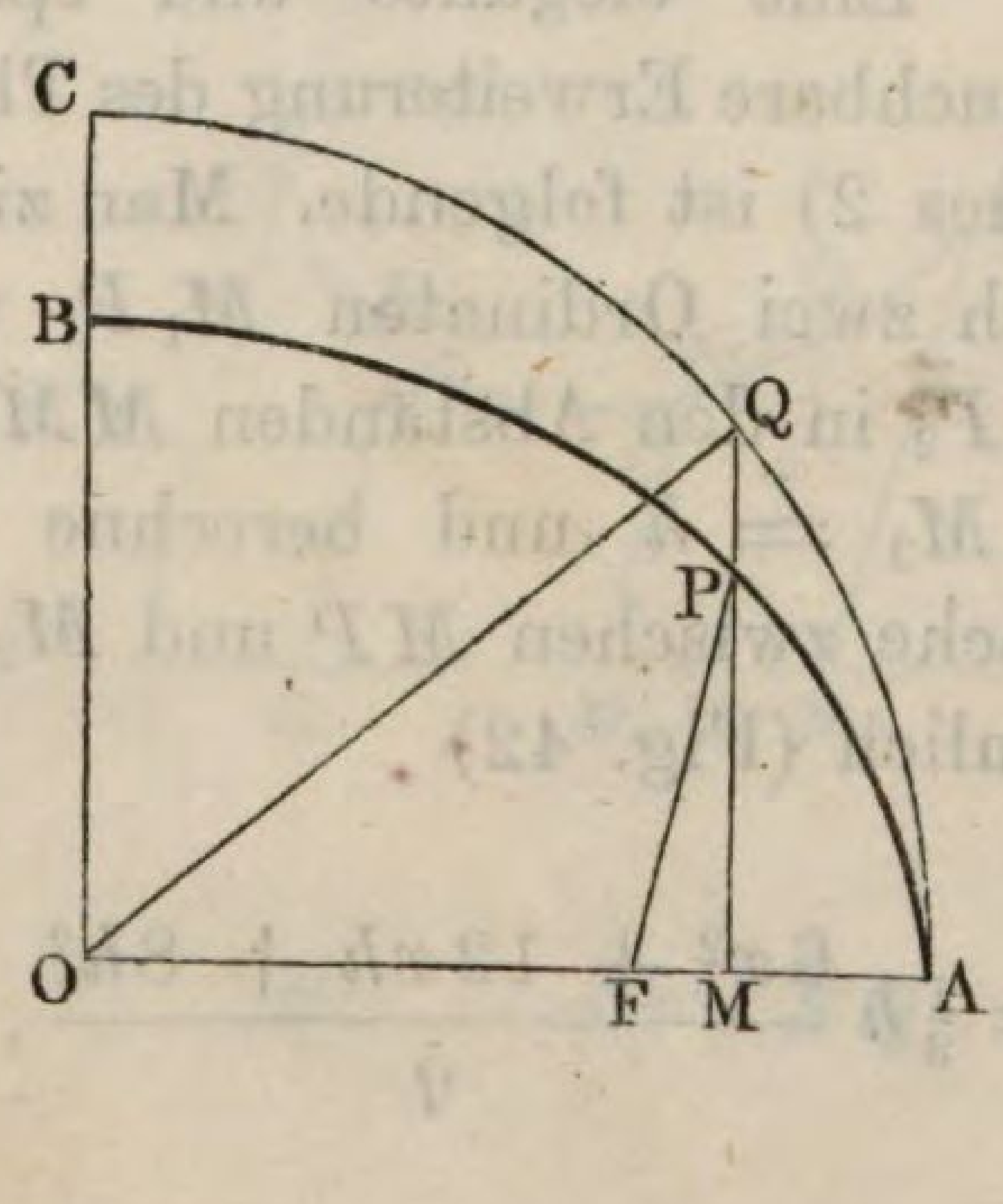
b. Kreis und Ellipse. Die Mittelpunktsgleichung des Kreises sei

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

es wird dann

$$U = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + Const.$$

Fig. 43.



Versteht man unter U die Fläche $COMQ$ (Fig. 43), so muss für $x=0$ auch $U = 0$ werden; dies giebt $Const. = 0$ und

4) $$U = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a},$$

was geometrisch bedeutet, dass U aus dem Dreiecke OMQ und dem Kreissector COQ besteht.

Für die Ellipse sei die Ordinate $MP = y_1$ und die Fläche $BOMP = U_1$; man hat dann

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$U_1 = \frac{b}{a}\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right]$$

oder

5) $$y_1 = \frac{b}{a}y, \quad U_1 = \frac{b}{a}U,$$

wo y und U die vorige Bedeutung haben. Die Quadratur der Ellipse lässt sich demnach auf die Quadratur des Kreises zurückführen. Die Fläche des Ellipsenquadranten ist hiernach

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{1}{4}\pi a b,$$

und die ganze Ellipsenfläche $= \pi a b = \pi(\sqrt{ab})^2$, worin ein leicht auszusprechender Satz liegt.

c. Die Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel lautet in rechtwinkligen Coordinaten, wenn der Mittelpunkt zum Coordinatenanfang und die Hauptachse zur Abscissenachse genommen wird,

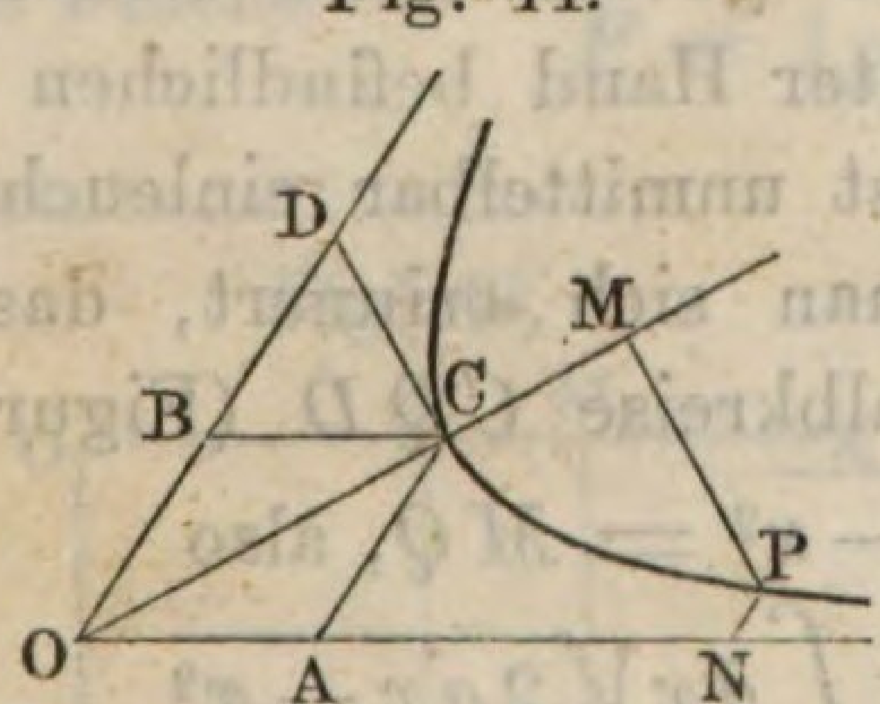
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

mithin ist

$$U = \frac{b}{a}\int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$
$$= \frac{b}{a}\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}a^2 l(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C\right].$$

Es liegt am nächsten, die Fläche vom Scheitel aus zu rechnen, d. h. $U =$ Fläche CMP zu setzen (Fig. 44); für $x = OC = a$ wird dann $U = 0$ und

Fig. 44.



$$0 = -\tfrac{1}{2}a^2 l a + C,$$

wodurch sich der Werth von C bestimmt. Man erhält nach Substitution desselben

$$U = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right]$$

oder in eleganterer Form

6) $$U = \tfrac{1}{2}\left[xy - ab\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\right].$$

Weit einfacher gestaltet sich die Quadratur der Hyperbel, wenn man die Asymptoten zu Coordinatenachsen nimmt, $OA = OB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = k$, $\angle AOB = \gamma$, $ON = \xi$, $NP = \eta$ und die Fläche $CANP = \Omega$ setzt; es wird nämlich

$$\eta = \frac{k^2}{\xi},$$

$$\Omega = k^2 \sin\gamma \int \frac{1}{\xi}\, d\xi = k^2 \sin\gamma\, (l\xi + C).$$

Für $\xi = k$ muss Ω verschwinden, daher ist $0 = lk + C$, mithin $C = -lk$ und

7) $$\Omega = k^2 \sin\gamma \,.\, l\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

Bei einer gleichseitigen Hyperbel, deren Haupthalbachse $= \sqrt{2}$ ist, wird $k = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ und $\Omega = l\xi$; zufolge dieses sehr einfachen Verhältnisses hat man früher die Logarithmen der Basis hyperbolische Logarithmen genannt.

d. Die Cycloide. Nehmen wir, wie in §. 21 (auf S. 94) den Scheitel der Cycloide zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Differentialgleichung der Curve

$$dy = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}\, dx;$$

um von derselben Gebrauch zu machen, ersetzen wir die Gleichung 1) durch die folgende

$$U = yx - \int x\, dy,$$

welche durch partielle Integration entsteht; es wird dann

$$U = xy - \int dx \sqrt{2ax - x^2}.$$

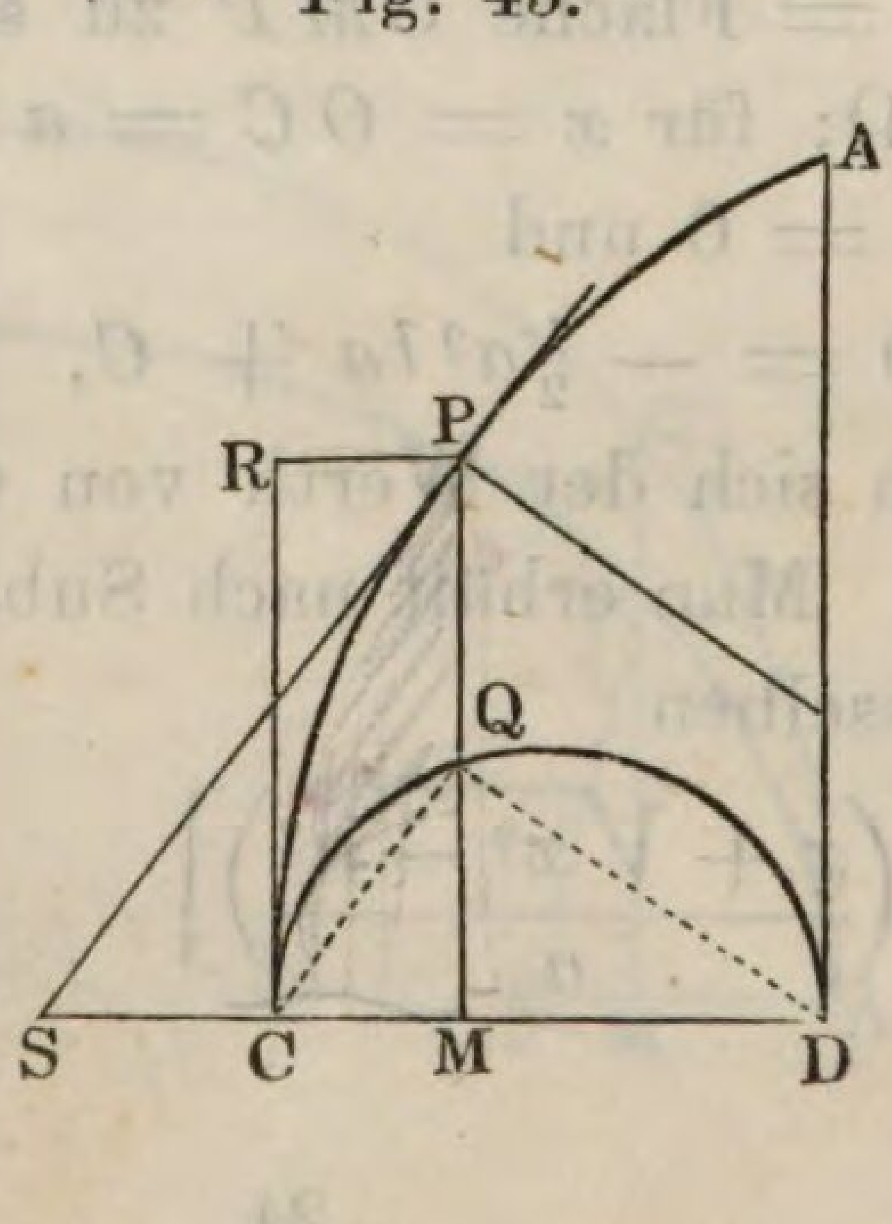


Fig. 45.

Die geometrische Bedeutung des rechter Hand befindlichen Integrales ist unmittelbar einleuchtend, wenn man sich erinnert, dass in dem Halbkreise CQD (Figur 45) $\sqrt{2ax - x^2} = MQ$, also

$$\int dx \sqrt{2ax - x^2} = \text{Fläche } CMQ + Const.$$

sein muss; wir haben daher

$$U = xy - \text{Fläche } CMQ + Const.$$

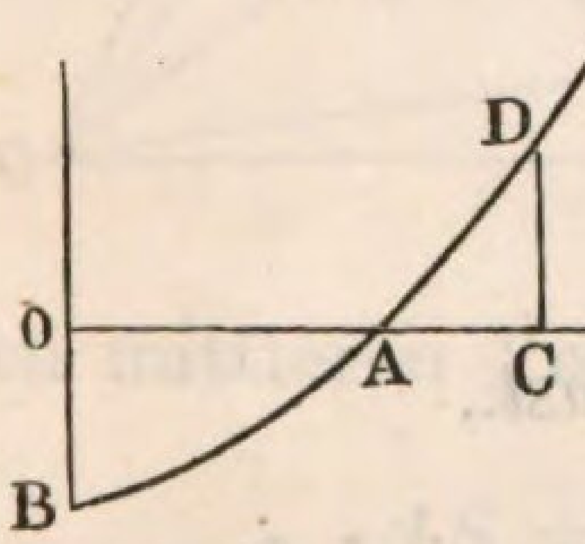
Verstehen wir unter U die Fläche CMP, so wird für $x = 0$ gleichzeitig $U = 0$ und $CMQ = 0$, mithin auch *Const.* $= 0$, also

$$U = xy - \text{Fläche } CMQ \text{ oder } xy - U = \text{Fläche } CMQ;$$

geometrisch heisst dies, dass die Flächen CPR und CMQ gleich sind; hierin liegt unmittelbar die Quadratur der Cycloide. Speciell für $x = a$ ergiebt sich, dass die Fläche $CDA = \frac{3}{2}\pi a^2$, mithin die ganze Cycloidenfläche gleich dem Dreifachen von der Fläche des erzeugenden Kreises ist.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn die zu quadrirende Curve die Abscissenachse durchschneidet, wenn also die gesuchte Fläche aus zwei Theilen besteht, von denen der eine über, der andere unter der jener Achse liegt. Für ein negatives y, etwa $y = -\varphi(x)$, wird nämlich F negativ $= -\int \varphi(x)\,dx$, was auch geometrisch leicht zu constatiren ist*); geht nun y aus dem Negativen ins Positive über, so wechselt F gleichzeitig sein Vorzeichen und die Formel 1) giebt in diesem Falle die algebraische Summe der beiden über und unter der Abscissenachse liegenden Flächentheile. Gewöhnlich will man aber die arithmetische Summe; diese erlangt man leicht, indem man jene Flächentheile einzeln berechnet und mit gleichem Vorzeichen zusammennimmt. Wählt man z. B. die durch den Brennpunkt O (Fig. 47) einer Parabel auf deren Achse senkrecht gelegte Gerade zur Abscissenachse, so ist die Gleichung der Parabel

Fig. 47.



$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p} - p\right),$$

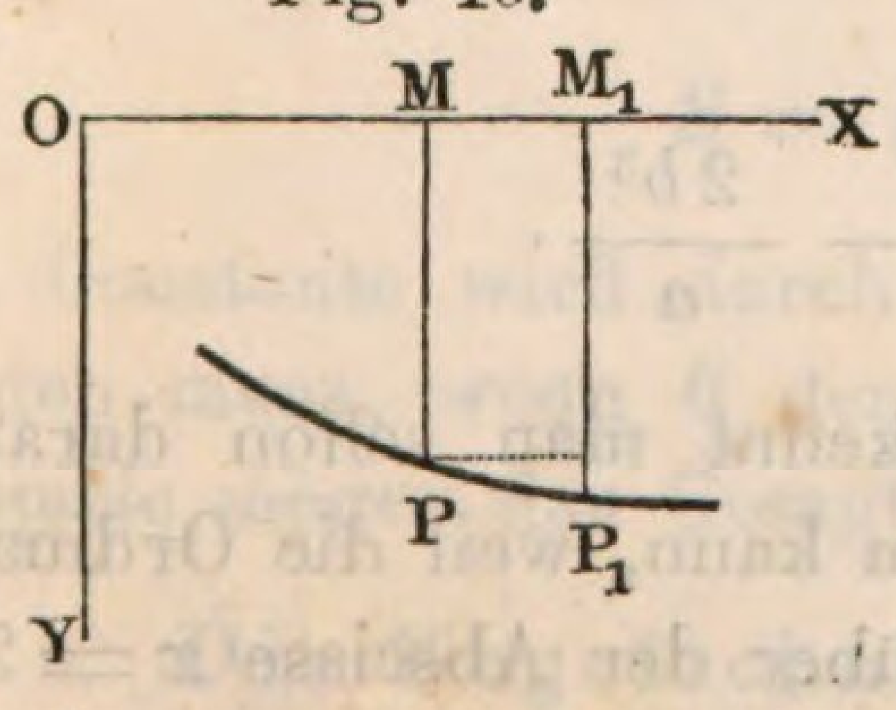
mithin

$$6) \qquad F = \tfrac{1}{2}x\left(\frac{x^2}{3p} - p\right) + Const.,$$

und wenn die Fläche F von der Ordinatenachse abgerechnet wird, ist *Const.* $= 0$. Ueber der Abscisse $OC = p\sqrt{3}$ steht demnach die Fläche

$$F = \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}\left(\frac{p^2 . 3}{3p} - p\right) = 0.$$

Fig. 46.



*) Ein Rechteck MM_1P_1P (Fig. 46) dessen Basis MM_1 positiv und dessen Höhe MP negativ ist, hat zur Fläche das Product $-MM_1 . MP$, gilt also für negativ, wie dies auch durch seine entgegengesetzte Lage angezeigt wird. Dieselbe Bemerkung muss sich auf krummlinig begrenzte unterhalb der Abscissenachse liegende Flächen erstrecken, weil eine Fläche immer als Grenze einer Rechtecksumme angesehen werden darf (§. 64).

Dieses Resultat sagt, dass die beiden Flächen OAB und ACD gleich gross und von entgegengesetztem Zeichen sein müssen; man hat in der That für die erste Fläche wegen $OA = p$:

$$\text{Fläche } OAB = -\tfrac{1}{3}p^2 = -\tfrac{2}{3}\,.\,OB\,.\,OA,$$

was mit dem Archimedischen Satze übereinstimmt. Um die zweite Fläche ACD zu finden, rechnen wir in Nro. 6) die Fläche F vom Punkte A aus, so dass F für $x = p$ verschwindet; dies giebt zur Constantenbestimmung $0 = -\frac{1}{3}p^2 + Const.$, also

$$F = \tfrac{1}{2}x\left(\frac{x^2}{3p} - p\right) + \tfrac{1}{3}p^2;$$

für $x = p\sqrt{3}$ erhalten wir hieraus

$$\text{Fläche } ACD = \tfrac{1}{3}p^2,$$

dem Werthe nach mit OAB übereinstimmend, dem Zeichen nach entgegengesetzt. Die algebraische Summe der Flächen OAB und ACD ist also Null, die arithmetische Summe $= \frac{2}{3}p^2$.

Einer ähnlichen Vorsicht bedarf es in dem Falle, wo die Curve sich sprungweise innerhalb der gesuchten Fläche ändert; auch hier besteht die Fläche aus zwei gesonderten Theilen, welche einzeln berechnet werden müssen. Wollte man z. B. die über der Abscisse $x = 2a$ stehende Fläche der Curve

$$y = \frac{b^3}{(a-x)^2}. \quad (b \text{ und } a \text{ positiv})$$

ermitteln, so erhielte man ohne jene Rücksicht

$$F = b^3 \int \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{b^3}{a-x} + Const.,$$

und weil vom Anfange der Coordinaten her $F = 0$ wird für $x = 0$:

$$0 = \frac{b^3}{a} + Const.,$$

also

$$F = \frac{b^3}{a-x} - \frac{b^3}{a},$$

und endlich für $x = 2a$

$$F = -\frac{b^3}{a} - \frac{b^3}{a} = -\frac{2b^3}{a}.$$

Die Unrichtigkeit dieses Resultates erkennt man schon daraus, dass die Curve keine negative Fläche haben kann, weil die Ordinate y stets positiv ist. Nun besteht aber die über der Abscisse $x = 2a$ liegende Fläche aus zwei getrennten aber congruenten Theilen, in-

dem y für $x = a$ discontinuirlich wird und zu $x = a + u$ und zu $x = a - u$ immer dieselben Ordinaten gehören; die gesuchte Fläche ist demnach das Doppelte der über der halben Abscisse $x = a - 0$ stehenden Fläche und letztere

$$= \frac{b^3}{a-(a-0)} - \frac{b^3}{a} = +\infty - \frac{b^3}{a},$$

also überhaupt unendlich gross und positiv; daher ist auch $F = \infty$.

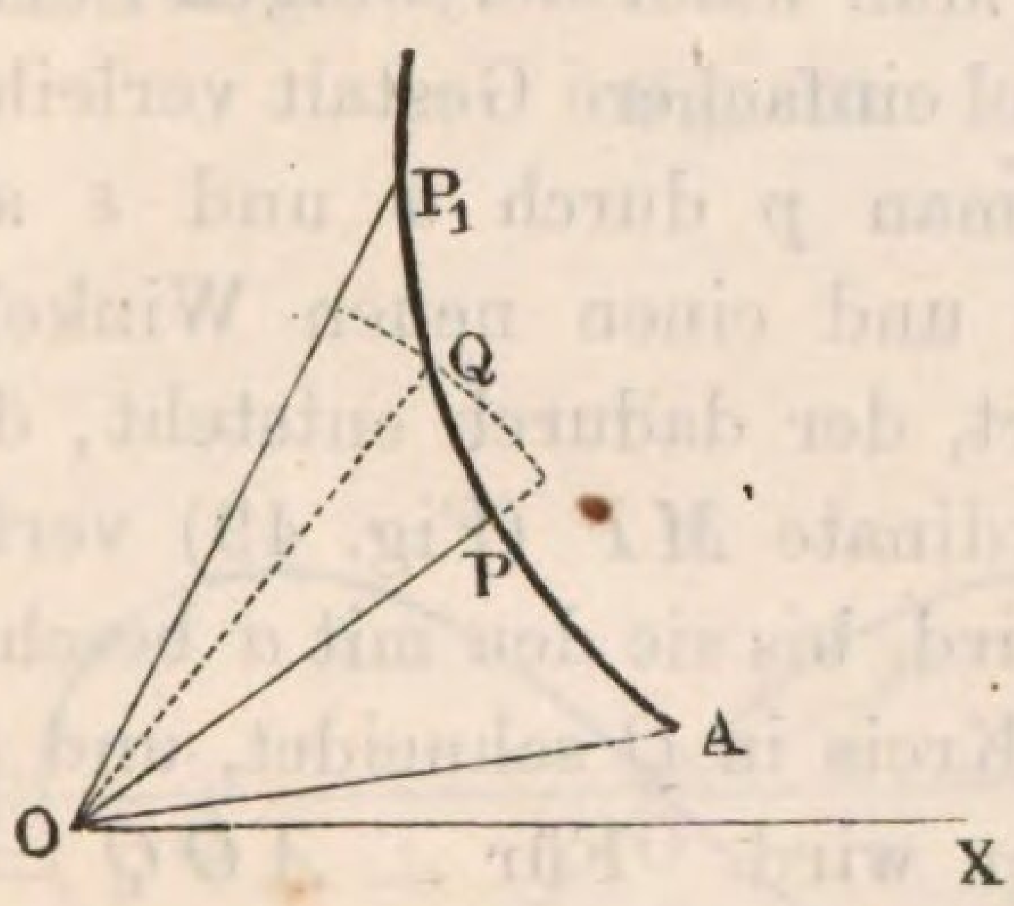
§. 81.

Quadraturen in Polarcoordinaten.

Wenn die Gleichung einer Curve durch die Palarcoordinaten $OP = r, \angle POX = \theta$ (Fig. 48) ausgedrückt und etwa in der Form

$$r = f(\theta)$$

Fig. 48.



dargestellt ist, so kommt es darauf an, die Sectorfläche $AOP = S$ zu ermitteln, welche von zwei, der Lage nach bestimmten Vectoren und der Curve begrenzt wird. Wächst nun θ um $\angle POP_1 = \Delta\theta$, so nimmt S zu um die Sectorfläche $POP_1 = \Delta S$; diese ist einem Kreissector vergleichbar, welcher denselben Centriwinkel und einen mittleren Vector OQ zum Radius hat, mithin ist

$$\Delta S = \tfrac{1}{2}\overline{OQ}^2 \Delta\theta \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta S}{\Delta\theta} = \tfrac{1}{2}\overline{OQ}^2.$$

Hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Grenze für gleichzeitig gegen die Null convergirende $\Delta\theta$ und ΔS

$$\frac{dS}{d\theta} = \tfrac{1}{2}r^2,$$

folglich umgekehrt

1) $$S = \tfrac{1}{2}\int r^2\, d\theta + Const.$$

Die Constante wird durch die Bedingung bestimmt, dass $S = 0$ werden muss, wenn θ den Specialwerth $\angle AOX$ erhält. Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

a. Die Kegelschnitte. Als allgemeine Polargleichung dieser Curven hat man (§. 24, S. 104)

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta},$$

mithin

$$S = \tfrac{1}{2}p^2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} + Const.,$$

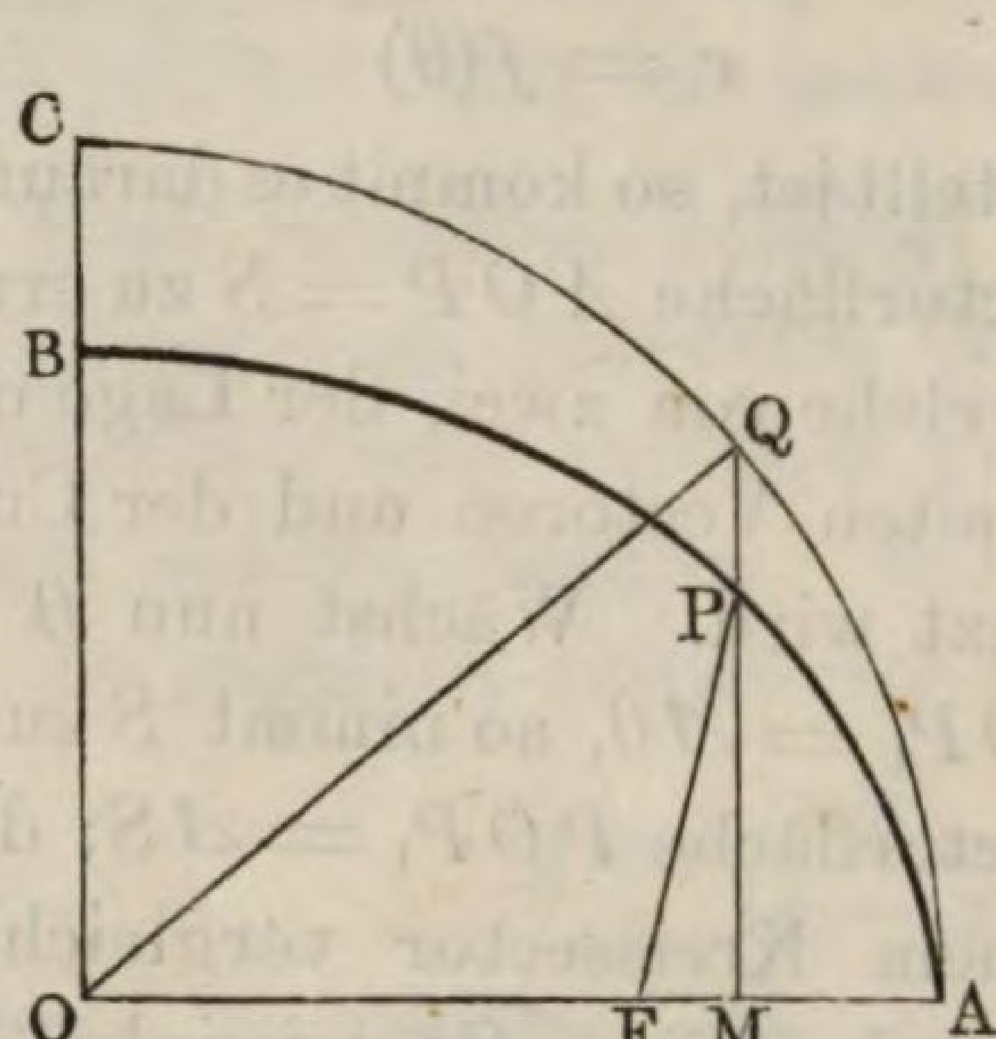
wobei die drei Fälle $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$ zu unterscheiden sind.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, mithin $\varepsilon < 1$, so giebt die Ausführung der Integration (§. 77, Formel 16)

$$S = \frac{p^2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan\tfrac{1}{2}\theta\right) - \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{\varepsilon \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

wobei es keiner Constante bedarf, falls der Sector von der grossen Achse an gerechnet wird ($AFP = S$), also gleichzeitig mit θ verschwinden muss. Man kann der obigen Formel eine viel einfachere Gestalt verleihen, wenn man p durch a und ε ausdrückt und einen neuen Winkel ω einführt, der dadurch entsteht, dass die Ordinate MP (Fig. 49) verlängert wird, bis sie den mit a beschriebenen Kreis in Q schneidet, und QO gezogen wird. Für $\angle AOQ = \omega$ ist nämlich

Fig. 49.



$$a\cos\omega - a\varepsilon = r\cos\theta$$

oder wegen $a = p : (1 - \varepsilon^2)$ und vermöge des Werthes von r

$$\frac{\cos\omega - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\cos\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta};$$

daraus leitet man ohne Mühe folgende Gleichungen ab:

$$\cos\theta = \frac{\cos\omega - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\omega}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\omega}{1 - \varepsilon\cos\omega},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan\tfrac{1}{2}\omega,$$

mittelst deren sich ergiebt

$$S = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\omega - \varepsilon\sin\omega),$$

wo $a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ die kleine Halbachse der Ellipse bedeutet. Ist nun θ gegeben, so geschieht die Quadratur des Sectors S auf die Weise, dass man erst ω mittelst der Formel

1) $$tan\,\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\, tan\,\tfrac{1}{2}\theta$$

berechnet und nachher S mittelst der Formel

2) $$S = \tfrac{1}{2}ab\,(\omega - \varepsilon \sin \omega).$$

Die Fälle $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$ gestatten eine ähnliche Behandlung, die aber zu weniger eleganten Resultaten führt.

b. Die Lemniscate. Aus der Gleichung (S. 106)

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

ergiebt sich sofort

3) $$S = \tfrac{1}{4}a^2 \sin 2\theta,$$

wobei es keiner Integrationsconstante bedarf, wenn man den Sector mit $\theta = 0$ anfangen lässt, also $= AOP$ setzt (Fig. 50). Für $\theta = \frac{1}{4}\pi$ erhält man die Fläche eines Lemniscatenquadranten $= \frac{1}{4}a^2$; die ganze Lemniscate hat demnach dieselbe Fläche wie ein über OA construirtes Quadrat.

Fig. 50.

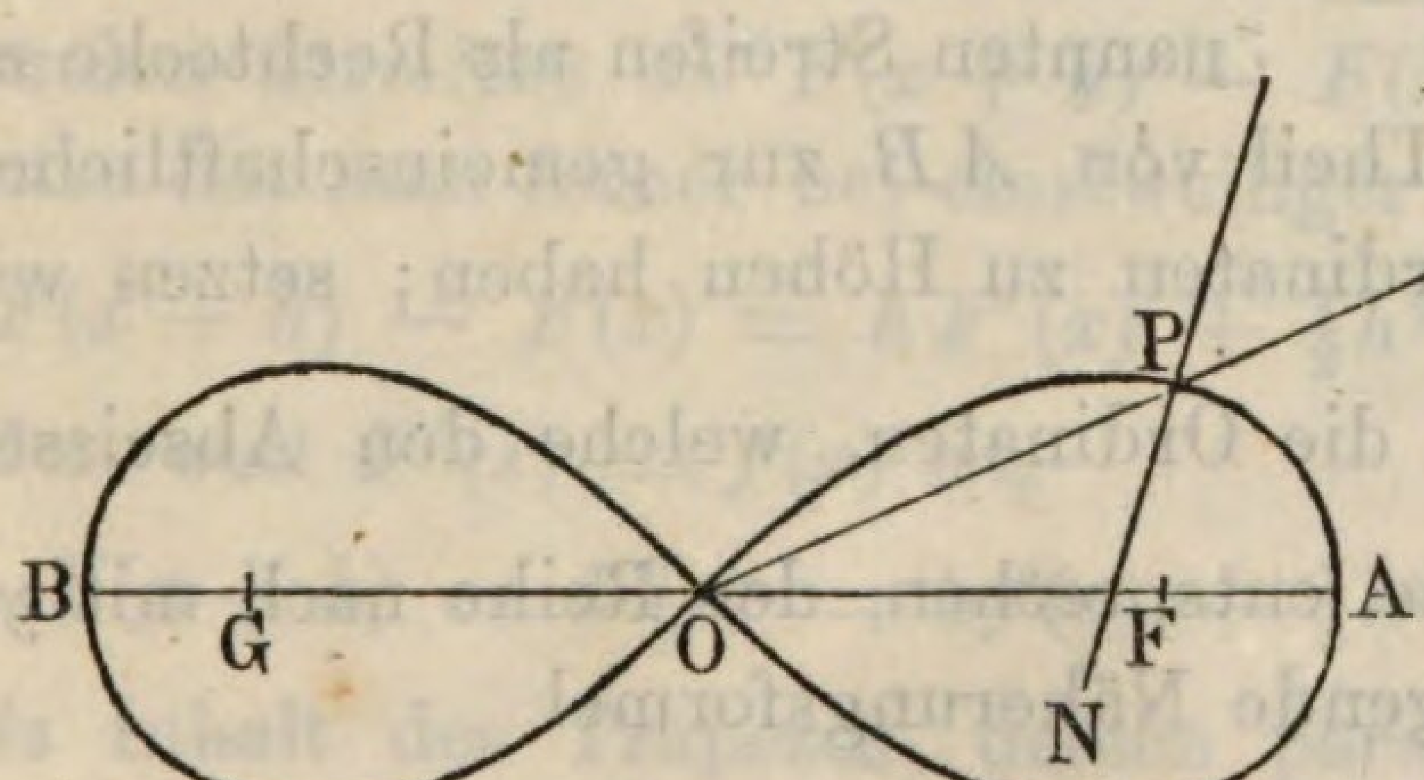
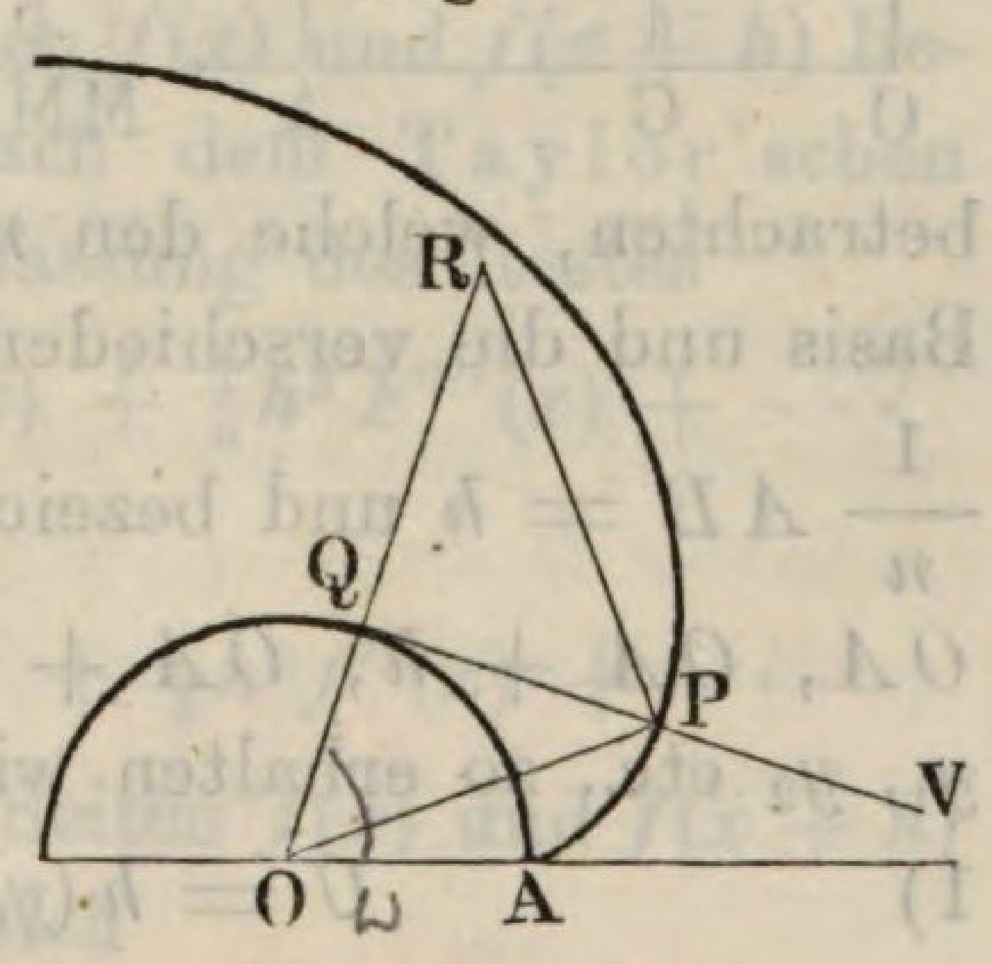


Fig. 51.



c. Die Kreisevolvente. Betrachtet man den Wälzungswinkel $AOQ = \omega$ als unabhängige Variabele, so gelten die auf S. 107 entwickelten Formeln

$$r^2 = a^2(1+\omega^2), \quad d\theta = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\,d\omega,$$

und nach diesen ist, wenn man unter S den mit ω gleichzeitig verschwindenden Sector AOP versteht (Fig. 51),

4) $$S = \tfrac{1}{6}a^2\omega^3.$$

Um diesem Ausdrucke eine geometrische Bedeutung unterzulegen, errichten wir im Endpunkte des Vectors auf diesem eine Senkrechte, welche die verlängerte PQ in R schneidet; es ist dann $PQ = a\omega$, $QR = a\omega^2$, mithin der Sector AOP gleich dem dritten Theile der Dreiecksfläche PQR.

Aendert sich der Radiusvector irgend einer Curve sprungweis

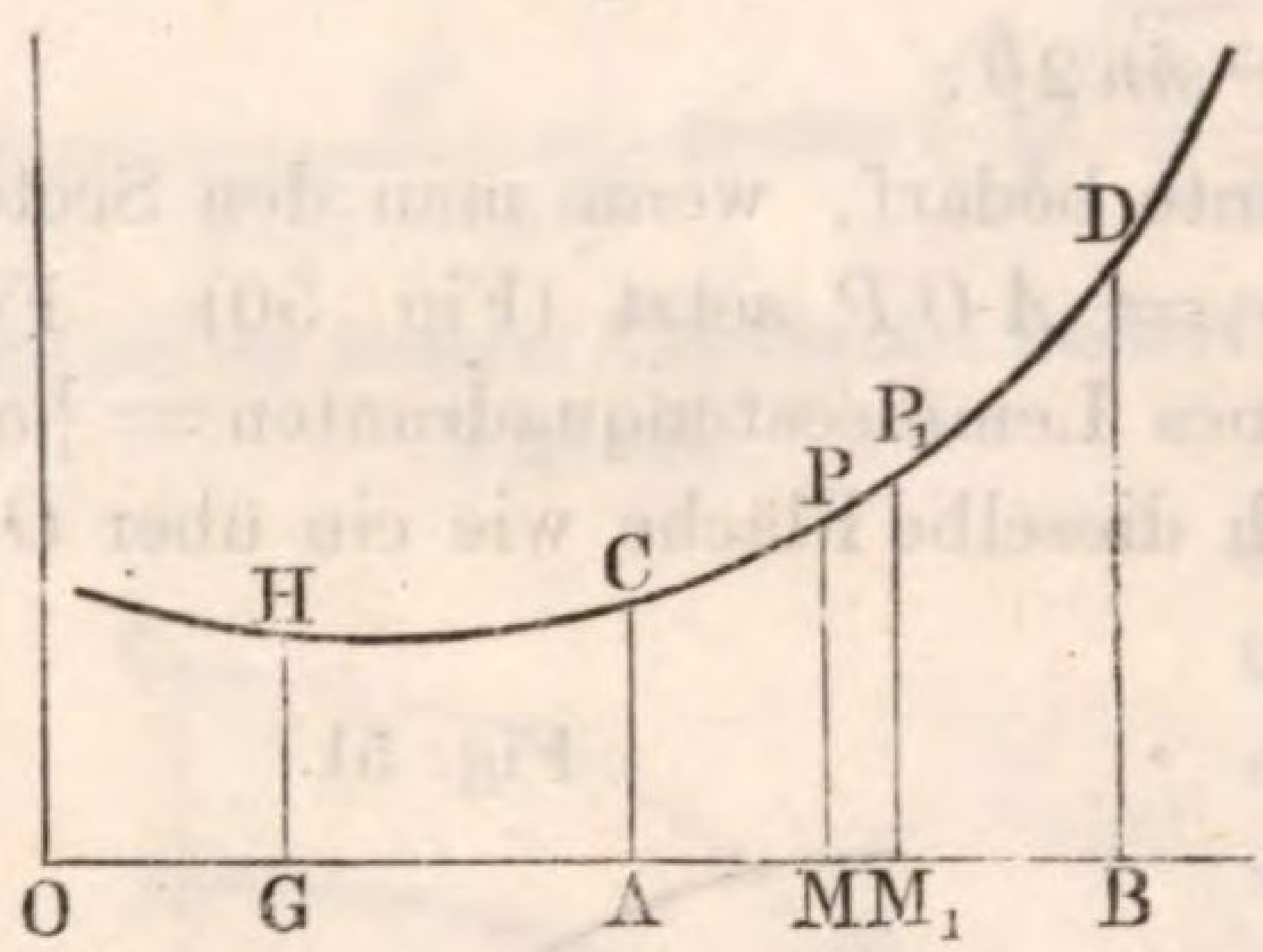
innerhalb des zu quadrirenden Sectors, so besteht letzterer aus zwei oder mehr getrennten Sectoren, deren Flächen einzeln zu berechnen sind.

§. 82.

Näherungsweise Quadraturen.

Unter Voraussetzung recktwinkliger Coordinaten sei (in Fig. 52) AB die Basis einer Curvenfläche $ABDC$, $OM = x$ irgend eine Abscisse und $MP = y = f(x)$ die zugehörige Ordinate; theilen wir AB in n gleiche Theile und ziehen durch jeden Theilpunkt eine Ordinate, so zerfällt die Fläche $ABDC = U$ in n Streifen, die sich auf verschiedene Weise näherungsweis quadriren lassen.

Fig. 52.



Das Einfachste ist, die genannten Streifen als Rechtecke zu betrachten, welche den nten Theil von AB zur gemeinschaftlichen Basis und die verschiedenen Ordinaten zu Höhen haben; setzen wir $\frac{1}{n} AB = h$ und bezeichnen die Ordinaten, welche den Abscissen OA, $OA + h$, $OA + 2h$ etc. entsprechen, der Reihe nach mit y_0, y_1, y_2 etc., so erhalten wir folgende Näherungsformel

1) $$U = h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}).$$

Eine etwas grössere Genauigkeit wird dadurch erreicht, dass man die einzelnen Streifen als Trapeze berechnet, was darauf hinauskommt, die n einzelnen Stücke des Bogens CPD als gerade Linien, mithin den Bogen selbst als gebrochene Linie anzusehen; dies giebt

$$U = h\frac{y_0 + y_1}{2} + h\frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

und bei gehöriger Zusammenziehung

2) $$U = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n).$$

Bedeutend grösser wird die Annäherung, wenn man die einzelnen Stücke des Bogens CPD als krumme Linien, und zwar am einfachsten als parabolische Bögen ansieht. Zu diesem Zwecke nimmt man für n eine gerade Zahl und denkt sich die Endpunkte je drei auf einander folgender Ordinaten

$$y_0,\ y_1,\ y_2;\quad y_2,\ y_3,\ y_4;\quad y_4,\ y_5,\ y_6;\ \text{etc.}$$

durch Parabeln verbunden, deren Achsen parallel zur y-Achse liegen *). Die Fläche U besteht dann aus $\frac{1}{2}n$ parabolischen Doppelstreifen, welche nach Formel 3) in §. 80 leicht zu quadriren sind; man erhält

$$U = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) + \tfrac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots \\ \cdots + \tfrac{1}{3}h(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

oder

$$3) \quad U = \tfrac{1}{3}h[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + y_n],$$

welche Formel unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannt ist.

Um den Genauigkeitsgrad der Formeln 1), 2) und 3) beurtheilen zu können, untersuchen wir noch, zwischen welchen Grenzen der Fehler liegt, den man bei Anwendung der genannten Formeln begeht. Nennen wir $F(x)$ die Fläche, welche von der festen Ordinate GH bis zu irgend einer Ordinate $MP = y = f(x)$ reicht, so ist der Flächeninhalt des zwischen den Ordinaten $f(x)$ und $f(x+h)$ liegenden Streifens $= F(x+h) - F(x)$; nach dem Taylor'schen Satze hat man ferner bei einstweiliger Weglassung des Restes

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \tfrac{1}{2}h^2F''(x) + \tfrac{1}{6}h^3F'''(x) + \cdots$$

oder, weil $F'(x) = f(x)$ ist,

$$F(x+h) - F(x) = hf(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'(x) + \tfrac{1}{6}h^3f''(x) + \cdots$$

Als Inhalt des Trapezes, dessen parallele Seiten $f(x)$ und $f(x+h)$ sind, und welches h zur Höhe hat, ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}h[f(x) + f(x+h)] = hf(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'(x) + \tfrac{1}{4}h^3f''(x) + \cdots$$

mithin als Differenz beider Flächen

$$F(x+h) - F(x) - \tfrac{1}{2}h[f(x) + f(x+h)] \\ = -\tfrac{1}{12}h^2[hf''(x) + \tfrac{1}{2}h^2f'''(x) + \tfrac{3}{20}h^3f^{\mathrm{IV}}(x) + \cdots].$$

*) Die Möglichkeit dieser Construction erhellt auf folgende Weise. Die Gleichung einer Parabel, deren Achse $\parallel OY$ liegt, ist im Allgemeinen

$$\eta - \beta = \frac{(\xi - \alpha)^2}{q},$$

wobei α, β die Coordinaten des Scheitels sind, und q den Parameter bezeichnet. Soll diese Parabel durch drei gegebene Punkte $\xi_0\eta_0$, $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ gehen, so müssen α, β, q den drei Gleichungen

$$\eta_0 - \beta = \frac{(\xi_0 - \alpha)^2}{q}, \quad \eta_1 - \beta = \frac{(\xi_1 - \alpha)^2}{q}, \quad \eta_2 - \beta = \frac{(\xi_2 - \alpha)^2}{q}$$

genügen; diese liefern aber jederzeit reelle Werthe für α, β und q.

Die eingeklammerte Reihe stimmt in ihren beiden ersten Gliedern überein mit der Entwickelung

$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f'''(x) + \tfrac{1}{6}h^3 f^{IV}(x) + \cdots,$$

daher ist durch Addition

$$F(x+h) - F(x) - \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] + \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(x+h) - f'(x)]$$
$$= \tfrac{1}{720}h^5 f^{IV}(x) + \tfrac{1}{1440}h^6 f^{V}(x) + \cdots.$$

Um die Summe der noch übrigen Reihe direct zu finden, setzen wir

4) $$\varphi(h) = F(x+h) - F(x) - \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] + \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(x+h) - f'(x)]$$

und differenziren diese Gleichung mehrmals in Beziehung auf h; dies giebt

$$\varphi'(h) = \tfrac{1}{2}[f(x+h) - f(x)] - \tfrac{1}{6}h\,[2f'(x+h) + f'(x)] + \tfrac{1}{12}h^2 f''(x+h),$$
$$\varphi''(h) = \tfrac{1}{6}[f'(x+h) - f'(x)] - \tfrac{1}{6}hf''(x+h) + \tfrac{1}{12}h^2 f'''(x+h),$$
$$\varphi'''(h) = \tfrac{1}{12}h^2 f^{IV}(x+h).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Functionen $F(z)$, $F'(z) = f(z)$, $f'(z), \ldots f^{IV}(z)$ stetig und endlich bleiben von $z = x$ bis $z = x + h$, sind $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ und $\varphi'''(h)$ gleichfalls continuirlich und endlich von $h = 0$ bis $h = h$ und dann gilt, dem Theorem von Mac Laurin zufolge, die Gleichung

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\,\varphi'(0) + \tfrac{1}{2}h^2\,\varphi''(0) + \tfrac{1}{2}(1-\vartheta)^2 h^3\,\varphi'''(\vartheta h),$$
$$0 < \vartheta < 1$$

oder vermöge der angegebenen Werthe von $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$ etc.

$$\varphi(h) = \frac{(1-\vartheta)^2\vartheta^2}{24} h^5 f^{IV}(x + \vartheta h).$$

Das Maximum von $(1-\vartheta)^2\vartheta^2$ ist $\frac{1}{16}$, daher kann man

5) $$\varphi(h) = \frac{\varepsilon}{384} h^5 f^{IV}(x + \vartheta h)$$

setzen, wo ε einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bezeichnet. Der Vergleich von Nro. 4) mit Nro. 5) führt nun zu folgender Gleichung

6) $$F(x+h) - F(x) = \tfrac{1}{2}h\,[f(x) + f(x+h)] - \tfrac{1}{12}h^2\,[f'(x+h) - f'(x)] + \tfrac{1}{384}\varepsilon h^5 f^{IV}(x + \vartheta h),$$

worin die beiden letzten Summanden die Differenz zwischen dem Flächenstreifen und dem Trapez angeben.

Wir nehmen der Reihe nach $x = a,\ a + h,\ a + 2h, \ldots$ $a + (n-1)h$ und addiren alle entstehenden Gleichungen; die Summe ist

$$7)\qquad F(a + nh) - F(a)$$
$$= h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a + \overline{n-1}h) + \tfrac{1}{2}f(a+nh)]$$
$$- \tfrac{1}{12}h^2[f'(a+nh) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}h^5 S;$$

dabei wurde zur Abkürzung gezetzt

$$8)\qquad S = \varepsilon_0 f^{IV}(a + \vartheta_0 h) + \varepsilon_1 f^{IV}(a + h + \vartheta_1 h) + \cdots$$
$$\cdots + \varepsilon_{n-1} f^{IV}(a + \overline{n-1}h + \vartheta_{n-1}h).$$

Ist nun $a + nh = b$, mithin

$$h = \frac{b-a}{n},$$

so repräsentirt die linke Seite der Gleichung 7) den genauen Werth der Fläche $ABDC = U$, welche zwischen den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ liegt; rechter Hand ist $f(a) = y_0$, $f(a+h) = y_1$ etc., folglich hat man

$$9)\qquad U = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)$$
$$- \tfrac{1}{12}h^2[f'(b) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}h^5 S.$$

Der Vergleich mit Formel 2) zeigt, welche Correction für eine genauere Rechnung nöthig ist, und zugleich bietet die mit S bezeichnete Grösse ein Mittel zur Bestimmung des Fehlermaximums. Versteht man nämlich unter M den absolut grössten Werth, welchen $f^{IV}(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ erreicht, so denke man sich statt jedes der Summanden

$$\varepsilon_0 f^{IV}(a + \vartheta_0 h), \quad \varepsilon_1 f^{IV}(a + h + \vartheta_1 h) \text{ etc.}$$

einmal $+ M$, das andere Mal $- M$ gesetzt; im ersten Fall erhält man zu viel, im zweiten zu wenig, mithin ist

$$nM > S > -nM,$$

oder

$$\frac{b-a}{h}M > S > -\frac{b-a}{h}M.$$

Demzufolge darf man die Gleichung

$$10)\qquad S = \varrho\frac{b-a}{h}M$$

aufstellen, worin ϱ einen nicht näher bekannten positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet. Soll nun U nach Formel 9) auf p Decimalstellen genau berechnet werden, so ist n so gross zu nehmen, dass der letzte Summand

$$\tfrac{1}{384}h^5 S = \varrho \frac{(b-a)h^4 M}{384} = \varrho \frac{(b-a)^5 M}{384\, n^4}$$

weniger als $(\frac{1}{10})^p$ beträgt; dies giebt

$$n > \sqrt[4]{\frac{10^p (b-a)^5 M}{384}}.$$

Um den Genauigkeitsgrad der Simpson'schen Regel kennen zu lernen, benutzen wir wieder die Formel 7) und nehmen erst $n = 2m$, dies giebt, wenn S_1 der entsprechende Werth von S heisst,

$$\begin{aligned} &F(a + 2mh) - F(a) \\ &= h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a + \overline{2m-1}h) + \tfrac{1}{2}f(a+2mh)] \\ &\quad - \tfrac{1}{12}h^2[f'(a+2mh) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}h^5 S_1. \end{aligned}$$

Lassen wir ferner in Nro. 7) m an die Stelle von n und $2h$ an die von h treten, so erhalten wir ähnlich

$$\begin{aligned} &F(a + 2mh) - F(a) \\ &= 2h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+2h) + \cdots + f(a + \overline{2m-2}h) + \tfrac{1}{2}f(a+2mh)] \\ &\quad - \tfrac{1}{3}h^2[f'(a+2mh) - f'(a)] + \tfrac{32}{384}h^5 S_2; \end{aligned}$$

diese Gleichung subtrahiren wir von dem Vierfachen der vorhergehenden und dividiren den Rest durch 3, es wird dann

11)
$$\begin{aligned} &F(a + 2mh) - F(a) \\ &= \tfrac{1}{3}h[f(a) + 4f(a+h) + 4f(a+3h) + \cdots + 4f(a + \overline{2m-1}h) \\ &\quad + 2f(a+2h) + 2f(a+4h) + \cdots + 2f(a+\overline{2m-2}h) \\ &\quad + f(a+2mh)] \\ &\quad - \frac{32 S_2 - 4 S_1}{3 \cdot 384} h^5. \end{aligned}$$

Zufolge der Entstehung von S_1 und S_2 darf man wie früher

$$S_1 = \varrho_1 \cdot 2mM, \quad S_2 = \varrho_2 \cdot mM$$

setzen, wo M den absolut grössten Werth bezeichnet, den $f^{IV}(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = a + 2mh$ erreicht; der letzte Summand in Nro. 11) wird dann

$$= \frac{4\varrho_2 - \varrho_1}{288} 2mMh^5,$$

und da $4\varrho_2 - \varrho_1$ jedenfalls zwischen -5 und $+5$ liegt, so setzen wir $4\varrho_2 - \varrho_1 = 5\varrho$, wo ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet. Endlich sei in Formel 11)

$$2m = n, \quad a + 2mh = a + nh = b;$$

nach allen gemachten Bemerkungen zusammen ist dann

12) $$U = \tfrac{1}{3}h[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] - \varrho\,\tfrac{5}{288}(b-a)Mh^4.$$

Der letzte Ausdruck liefert die Grenzen des begangenen Fehlers; man bemerkt leicht, dass der Genauigkeitsgrad bei der Simpson'schen Regel nicht höher ist als bei der Formel 9).

Die Formeln zur näherungsweisen Quadratur enthalten zugleich die Mittel zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale, weil nach §. 64 die Fläche $ABDC = U$ durch das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ausgedrückt wird.

§. 83.

Rectification ebener Curven in Parallelcoordinaten.

Bereits im §. 20 wurde gezeigt, dass ein Curvenbogen PP_1 um so eher mit der gleichnamigen Sehne verwechselt werden darf, je näher die Punkte P und P_1 an einander liegen, und dass folglich, wenn $arc\,CP = s$ gesetzt wird, bei rechtwinkligen Coordinaten

1) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist; nach demselben Principe erhält man bei einem schiefwinkligen Systeme, dessen Coordinatenwinkel γ heissen möge,

2) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\gamma}.$$

Gewöhnlich betrachtet man x als unabhängige, y als abhängige Variabele und schreibt demgemäss

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad dy = y'\,dx;$$

die Formel 2) wird dann

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\gamma}\,dx,$$

und daraus folgt durch Integration

3) $$s = \int\sqrt{1 + y'^2 + 2y'\cos\gamma}\,dx.$$

Die willkührliche Constante bestimmt sich dadurch, dass man festsetzt, von welchem Anfangspunkte C aus der Bogen s gerechnet werden soll; es muss nämlich $s = 0$ werden, wenn für x die Abscisse des Punktes C genommen wird.

a. Die Parabel. In Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang der Scheitel und dessen x-Achse die Scheiteltangente ist, lautet die Gleichung der Parabel

$$y = \frac{x^2}{2p}, \text{ mithin } y' = \frac{x}{p},$$

und nach Formel 3)

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} dx = \frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + x^2}\, dx$$

oder bei Ausführung der Integration

$$s = \frac{1}{p} \left\{ \tfrac{1}{2} x \sqrt{p^2 + x^2} + \tfrac{1}{2} p^2 l(x + \sqrt{p^2 + x^2}) + Const. \right\}.$$

Wenn der Bogen im Scheitel anfangen soll, so muss $s = 0$ werden für $x = 0$; dies giebt

$$0 = \frac{1}{p} \left\{ \tfrac{1}{2} p^2 l(p) + Const. \right\}$$

und durch Elimination der Constante

4) $$s = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{x \sqrt{p^2 + x^2}}{p} + p\, l\left(\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p} \right) \right\}.$$

b. Die Ellipse. Unter Benutzung des gewöhnlichen Coordinatensystems hat man

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = - \frac{bx}{a \sqrt{a^2 - x^2}},$$

und wenn zur Abkürzung die numerische Excentricität

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$$

gesetzt wird, so findet sich leicht

5) $$s = \int \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

In geschlossener Form lässt sich diese Integration nicht ausführen, und daher muss man s durch eine unendliche Reihe darstellen. Benutzt man zur Vereinfachung die Substitution $x = a\xi$, so wird

$$s = a \int \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi,$$

und hier lassen sich alle die Transformationen anwenden, welche in §. 74, b. gezeigt wurden. So ist nach Formel 6)

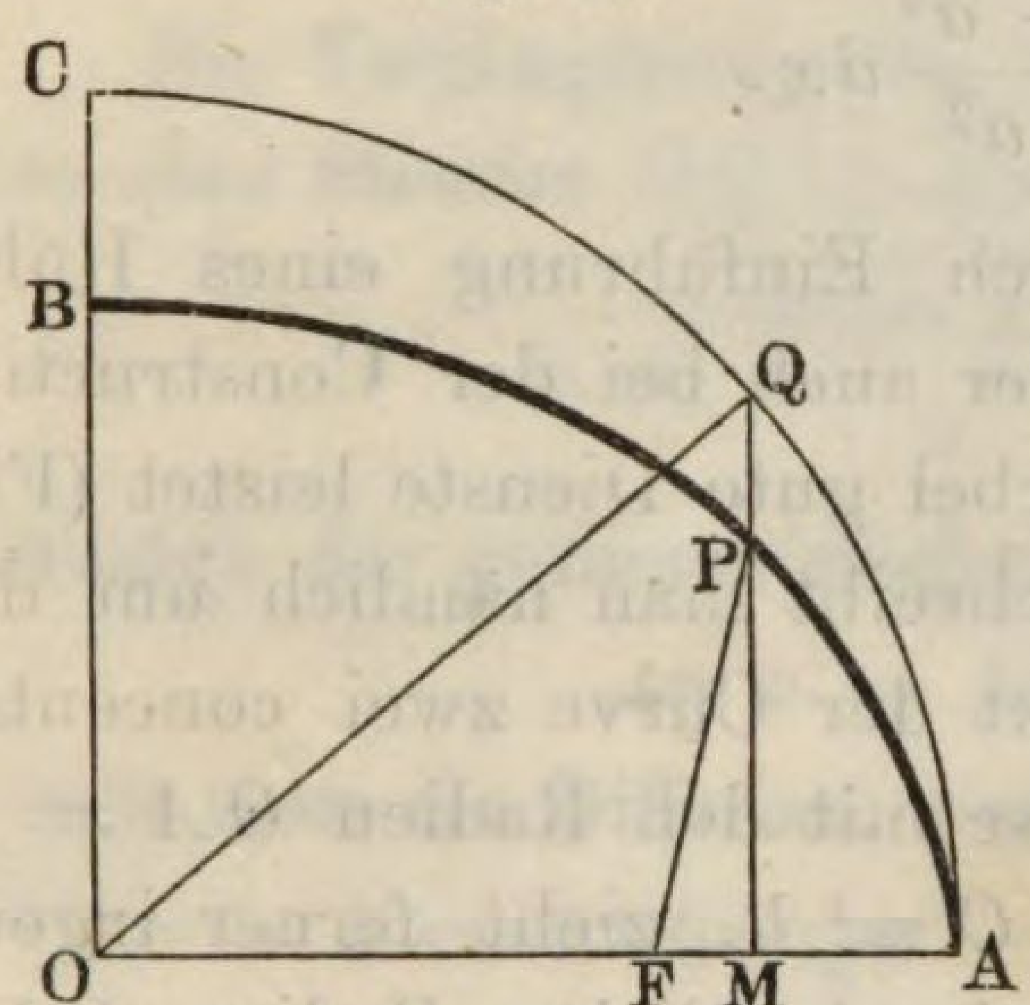
$$\frac{s}{a} = Const. + U_0 - \frac{U_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{U_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1.3}{2.4}\frac{U_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots,$$

$$U_0 = arcsin\,\xi, \quad U_m = \frac{(m-1)\,U_{m-2} - \xi^{m-1}\sqrt{1-\xi^2}}{m}$$

oder vermöge des Werthes von ξ

$$U_0 = arcsin\frac{x}{a}, \quad U_m = \frac{m-1}{m}U_{m-2} - \frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m\,a^{m+1}}.$$

Fig. 53.



Versteht man unter s den vom Endpunkte der kleinen Halbachse an gerechneten Bogen BP (Fig. 53), so müssen x und s gleichzeitig verschwinden; nun ist für $x = 0$

$$U_0 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_4 = 0, \ldots.$$

mithin $Const. = 0$, daher

$$6) \quad s = a\left[U_0 - \frac{U_2}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\frac{U_4}{4}\varepsilon^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{U_6}{6}\varepsilon^6 - \cdots\right].$$

Zur praktischen Berechnung werden die Formeln für U_2, U_4 etc. bequemer, wenn man den Winkel $COQ = \varphi$, die sogenannte Amplitude, einführt; es ist dann $x = a\,sin\,\varphi$, $\xi = sin\,\varphi$, mithin

$$7) \begin{cases} sin\,\varphi = \dfrac{x}{a}, \quad s = a\displaystyle\int\sqrt{1-\varepsilon^2 sin^2\varphi}\,d\varphi, \\ U_0 = \varphi, \quad U_m = \dfrac{(m-1)\,U_{m-2} - sin^{m-1}\varphi\,cos\,\varphi}{m}. \end{cases}$$

Für $x = a$, $\xi = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Länge des Ellipsenquadranten, welche E heissen möge. Die Werthe von U_0, U_2, U_4 etc. gestalten sich dann sehr einfach, nämlich

$$U_0 = \frac{\pi}{2}, \quad U_2 = \frac{1}{2}U_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

$$U_4 = \frac{3}{4}U_2 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{\pi}{2}, \quad U_6 = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{\pi}{2} \text{ u. s. w.}$$

folglich ist nach Nro. 6)

$$8) \quad E = \tfrac{1}{2}\pi a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right\}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die übrigen in §. 74, b. entwickelten Formeln benutzen, um Reihen für s oder E zu gewinnen.

c. Die Hyperbel. Geht man von den Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

aus und setzt

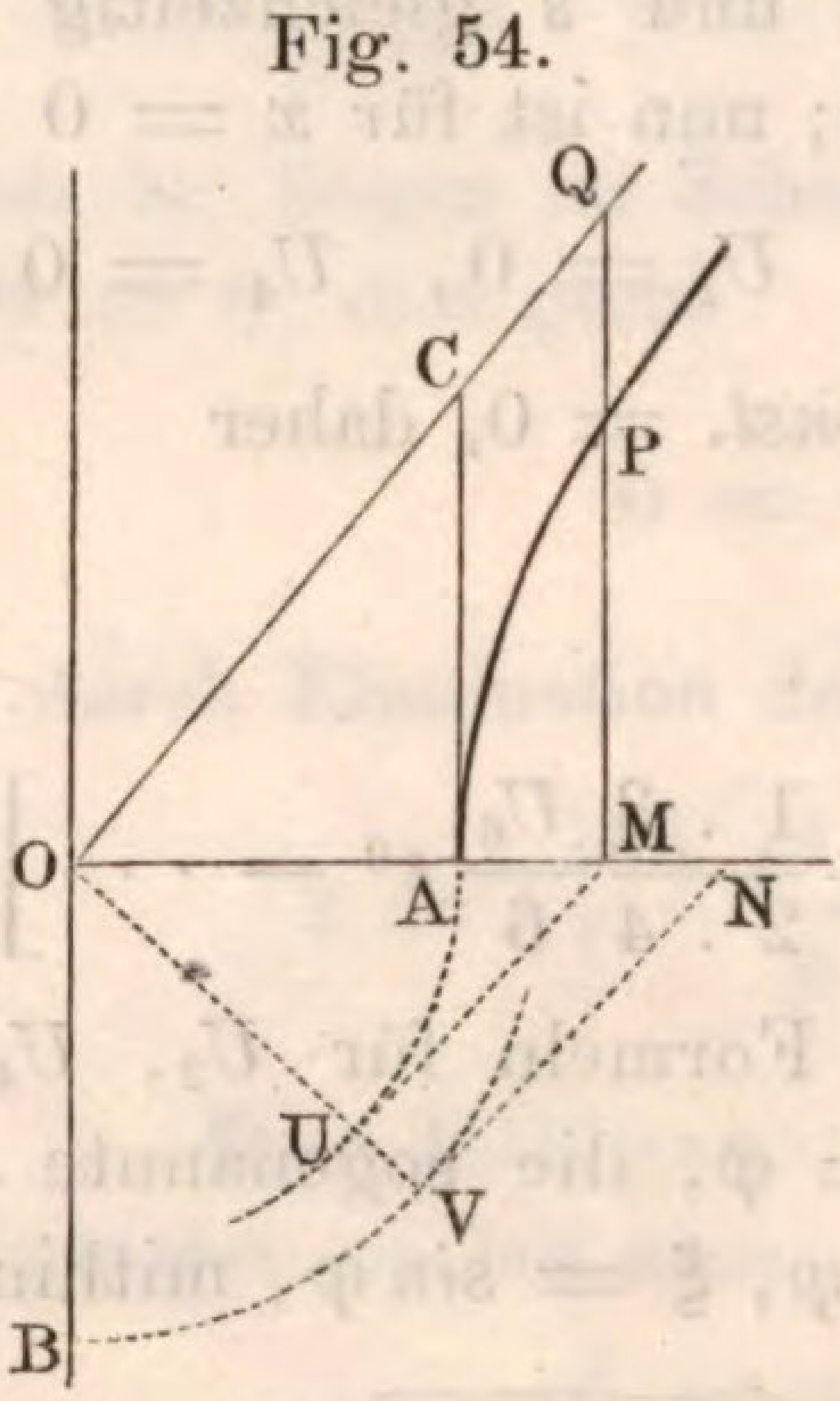
$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \varepsilon,$$

so erhält man

$$s = \int \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx.$$

Diese Gleichung transformiren wir durch Einführung eines Hülfswinkels, der auch bei der Construction der Hyperbel gute Dienste leistet (Fig. 54). Beschreibt man nämlich um den Mittelpunkt der Curve zwei concentrische Kreise mit den Radien $OA = a$, $OB = AC = b$, zieht ferner irgend einen gemeinschaftlichen Radius OUV unter dem Winkel $AOU = \psi$ und legt ferner in U und V an jene Kreise die Tangenten UM, VN, so ist $OM = x = a \sec\psi$, und die Gleichung der Hyperbel giebt $y = b \tan\psi$, d. h. $MP = NV$; ferner wird

Fig. 54.



$$s = a\int \sqrt{\varepsilon^2 - \cos^2\psi}\, \sec^2\psi\, d\psi = a\varepsilon \int \frac{d\psi}{\cos^2\psi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\psi}{\varepsilon^2}}.$$

Wegen $\varepsilon > 1$ ist der Quotient $\frac{\cos\psi}{\varepsilon} < 1$ und daher kann folgende Reihenentwickelung vorgenommen werden:

$$s = a\varepsilon \int \frac{d\psi}{\cos^2\psi}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\psi}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\,.\,4}\frac{\cos^4\psi}{\varepsilon^4} - \cdots\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$V_m = \int \cos^m\psi\, d\psi,$$

so wird durch Integration der einzelnen Glieder

$$s = a\left\{Const + \varepsilon \tan\psi - \frac{V_0}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{V_2}{4\varepsilon^3} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{V_4}{6\varepsilon^5} - \cdots\right\}$$

·nd zwar geschieht die Berechnung der Integrale V_0, V_2, V_4 etc. ·h folgenden Formeln:

9) $$V_0 = \psi, \quad V_m = \frac{\sin\psi\cos^{m-1}\psi + (m-1)V_{m-2}}{m},$$

wie man mittelst der fünften Gleichung in §. 77, Nro. 3) leicht findet. Rechnen wir den Bogen s vom Scheitel der Hyperbel aus, so wird $s = 0$ für $x = a$, d. h. für $\psi = 0$; in diesem Falle verschwinden alle V und es wird $Const. = 0$, mithin

10) $$s = a\left\{\varepsilon\tan\psi - \frac{V_0}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}\,\frac{V_2}{4\varepsilon^3} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{V_4}{6\varepsilon^5} - \dots\right\}.$$

Die Verlängerung der Ordinate MP schneidet von der Asymptote eine Strecke $OQ = z$ ab, deren Grösse ist

$$z = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x = \varepsilon x = a\varepsilon\sec\psi;$$

vermöge der goniometrischen Formel

$$\sec\psi - \tan\psi = \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\psi)$$

erhält man als Differenz zwischen OQ und $arc\,AP$

$$z - s = a\varepsilon\tan(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\psi)$$
$$+ \frac{a}{2\varepsilon}\left\{V_0 + \frac{1}{2}\,\frac{V_2}{2\varepsilon^2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{V_4}{3\varepsilon^4} + \dots\right\}.$$

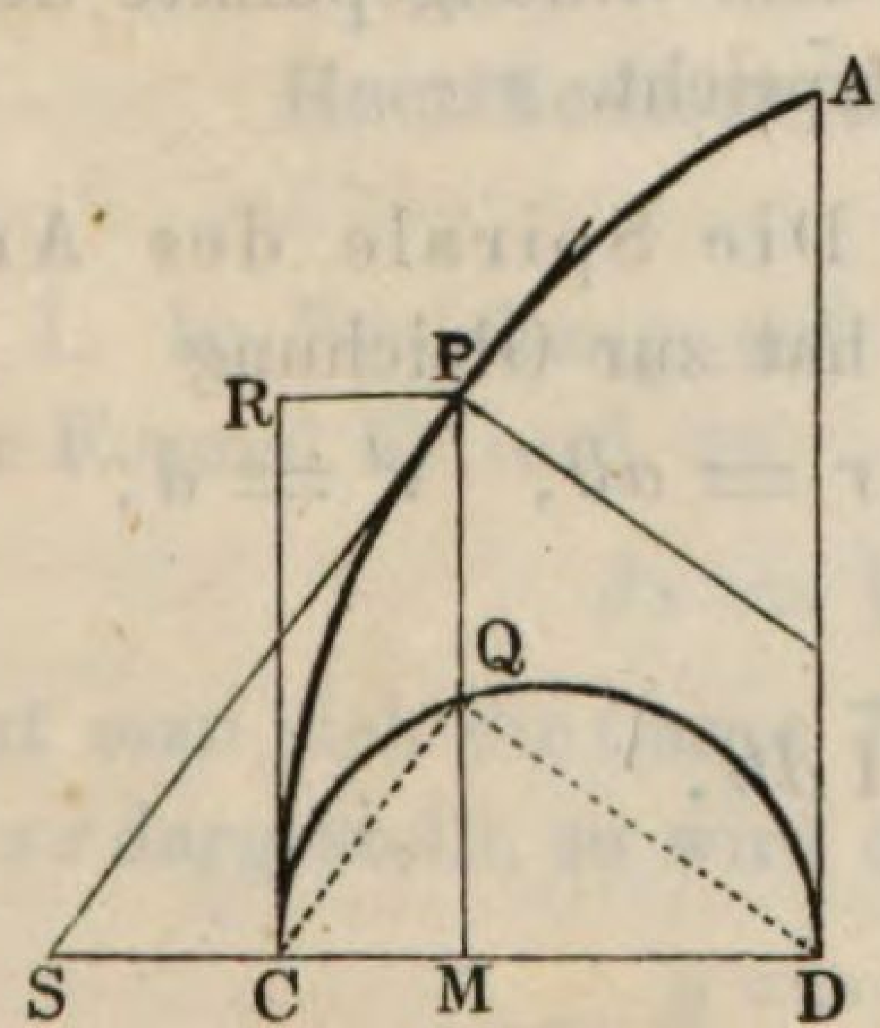
Bei unendlich wachsenden x convergirt ψ gegen die Grenze $\frac{1}{2}\pi$, zugleich wird

$$V_0 = \frac{\pi}{2}, \quad V_2 = \frac{1}{2}V_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}, \quad V_4 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

mithin

11) $$Lim(z-s) = \frac{\pi a}{4\varepsilon}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2\varepsilon^2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{1}{3\varepsilon^4} + \dots\right\}.$$

Fig. 55.



Kurz ausgedrückt, ist demnach der Unterschied zwischen der ganzen Asymptote und der ganzen Hyperbel eine Linie von endlicher Grösse.

d. Die Cycloide. Wie in §. 21 sei der Scheitel C der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten (Fig. 55); es ist dann

$$y' = \sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

$$s = \int\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx = 2\sqrt{2ax} + Const.$$

Rechnet man auch den Bogen s vom Scheitel aus, so müssen s und x gleichzeitig verschwinden; dies giebt $Const = 0$ und

12) $$s = 2\sqrt{2ax},$$

was sehr leicht zu construiren ist. Für $x = 2a$ folgt, dass die obere Hälfte der Cycloide dem vierfachen Halbmesser, also die ganze Cycloide dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises an Länge gleichkommt.

§. 84.

Rectification ebener Curven in Polarcoordinaten.

Nach Formel 7) in §. 23 wird das Bogendifferential einer auf Polarcoordinaten r und θ bezogenen Curve durch die Formel

1) $$ds = \sqrt{(r\,d\theta)^2 + dr^2}$$

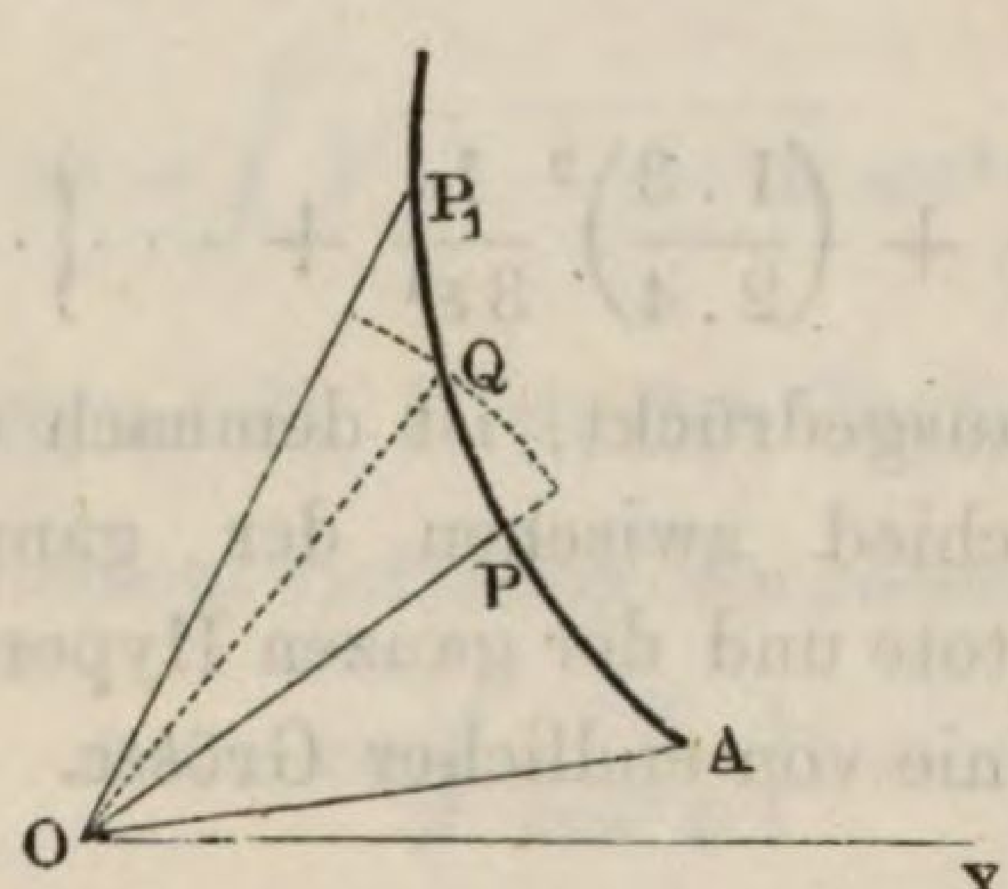
ausgedrückt, welche in dem Falle, wo θ die unabhängige Variabele ist, zur folgenden wird

2) $$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta.$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus

3) $$s = \int \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta;$$

Fig. 56.



die willkührliche Constante des Integrales wird hier durch die Bedingung bestimmt, dass $s = 0$ werden muss, wenn θ denjenigen speciellen Werth ($\angle AOX$ in Fig. 56) erhält, welcher dem Anfangspunkte des Bogens entspricht.

a. Die Spirale des Archimedes hat zur Gleichung

4) $$r = a\theta, \quad r' = a,$$

mithin ist

$$s = a\int \sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta,$$

oder

5) $$s = \tfrac{1}{2}a\left\{\theta\sqrt{1+\theta^2} + l\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right)\right\},$$

wobei es keiner Constanten bedarf, wenn θ, r und s gleichzeitig verschwinden sollen.

b. Die Cardioide wird durch folgende, geometrisch leicht zu construirende Gleichung ausgedrückt

6) $$r = b(1 + \cos\theta), \qquad r' = -b\sin\theta;$$

es ist daher

$$s = b\int\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta = 2b\int\cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

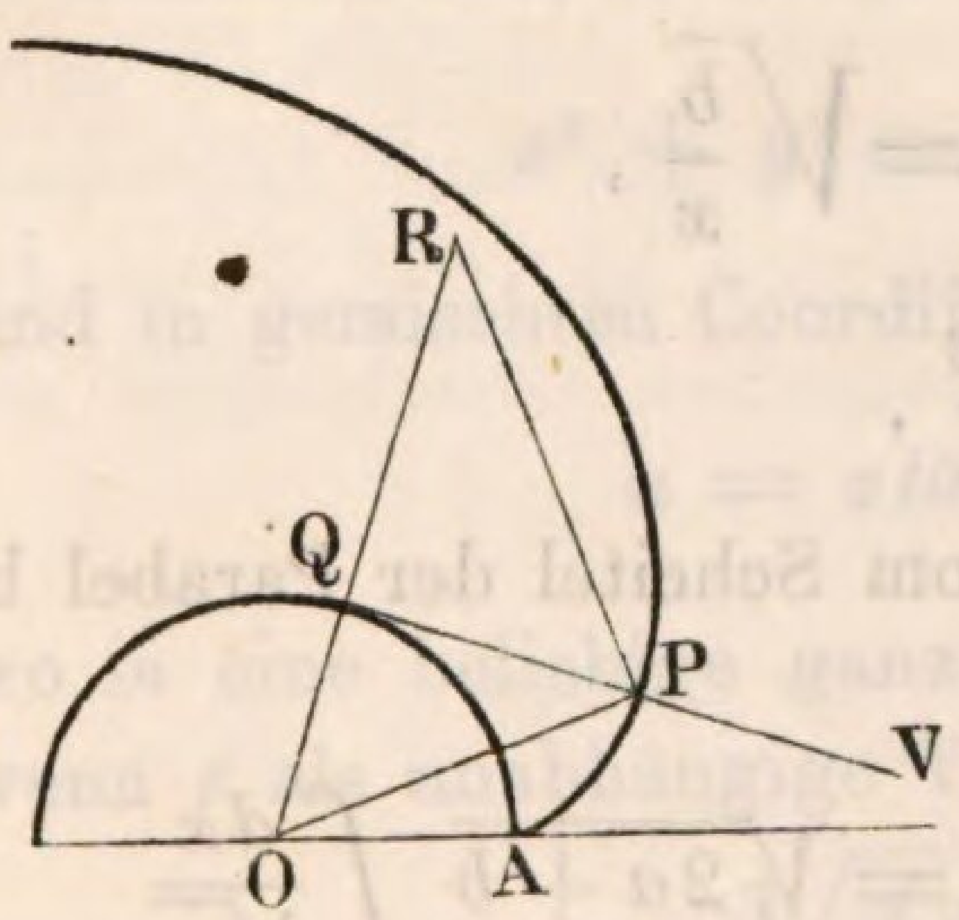
oder

7) $$s = 4b\sin\tfrac{1}{2}\theta;$$

eine Constante ist nicht hinzuzufügen, wenn $s = 0$ werden soll für $\theta = 0$. Für $\theta = \pi$ ergiebt sich die Länge der halben Cardioide $= 4b$, mithin die Länge der ganzen Curve $= 8b$.

c. Die Kreisevolvente hat nach §. 24, VII. zwei Gleichungen, aus denen folgt

Fig. 57.



$$dr = \frac{a\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}\,d\omega,$$

$$r\,d\theta = \frac{a\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}}\,d\omega,$$

$$ds = a\omega\,d\omega;$$

lässt man den Bogen s im Punkte A anfangen, so wird

8) $$s = \tfrac{1}{2}a\omega^2,$$

d. h. $arc\,AP = \frac{1}{2}QR$ in Fig. 57.

§. 85.

Rectification doppelt gekrümmter Linien.

I. In Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist nach Formel 5) in §. 25

1) $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

denkt man sich die Curve durch ihre Projectionen auf die Ebenen xy und xz dargestellt, so wird sie durch zwei Gleichungen von den Formen

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x)$$

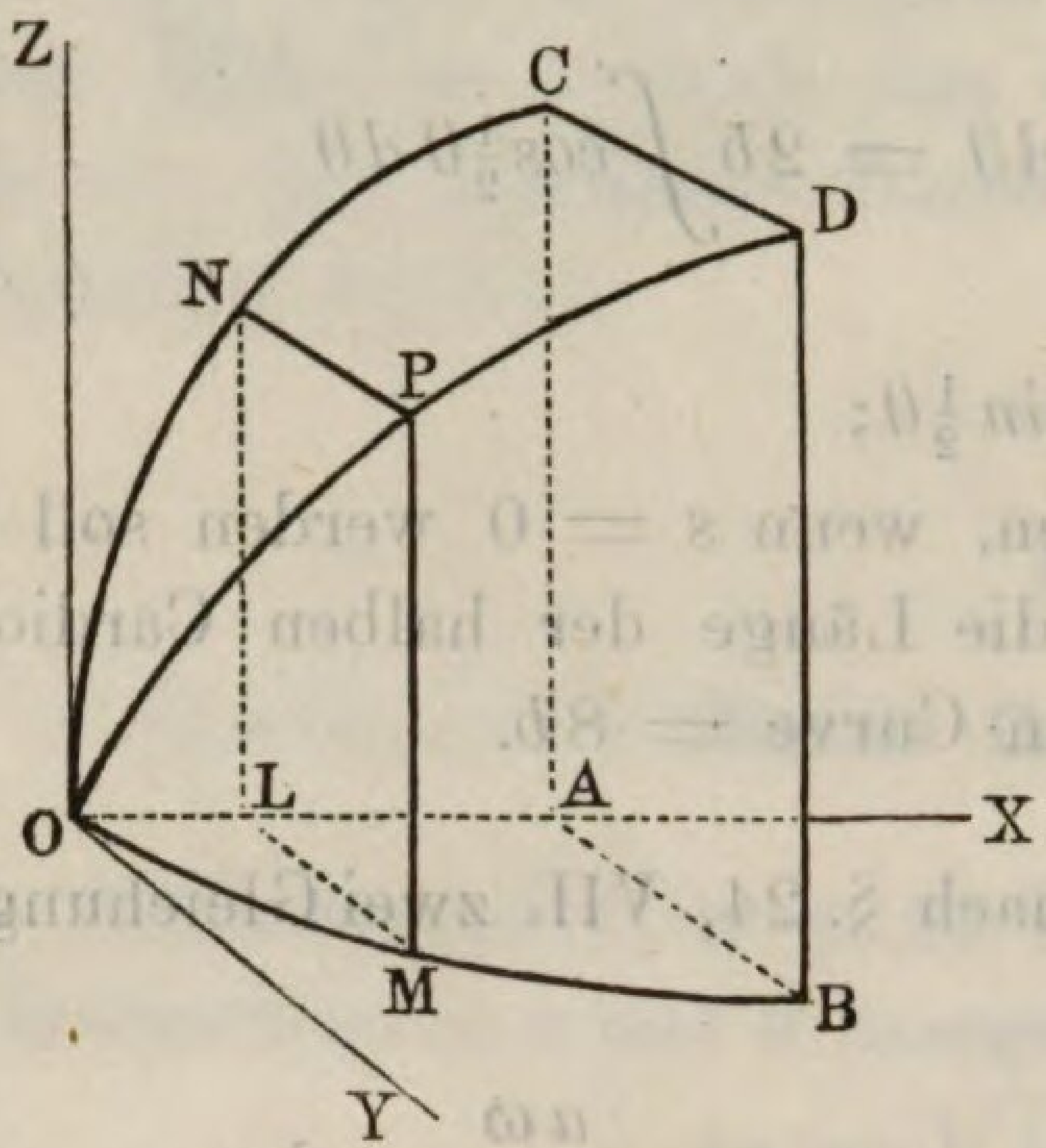
ausgedrückt, worin x die unabhängige Variabele ist, und dann geht die Gleichung 1) über in

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx.$$

Hieraus folgt augenblicklich

2) $$s = \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx;$$

Fig. 58.



die Integrationsconstante bestimmt sich durch die Bedingung, dass $s = 0$ werden muss, wenn für x die Abscisse des Bogenanfanges gesetzt wird.

Beispielsweis betrachten wir den Durchschnitt eines vertical stehenden parabolischen und eines senkrecht dagegen liegenden cycloidischen Cylinders (Fig. 58). Für $OL = x$, $LM = y$, $LN = MP = z$ ist nämlich

$$y = 2\sqrt{bx}, \qquad y' = \sqrt{\frac{b}{x}},$$

$$z' = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

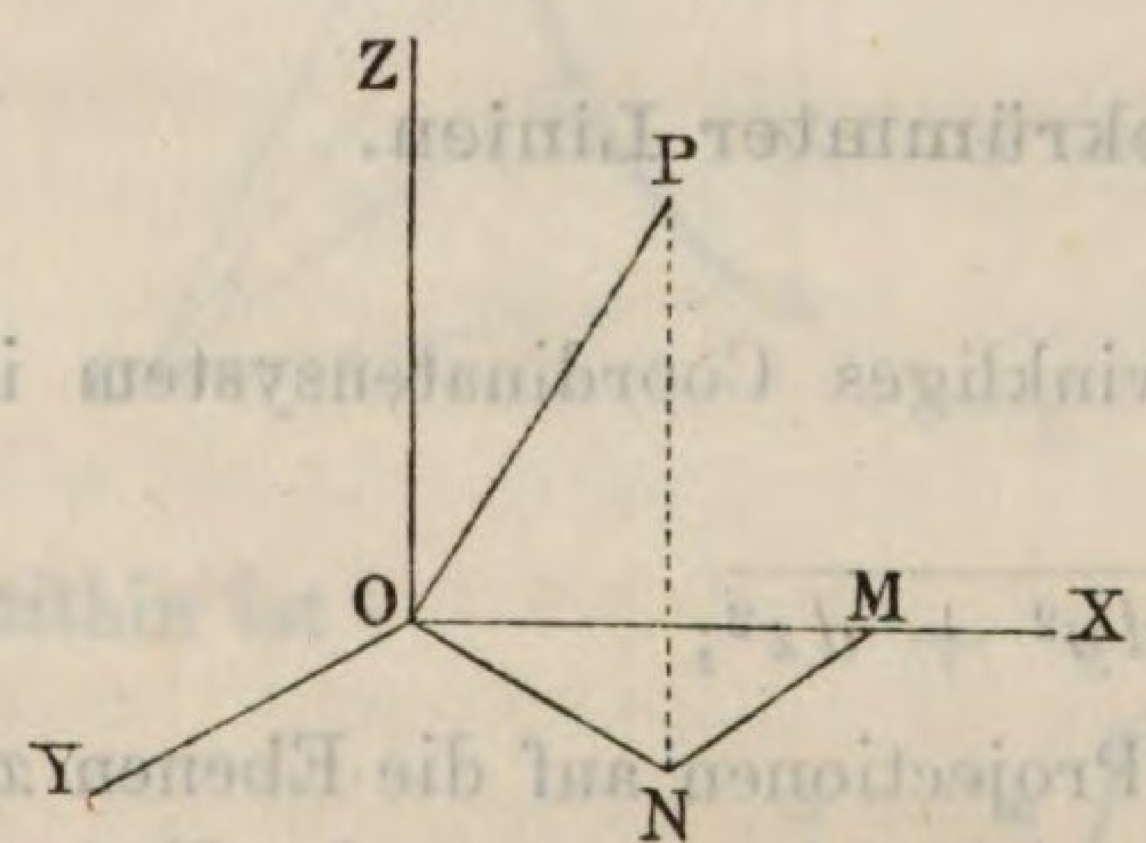
wobei b den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel der Parabel bezeichnet; daraus folgt

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{2a - x}{x}}\, dx = \sqrt{2a + b} \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

oder

$$s = 2\sqrt{(2a + b)x},$$

Fig. 59.



und hier ist keine Constante hinzuzufügen, wenn unter s der Bogen OP verstanden wird. Die geometrische Bedeutung des Werthes von s erkennt man leicht.

II. Nicht selten ist der Gebrauch eines gemischten Coordinatensystemes vortheilhaft, welches dadurch entsteht, dass man zwei der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in Polarcoordinaten umsetzt und die dritte Coordinate ungeändert lässt. Denken wir uns (Fig. 59) den Radiusvector OP auf die xy-Ebene projicirt und bezeichnen diese Projection ON mit u und den Winkel NOX mit χ, so haben wir

3) $$x = u\cos\chi, \quad y = u\sin\chi,$$
$$dx^2 + dy^2 = (u\,d\chi)^2 + du^2,$$

während z ungestört bleibt; die Formel 1) wird dann zur folgenden

4) $$ds = \sqrt{(u\,d\chi)^2 + du^2 + dz^2}.$$

Substituirt man die unter Nro. 3) angegebenen Werthe von x und y auch in die Gleichungen der Curve, so erhält man zwei neue Gleichungen zwischen u, χ, z; eine dieser neuen Coordinaten wählt man zur unabhängigen Variabelen und drückt die anderen durch diese aus, so dass die Formel 4) rechter Hand nur eine Variabele enthält und nachher integrirt werden kann.

Als Beispiel diene der Durchschnitt eines Rotationskegels mit einer Schraubenfläche, wobei vorausgesetzt wird, dass die Achsen beider Flächen mit der z-Achse zusammenfallen. Nennen wir γ den Winkel zwischen der Kegelseite und z-Achse, c den Parameter der Schraubenfläche, so haben wir in rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2 + y^2 = z^2\tan^2\gamma, \qquad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}$$

und in gemischten Coordinaten

$$u = z\tan\gamma, \qquad \chi = \frac{z}{c} \pm m\pi,$$

wo m eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Hieraus folgt, wenn z als unabhängige Variabele betrachtet wird,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{z\tan\gamma}{c}\right)^2 + \tan^2\gamma + 1}\,.\,dz$$

oder kürzer

$$ds = \frac{\tan\gamma}{c}\sqrt{z^2 + k^2}\,dz, \qquad k = \frac{c}{\sin\gamma},$$

und durch Integration, indem man festsetzt, dass s und z gleichzeitig verschwinden sollen,

$$s = \frac{\tan\gamma}{2c}\left\{\frac{z\sqrt{k^2+z^2}}{k} + k\,l\left(\frac{z + \sqrt{k^2+z^2}}{k}\right)\right\}.$$

Wie man aus §. 83, Formel 4) sieht, lässt sich s mit dem Bogen einer gewissen Parabel vergleichen.

III. Um endlich eine Formel zu gewinnen, worin die gewöhnlichen Raumpolarcoordinaten vorkommen, setzen wir den Radiusvector $OP = r$ und bezeichnen mit τ seinen Neigungswinkel gegen die xy-Ebene ($\angle PON = \tau$); wir haben dann

$$u = r\cos\tau, \qquad z = r\sin\tau$$
$$du^2 + dz^2 = (r\,d\tau)^2 + dr^2$$

mithin statt Nro. 4)

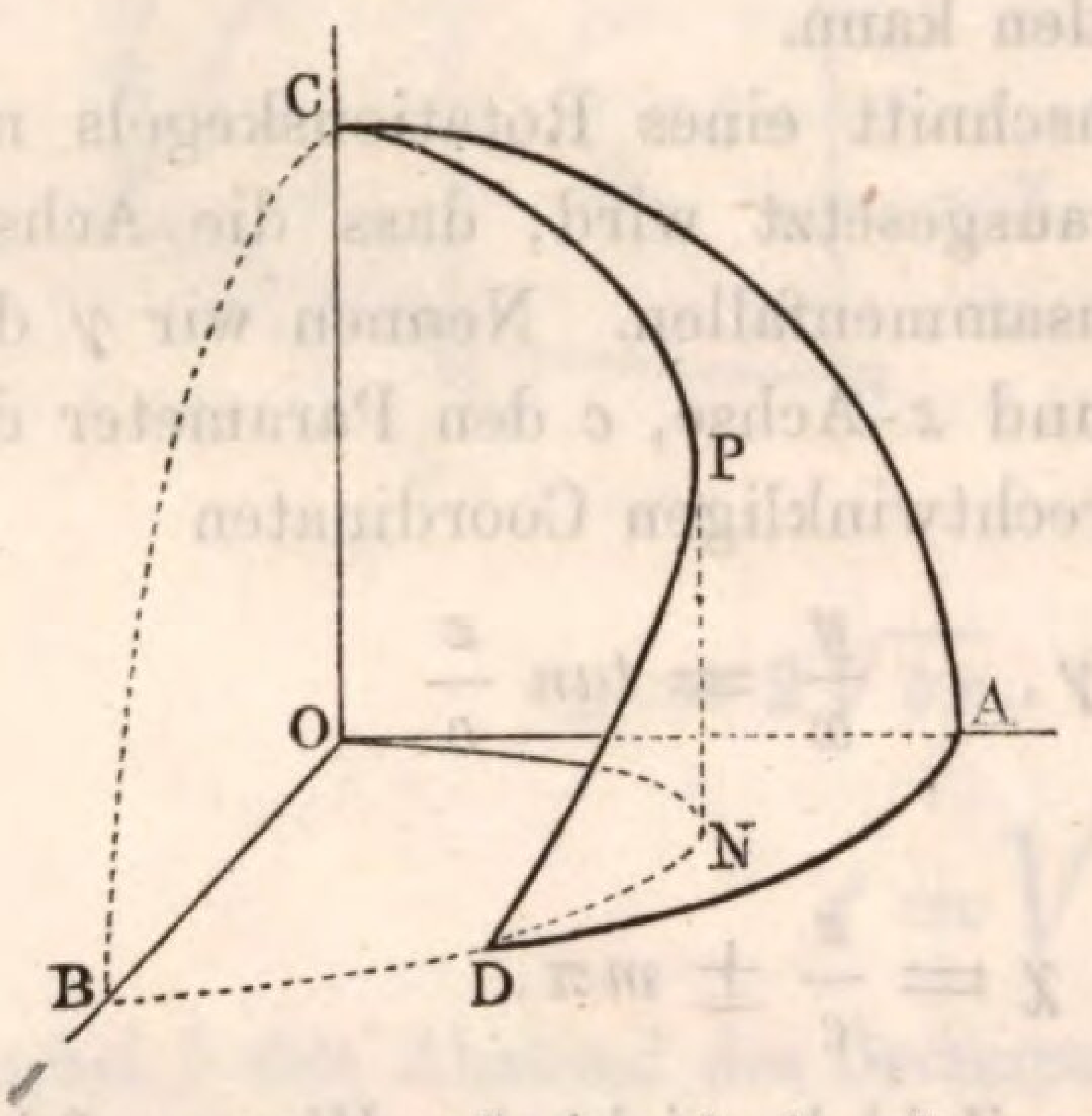
5) $$ds = \sqrt{(r\cos\tau\, d\chi)^2 + (r\, d\tau)^2 + dr^2},$$

wie sich auch direct aus der Bemerkung ergiebt, dass ds als die Diagonale eines Parallelepipedes gelten kann, dessen Kanten $r\cos\tau\, d\chi$, $r\, d\tau$ und dr sind. Zum Uebergange von x, y, z zu r, χ, τ dienen die Formeln

6) $$x = r\cos\tau\cos\chi,\quad y = r\cos\tau\sin\chi,\quad z = r\sin\tau;$$

aus den Gleichungen der Curve in rechtwinkligen Coordinaten erhält man mittelst derselben zwei Gleichungen zwischen r, τ, χ, wobei man eine der letzteren Grössen als unabhängige Variabele betrachtet.

Fig. 60.



Als Beispiel nehmen wir den Durchschnitt einer Kugel mit einem vertical stehenden Cylinder, dessen Directrix eine Archimedische Spirale ist (Fig. 60). Die ursprünglichen Gleichungen mögen sein

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\qquad u = b\chi;$$

in räumlichen Polarcoordinaten ist dann

$$r = a,\qquad a\cos\tau = b\chi,$$

folglich, wenn τ als unabhängige Variabele angesehen wird,

$$ds = a\sqrt{\left(\frac{a\cos\tau\sin\tau}{b}\right)^2 + 1}\,.\,d\tau$$

und

$$s = a\int\sqrt{\left(\frac{a\sin 2\tau}{2b}\right)^2 + 1}\,.\,d\tau.$$

Rechnet man den Bogen vom letzten Curvenpunkte D aus, so muss die Integrationsconstante so bestimmt werden, dass $s = 0$ wird für $\tau = 0$. Das Integral ist übrigens leicht in eine Reihe zu verwandeln; mittelst der Substitution $\tau = \frac{1}{2}\omega$ erhält man nämlich

$$s = \frac{1}{2}a\int\sqrt{\left(\frac{a\sin\omega}{2b}\right)^2 + 1}\, d\omega = \frac{a^2}{4b\lambda}\int\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\omega}\, d\omega,$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} = \lambda$$

gesetzt wurde. Da $\lambda \cos\omega$ immer ein echter Bruch ist, so lässt sich die unter dem Integralzeichen vorkommende Wurzel mittelst des binomischen Satzes entwickeln; indem man die Bezeichnung

$$\Omega_n = \int \cos^n\omega\, d\omega$$

einführt, erhält man

$$s = \frac{a^2}{4b\lambda}\left\{\Omega_0 - \frac{\lambda^2}{2}\Omega_2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^4}{4}\Omega_4 - \frac{1.3}{2.4}\frac{\lambda^6}{6}\Omega_6 - \dots\right\},$$

$$\Omega_0 = \omega, \quad \Omega_n = \frac{(n-1)\Omega_{n-2} + \sin\omega \cos^{n-1}\omega}{n}.$$

Für $\tau = \frac{1}{2}\pi$ mithin $\omega = \pi$ findet man die Länge des ganzen Durchschnittes DC, und zwar ist sie einerlei mit der Länge des Ellipsenquadranten, welcher aus den Halbachsen

$$\frac{a\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b} \text{ und } a$$

construirt werden kann.

§. 86.

Die Cubatur begrenzter Volumina.

Bereits in §. 1 (S. 22) wurde gezeigt, dass der Differentialquotient eines Volumens, welches sich längs der x-Achse erstreckt, in Beziehung auf x genommen, der letzte Querschnitt desselben ist; bezeichnen wir demnach mit V ein derartiges Volumen und mit U den Querschnitt, welcher am Ende des x senkrecht zur x-Achse liegt und hier das Volumen begrenzt, so haben wir die Gleichungen

$$\frac{dV}{dx} = U, \quad dV = U\,dx,$$

und hieraus folgt

1) $$V = \int U\,dx.$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich dadurch, dass man festsetzt, von welchem auf der x-Achse senkrechten Schnitte an das Volumen gerechnet werden soll; es muss nämlich V sich annulliren, wenn für x die Abscisse des Anfangsquerschnittes genommen wird. Als Beispiele mögen die Flächen zweiten Grades dienen.

a. Das **Ellipsoid** hat bekanntlich die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1;$$

der Querschnitt am Ende von x, senkrecht zur x-Achse gelegt, ist hier eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, daher

$$U = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Nach Nro. 1) findet sich

2) $$V = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3),$$

wobei es keiner Constante bedarf, wenn das Volumen von der yz-Ebene an gerechnet wird, d. h. für $x = 0$ verschwindet. Die Formel 2) giebt dann das Volumen einer Zone, welche in der Richtung der x die Dicke x besitzt. Für $x = a$ wird daraus das halbe Ellipsoid $= \frac{2}{3}\pi abc$; das Volumen des ganzen Ellipsoides ist demnach $= \frac{4}{3}\pi abc$, d. h. gleich dem Volumen einer Kugel, welche das geometrische Mittel aus den Halbachsen a, b, c zum Radius hat.

b. Das einfache Hyperboloid drücken wir durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

aus und suchen das Volumen der Zone von der Höhe z. Der Horizontalquerschnitt am Ende des z ist eine Ellipse aus den Halbachsen $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z^2}$ und $\frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z^2}$, daher

$$U = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 + z^2)$$

und nach Formel 1), wenn x durch z ersetzt wird,

3) $$V = \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 z + \tfrac{1}{3}z^3).$$

Für $z = c$ ergiebt sich, dass die Zone von der Höhe c das Volumen $\frac{4}{3}\pi abc$ besitzt. Construirt man überhaupt aus den drei Halbachsen a, b, c einen elliptischen Kegel K, einen elliptischen Cylinder C, ein Halbellipsoid E und die vorhin erwähnte hyperboloidische Zone H, so gilt für die Volumina dieser Körper die Proportion

$$K : C : E : H = 1 : 2 : 3 : 4;$$

der bekannte Satz des Archimedes repräsentirt hiervon den speciellen Fall $a = b = c$ mit Weglassung von H.

c. Das getheilte Hyperboloid hat zur Gleichung

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

und sein Horizontalquerschnitt in der Höhe $z > c$ ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{c}\sqrt{z^2 - c^2}$ und $\frac{b}{c}\sqrt{z^2 - c^2}$, daher

$$U = \pi \frac{ab}{c^2}(z^2 - c^2),$$

und nach Formel 1), wenn z für x geschrieben wird,

$$V = \pi \frac{ab}{c^2}(\tfrac{1}{3}z^3 - c^2 z + Const.).$$

Rechnen wir das Volumen vom Scheitel der Fläche aus, so muss $V = 0$ werden für $z = c$; daraus folgt $Const. = \frac{2}{3}c^3$,

4) $$V = \pi \frac{ab}{c^2}(\tfrac{1}{3}z^3 - c^2 z + \tfrac{2}{3}c^3),$$

und nun bedeutet V das Volumen einer Kappe von der Höhe $z - c$. Für $z = 2c$ ergiebt sich, dass die Kappe von der Höhe c das Volumen $\frac{4}{3}\pi abc$ besitzt.

d. Das elliptische Paraboloid hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z;$$

sein Horizontalquerschnitt in der Höhe z ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{2az}$ und $\sqrt{2bz}$, daher $U = 2\pi\sqrt{ab}\,.\,z$ und

5) $$V = \pi\sqrt{ab}\,.\,z^2 = \tfrac{1}{2}Uz,$$

wobei es keiner Constante bedarf, wenn unter V das Volumen einer Kappe von der Höhe z verstanden wird. Dieses Volumen kommt der Hälfte des umschriebenen elliptischen Cylinders gleich; hierin liegt das stereometrische Seitenstück zu der von Archimedes gegebenen Quadratur der Parabel.

e. Das hyperbolische Paraboloid mag durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisirt werden; sein Querschnitt, in der Entfernung x senkrecht zur x-Achse gelegt, ist eine Parabel, von welcher die xy-Ebene ein begrenztes Stück abschneidet. Betrachten wir nur das über der xy-Ebene liegende Volumen, so ist U jenes Stück und

$$U = 2\,.\,\frac{2}{3}\,\frac{x^2}{2a}\cdot x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

mithin

6) $$V = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{a}}\,x^4 = \frac{1}{4}\,Ux.$$

Das oberhalb der xy-Ebene vom Scheitel bis zum Querschnitte U reichende Volumen beträgt hiernach ein Viertheil des umschriebenen parabolischen Cylinders.

Sehr einfach gestaltet sich die Formel 1) in dem Falle, wo die Begrenzungsfläche des Volumens durch Umdrehung einer ebenen Curve um die x-Achse entstanden ist. Der Querschnitt U bildet dann einen Kreis, der die Ordinate der Curve zum Radius hat, und wenn wir diese zur Abscisse x gehörende Ordinate wie gewöhnlich mit y bezeichnen, so haben wir $U = \pi y^2$ und

$$7) \qquad V = \pi \int y^2\, dx.$$

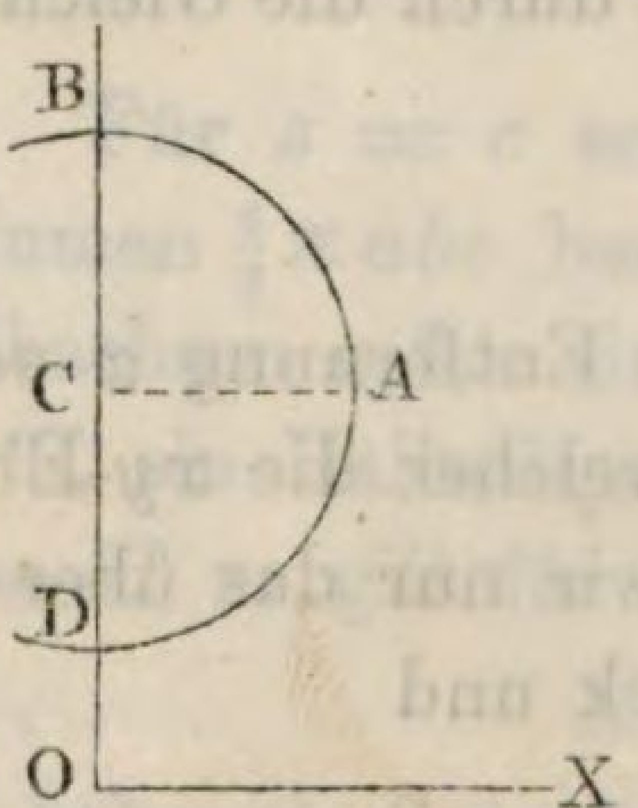
Im Fall der Abscisse x zwei Ordinaten y_1 und $y_2 > y_1$ entsprechen, welche entweder zu derselben Curve oder zu zwei verschiedenen Curven gehören können, so beschreibt bei der Umdrehung die Strecke $y_2 - y_1$ einen Kreisring, dessen Inhalt $U = \pi(y_2^2 - y_1^2)$ ist; das Volumen des ringförmigen Rotationskörpers bestimmt sich dann durch die Formel

$$8) \qquad V = \pi \int (y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

Als Beispiel diene die Cubatur des Körpers, welcher entsteht, wenn ein mit dem Radius a beschriebener Kreis um eine Gerade gedreht wird, deren Entfernung vom Kreismittelpunkte $= c$ ist. Nehmen wir die Drehungsachse zur x-Achse und lassen die y-Achse durch den Kreismittelpunkt gehen, so haben wir als Gleichung der rotirenden Curve

$$y = c \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Fig. 61.



Dabei sind die Fälle zu unterscheiden, ob die Drehungsachse ganz ausserhalb des Kreises liegt oder ihn schneidet, d. h. ob $c > a$ oder $c < a$ ist. Im ersten Falle (Fig. 61) sind alle Querschnitte Kreisringe mit den Halbmessern

$$y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin ist nach Formel 8)

$$V = 4\pi \frac{c}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

oder

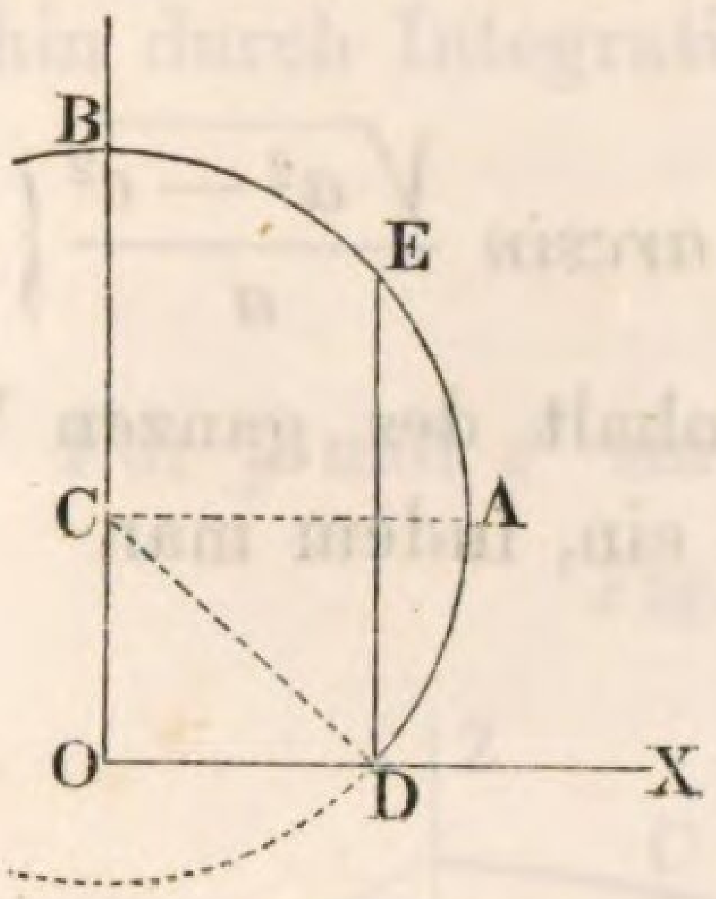
$$V = 2\pi \frac{c}{a} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

Einer Constanten bedarf es nicht, wenn man das Volumen von

$x = 0$ ab rechnet. Für $x = a$ ergiebt sich der Inhalt des halben Ringes $= \pi^2 a^2 c$, mithin als Inhalt des ganzen Ringes

9) $$R = 2\pi^2 a^2 c.$$

Fig. 62.



Im zweiten Falle, den Fig. 62 zeigt, sind die Querschnitte theils Vollkreise theils Kreisringe, je nachdem x weniger oder mehr als OD beträgt; der ganze Rotationskörper besteht daher aus zwei Theilen, welche einzeln zu berechnen sind. Für den ersten Theil ist

$$y = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin nach Formel 7)

$$V = \pi \int (a^2 + c^2 - x^2 + 2c\sqrt{a^2 - x^2})\, dx$$

oder durch Ausführung der Integration und Zusatz der Bedingung, dass V und x gleichzeitig verschwinden müssen,

$$V = \pi \left\{ (a^2 + c^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 + cx\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 c \arcsin \frac{x}{a} \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich das Volumen der von der Fläche $BODE$ beschriebenen Zone Z, wenn man für x seinen grössten Werth

$$OD = \sqrt{a^2 - c^2}$$

setzt; nach gehöriger Zusammenziehung findet man

$$Z = \pi \left\{ \frac{a(2a^2 + 7c^2)\sqrt{a^2 - c^2}}{3a} + a^2 c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}.$$

Um zweitens das vom Segmente $DEAD$ beschriebene Volumen zu ermitteln, haben wir in Formel 8)

$$y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2}$$

zu nehmen, wodurch

$$V = 2\pi c \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + Const. \right)$$

wird, und die Constante so zu bestimmen, dass V verschwindet, wenn x seinen kleinsten Werth $OD = \sqrt{a^2 - c^2}$ erhält; dies giebt

$$0 = 2\pi c \left\{ c\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + Const. \right\}$$

und durch Subtraction von der vorigen Gleichung

$$V = 2\pi(cx\sqrt{a^2 - x^2} - c^2\sqrt{a^2 - c^2})$$
$$+ 2\pi a^2 c\left(\arcsin\frac{x}{a} - \arcsin\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\right).$$

Für $x = a$ erhält man das vom Segmente $DEAD$ beschriebene Volumen

$$V_1 = \pi^2 a^2 c - \pi\left\{2c^2\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 c \arcsin\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\right\}.$$

Das Doppelte von $Z + V_1$ giebt den Inhalt des ganzen Wulstes; führt man noch den Winkel $OCD = \theta$ ein, indem man

$$\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sin\theta$$

setzt, so findet man

10) $$W = 2\pi a^2 c(\pi - \theta) + \tfrac{2}{3}\pi a(2a^2 + c^2)\sin\theta.$$

In dem noch übrigen Falle, wo die Drehungsachse den Kreis berührt, mithin $c = a$ ist, liefern die Formeln 9) und 10) denselben Werth, nämlich $2\pi^2 a^3$.

Allgemein betrachtet verlangt die Cubatur eines begrenzten Volumens zwei Integrationen, deren erste den Querschnitt U, und deren zweite den Inhalt V bestimmt. Diese Bemerkung lässt sich auch in die Sprache der Analysis übertragen und demgemäss V unter der Form eines Doppelintegrales darstellen, doch versparen wir das Nähere hierüber bis dahin, wo von den mehrfachen bestimmten Integralen und deren geometrischen Anwendungen die Rede sein wird.

§. 87.

Die Complanation von Cylinderflächen.

In Fig. 63 sei $OL = x$, $LM = y$, $LN = MP = z$, ferner $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Leitlinie BM eines vertical stehenden Cylinders, und $z = \psi(x)$ die Gleichung der Directrix eines horizontal und parallel zur y-Achse liegenden Cylinders; beide Cylinder schneiden sich in der doppelt gekrümmten Linie DP, und wenn man sich ausser der beweglichen Ebene LMN noch eine dazu parallele feste Ebene ABC denkt, so entsteht auf dem horizontalen Cylinder eine begrenzte Fläche $CDPN$, deren Inhalt S ermittelt werden soll.

Zu diesem Zwecke ertheilen wir der Abscisse x den Zuwachs $LL_1 = dx$; die Fläche S nimmt dann um den Streifen $NN_1P_1P = dS$ zu, und je kleiner LL_1 ist, um so genauer kommt dieser Strei-

fen einem Rechtecke gleich, von welchem $NP = LM = y$ die eine Seite, und die Bogenzunahme NN_1 die andere Seite darstellt. Hiernach ist, wenn $arc\, CN$ mit s bezeichnet wird,

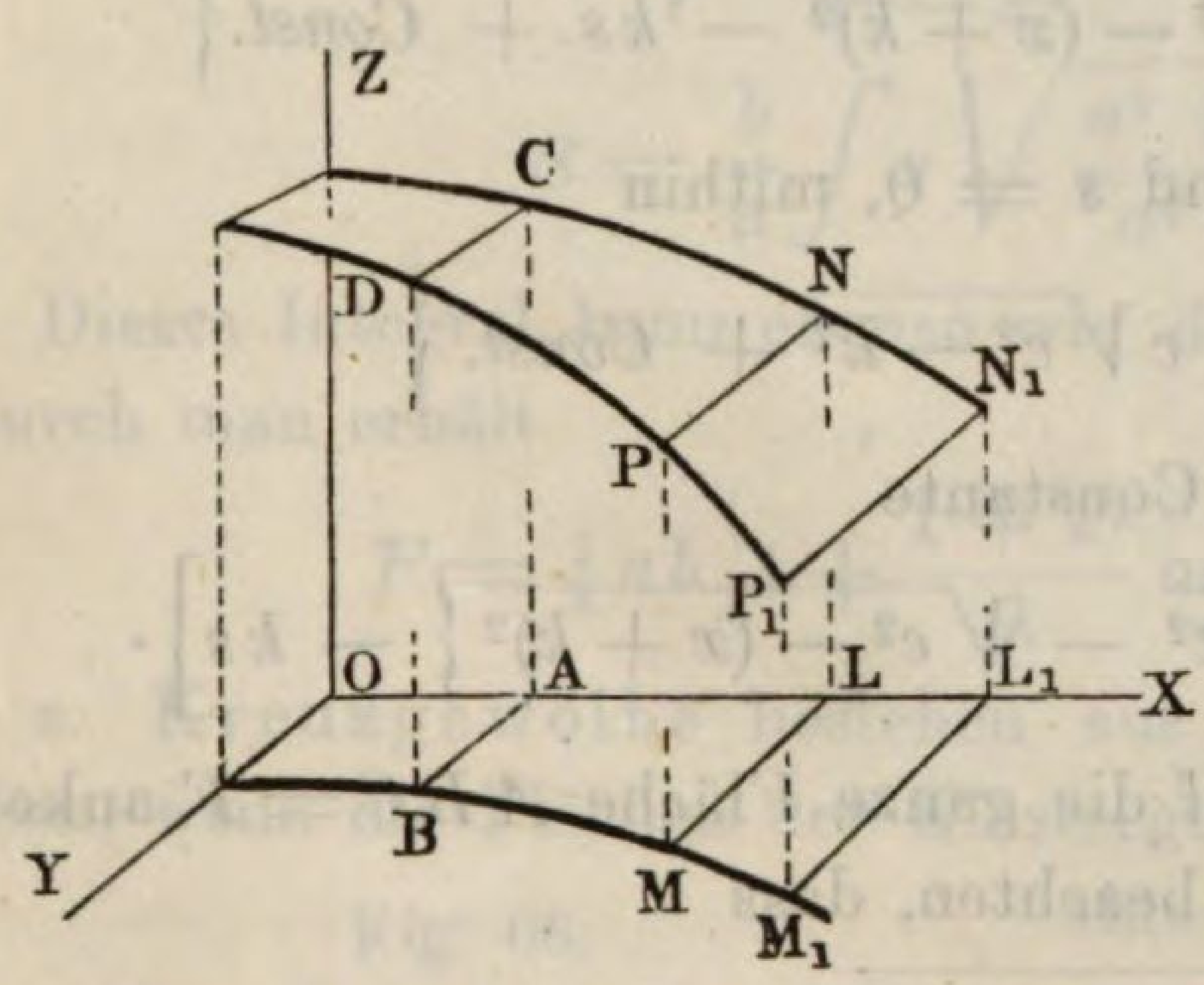
$$dS = y\,ds = y\sqrt{dx^2 + dz^2} = y\sqrt{1 + z'^2}\,dx,$$

mithin durch Integration

$$1) \qquad S = \int y\sqrt{1 + z'^2}\,dx.$$

Für y und z' sind ihre aus den Gleichungen der Curven BM und CM gezogenen Werthe $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$ einzusetzen; die Integrationsconstante bestimmt sich durch die Bedingung, dass $S = 0$ werden muss, wenn x den Anfangswerth OA erhält.

Fig. 63.



a. **Kreisförmiges Klostergewölbe.** Die halbe Spannweite des Gewölbes sei $OA = a$ (Fig. 64), der Pfeil $OC = h$, $AB = b$, und c der Radius der kreisförmigen Wölbungscurve CNA; ist ferner in Fig. 65 O' der Mittelpunkt des Bogens ANC, $O'C' = k$, $OC' = l$, so gelten folgende Gleichungen:

Fig. 64.

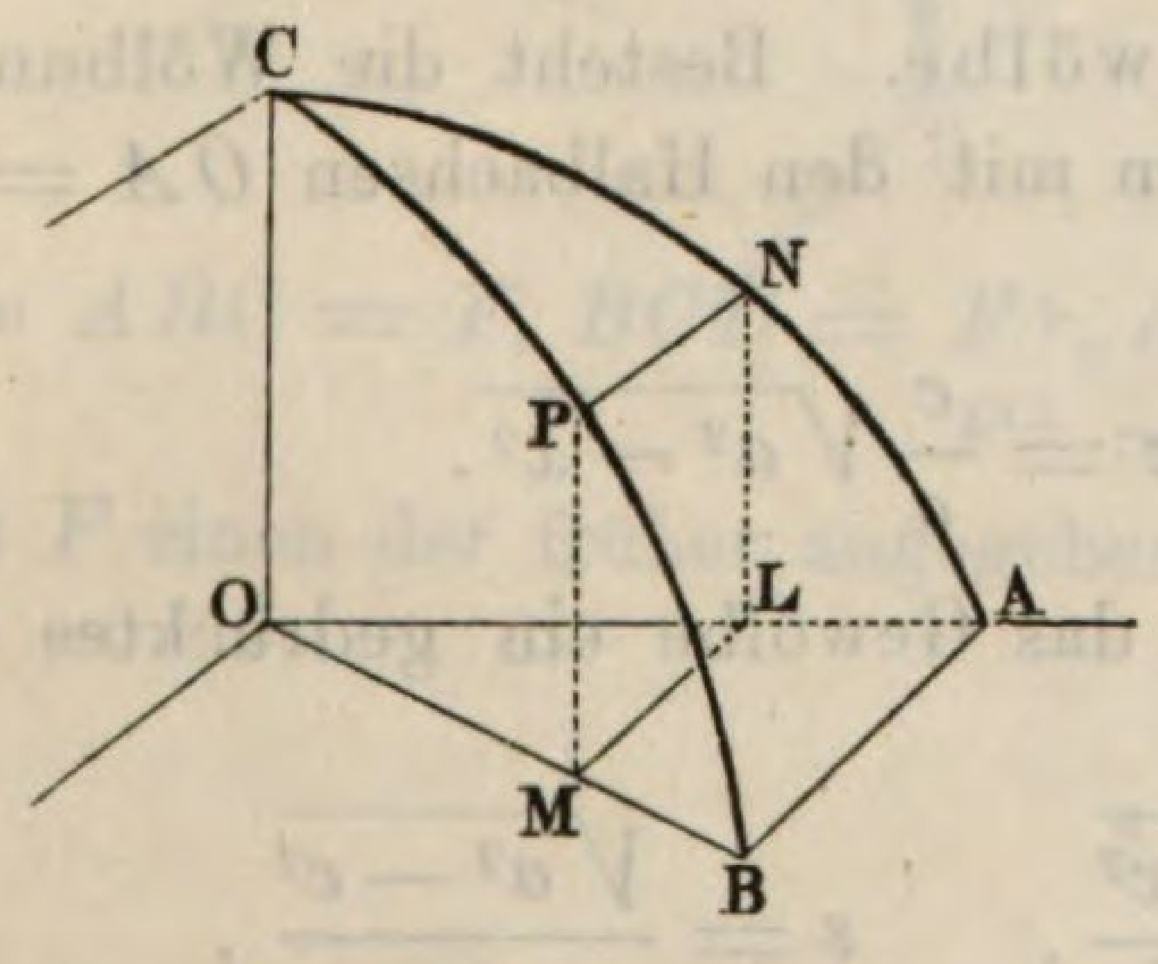
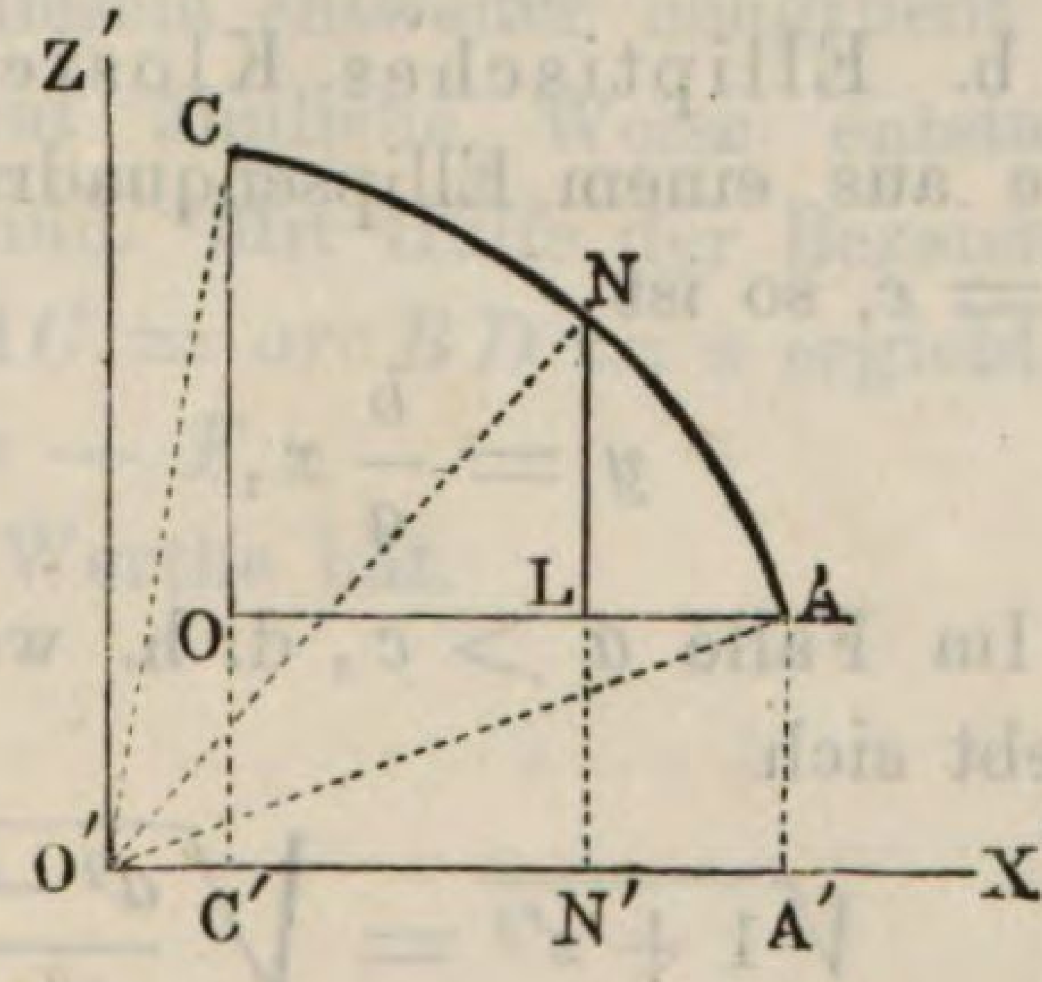


Fig. 65.



$$y = \frac{b}{a}x, \qquad z = \sqrt{c^2 - (x+k)^2} - l,$$

$$\sqrt{1 + z'^2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - (x+k)^2}},$$

$$arc\, CN = s = \int \sqrt{1 + z'^2}\, dx = \int \frac{c\, dx}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}},$$

und nach Formel 1), wenn die Fläche $CNP = S$ gesetzt wird,

$$S = \frac{bc}{a} \int \frac{x\, dx}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}}.$$

Das letzte Integral lässt sich auf die Form bringen

$$S = \frac{b}{a} \left\{ c \int \frac{(x + k)\, dx}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}} - k \int \frac{c\, dx}{\sqrt{c^2 - (x + k)^2}} \right\}$$

und daraus folgt

$$S = \frac{b}{a} \left\{ - c\sqrt{c^2 - (x + k)^2} - ks + Const. \right\}$$

Für $x = 0$ wird $S = 0$ und $s = 0$, mithin

$$0 = \frac{b}{a} \left\{ - c\sqrt{c^2 - k^2} + Const. \right\}$$

und durch Elimination der Constante

$$S = \frac{b}{a} \left[c \left\{ \sqrt{c^2 - k^2} - \sqrt{c^2 - (x + k)^2} \right\} - ks \right].$$

Da es hauptsächlich auf die ganze Fläche $ABC = F$ ankommt, so nehmen wir $x = a$ und beachten, dass

$$\sqrt{c^2 - k^2} - \sqrt{c^2 - (a + k)^2} = h + l - l = h$$

ist und dass gleichzeitig s in den Bogen CA übergeht, dessen Centriwinkel $AO'C$ mit γ bezeichnet werden möge; dies giebt

$$2) \qquad F = \frac{bc}{a} (h - k\gamma).$$

Für Stichbögen wird die Formel einfacher, weil dann $k = 0$ ist.

b. Elliptisches Klostergewölbe. Besteht die Wölbungscurve aus einem Ellipsenquadranten mit den Halbachsen $OA = a$, $OC = c$, so ist

$$y = \frac{b}{a} x, \qquad z = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Im Falle $a > c$, d. h. wenn das Gewölbe ein gedrücktes ist, ergiebt sich

$$\sqrt{1 + z'^2} = \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

$$S = \frac{b}{a} \int x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx;$$

die Substitution $a^2 - x^2 = a^2 u^2$ verwandelt das vorstehende Integral in folgendes:

$$S = -ab\int\sqrt{1-\varepsilon^2+\varepsilon^2u^2\,du},$$

dessen Entwickelung sehr leicht ist. Bestimmt man die Constante so, dass S für $x = 0$ verschwindet und setzt nachher $x = a$, so erhält man für die ganze Fläche ABC

$$3)\qquad F = \tfrac{1}{2}ab\left\{1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\,l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right\},\quad a > c.$$

Im Falle $a < c$, d. h. wenn das Gewölbe ein überhöhtes ist, ergiebt sich

$$\sqrt{1+z'^2} = \sqrt{\frac{a^2+\lambda^2x^2}{a^2-x^2}},\qquad \lambda = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a},$$

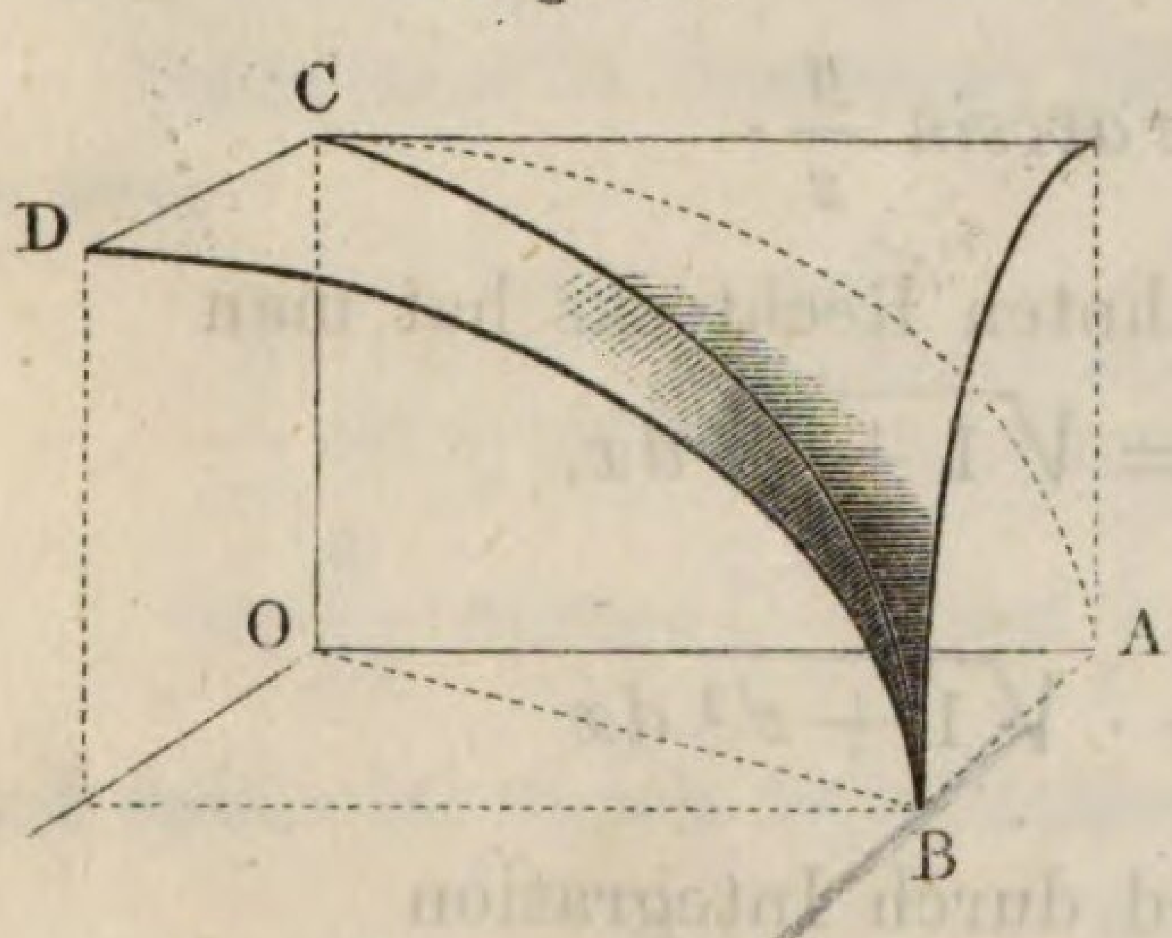
$$S = \frac{b}{a}\int x\sqrt{\frac{a^2+\lambda^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx.$$

Dieses Integral kann ebenso wie das vorige behandelt werden, wodurch man erhält

$$4)\qquad F = \tfrac{1}{2}ab\left\{1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\,arctan\,\lambda\right\},\quad a < c.$$

c. Kreuzgewölbe bestehen aus den Stücken, welche übrig bleiben, wenn die Flächen der Klostergewölbe von den Flächen vollständiger Tonnengewölbe abgezogen werden; ist z. B. in Fig. 66 ABC ein Theil eines Klostergewölbes und $ABDC$ ein Tonnengewölbe, so bildet der Rest BCD ein Stück von einem Kreuzgewölbe, dessen übrige Stücke diesem entweder congruent oder auf ähnliche Weise entstanden sind. Mit Hülfe der Bezeichnungen $ABC = F$, $BCD = F^+$, $arc\,AC = arc\,BD = s$ ergiebt sich

Fig. 66.



$$5)\qquad F^+ = bs - F,$$

wo F einen der früher angegebenen Werthe hat.

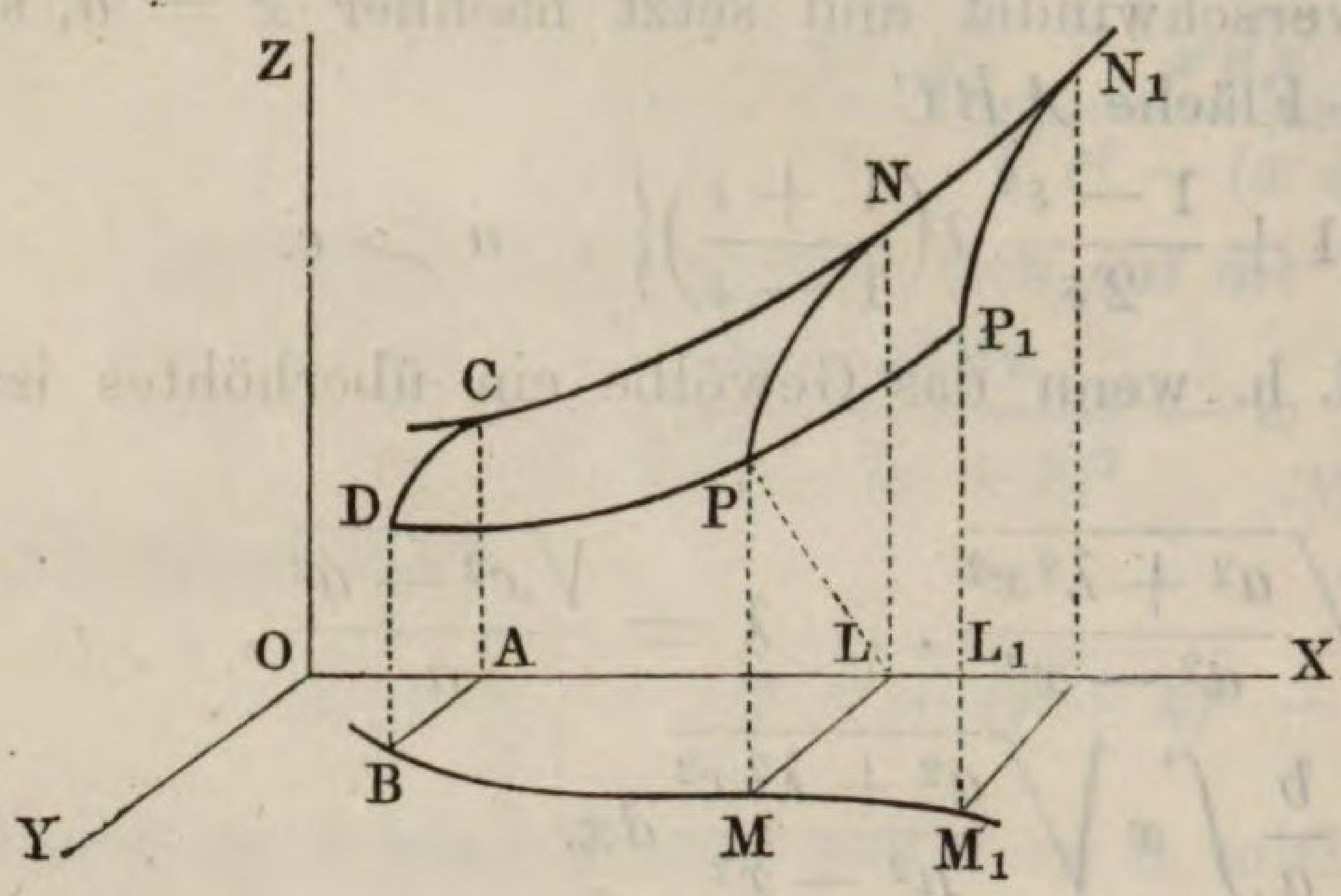
§. 88.

Die Complanation der Umdrehungsflächen.

Eine in der Ebene xz liegende Curve CN (Fig. 67 a. f. S.), deren Gleichung $z = \psi(x)$ heissen möge, werde um die x-Achse gedreht und die entstandene Rotationsfläche von einem verticalen Cylinder

geschnitten, dessen Leitlinie BM durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmt ist; der feste Parallelkreis CD, der bewegliche Parallelkreis NP, die Curve CN und der Durchschnitt DP begrenzen ein Flächenstück $CDPN$, von welchem wir den Inhalt S aufsuchen wollen.

Fig. 67.



Wenn $OL = x$ um $LL_1 = dx$ zunimmt, so wächst S um den Streifen $NPP_1N_1 = dS$, welcher dem Rechtecke aus den Seiten NP und NN_1 desto näher kommt, je kleiner NN_1 genommen wird. Nun ist

$$\sin NLP = \cos MLP = \frac{LM}{LP} = \frac{LM}{LN} = \frac{y}{z},$$

mithin

$$\angle NLP = \arcsin \frac{y}{z}$$

und, da NP ein mit dem Halbmesser z beschriebener Kreisbogen ist,

$$arc NP = z \arcsin \frac{y}{z}.$$

Für die andere Seite des erwähnten Rechtecks hat man

$$arc NN_1 = ds = \sqrt{1 + z'^2}\, dx,$$

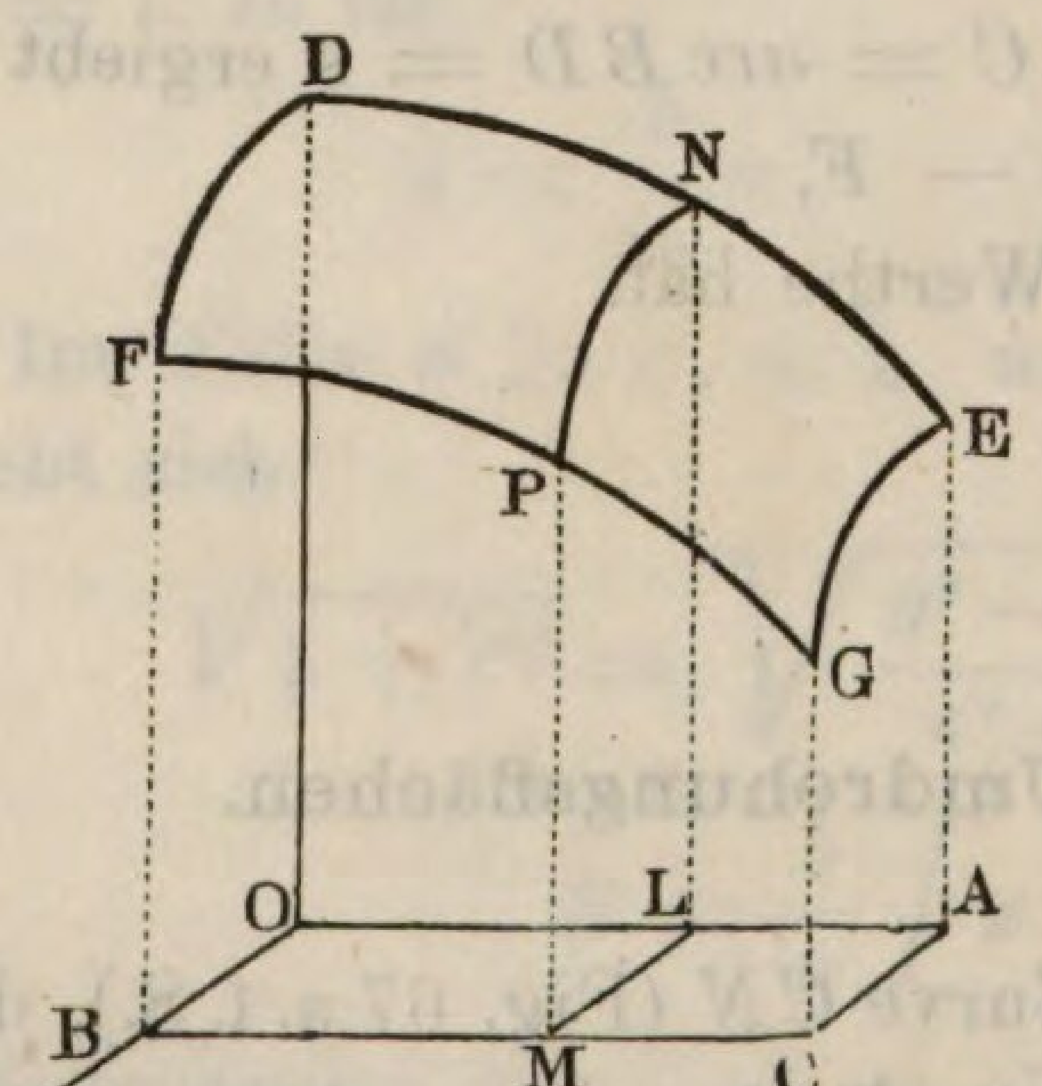
mithin

$$dS = z \arcsin \frac{y}{z} \cdot \sqrt{1 + z'^2}\, dx$$

und durch Integration

$$1)\; S = \int z \sqrt{1 + z'^2} \arcsin \frac{y}{z}\, dz.$$

Fig. 68.



Die Werthe von y und z sind aus den Gleichungen der gegebenen Curven zu nehmen, und die Integrationsconstante muss so bestimmt werden, dass $S = 0$ wird für $x = OA$.

Als Beispiel diene die Complanation eines Kugelgewölbes (Fig. 68). Die Curve BM ist hier eine Gerade parallel zur x-Achse, die ro-

tirende Curve ein Kreis, in dessen Mittelpunkt wir den Coordinatenanfang legen; für $OB = b$, $OD = c$ sind demnach die gegebenen Gleichungen

$$y = b, \quad z = \sqrt{c^2 - x^2},$$

$$z\sqrt{1 + z'^2} = c,$$

mithin nach Formel 1), wenn S die Fläche $DFPN$ bedeutet,

$$S = c \int arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} dx.$$

Bei theilweiser Integration wird

$$S = cx \, arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} - bc \int \frac{x^2 dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}$$

$$= cx \, arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} - bc \int \left[\frac{c^2}{c^2 - x^2} - 1\right] \frac{dx}{\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}$$

oder, wenn man wieder eine Integration ausführt,

$$S = cx \, arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}} + bc \, arcsin \frac{x}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$- bc^3 \int \frac{dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}.$$

Setzt man in dem noch übrigen Integrale $x = \sqrt{c^2 - b^2} \sin u$, so wird

$$\int \frac{dx}{(c^2 - x^2)\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}} = \int \frac{du}{c^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{bc} \arctan\left(\frac{b}{c} \tan u\right) = \frac{1}{bc} \arctan \frac{bx}{c\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}}$$

und daher ist durch Substitution in die vorige Gleichung

$$S = cx \, arcsin \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} + bc \, arcsin \frac{x}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$- c^2 \arctan \frac{bx}{c\sqrt{c^2 - b^2 - x^2}},$$

wobei es keiner Integrationsconstante bedarf, weil S und x gleichzeitig verschwinden sollen. Geben wir dem x einen grössten Werth $OA = a$ und bezeichnen die Fläche $DEGF$ mit F, so wird

$$F = ac \, arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}} + bc \, arcsin \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$- c^2 \arctan \frac{ab}{c\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$$

Diese Formel gewinnt an Eleganz durch die Bemerkung, dass

$$arctan \frac{ab}{c\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} = arcsin \left(\frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}} \right)$$

ist, und man kann daher schreiben

2) $$F = c(a\alpha + b\beta - c\gamma),$$

wobei die Bögen α, β, γ durch die Gleichungen

3) $$\begin{cases} sin\,\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad sin\,\beta = \dfrac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \\ sin\,\gamma = sin\,\alpha\; sin\,\beta \end{cases}$$

bestimmt sind.

Die allgemeine Formel 1) vereinfacht sich wesentlich in dem Falle, wo es auf den zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen enthaltenen Octanten der Rotationsfläche ankommt, wo mithin die Curven BM und CN congruent sind. Für $y = z$ wird nämlich

$$S = \tfrac{1}{2}\pi \int y\sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

demnach ist die Oberfläche einer durch vollständige Umdrehung entstandenen Zone

4) $$Z = 2\pi \int y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Als Beispiel diene das abgeplattete Ellipsoid, dessen Meridian zur Gleichung hat

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \lambda,$$

so erhält man zunächst

$$Z = 2\pi \int \sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2}\, dx$$

und durch Ausführung der angedeuteten Integration

$$Z = \pi \left\{ x\sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2} + \frac{b^2}{\lambda}\, l\left(\lambda x + \sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2}\right) + Const. \right\}$$

Rechnet man die Zone von der Aequatorebene an, so muss $z = 0$ werden, wenn $x = 0$; dies giebt

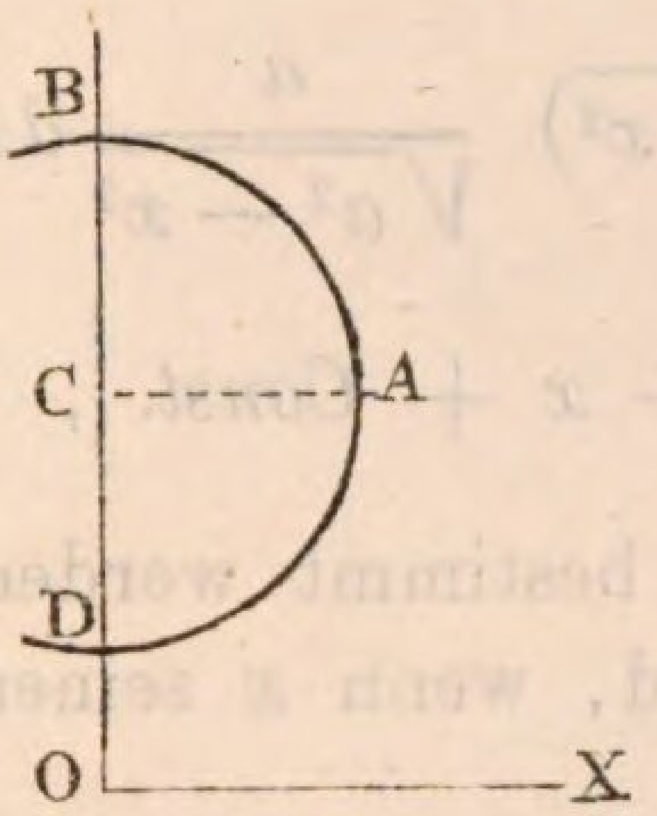
$$Z = \pi \left\{ x\sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2} + \frac{b^2}{\lambda}\, l\left(\frac{\lambda x + \sqrt{b^2 + \lambda^2 x^2}}{b} \right) \right\}.$$

Für $x = b$ erhält man die Oberfläche des halben abgeplatteten Ellipsoides; die gesammte Oberfläche ist

5) $$\Omega = 2\pi b^2 \left\{ \sqrt{1+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\, l\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right) \right\}.$$

Wenn die rotirende Curve so beschaffen ist, dass der Abscisse x zwei verschiedene y, etwa y_1 und y_2 entsprechen, so entstehen zwei Umdrehungsflächen, deren Grössen einzeln bestimmt werden müssen. Wie man diese Bemerkung anzuwenden hat, mag folgendes Beispiel zeigen.

Fig. 69.



Die rotirende Curve sei ein mit dem Halbmesser $AC = a$ beschriebener Kreis (Figur 69), dessen Mittelpunkt um $CO = c$ von der Drehungsachse entfernt liegt. Im Falle $c > a$ ist für alle Punkte des Quadranten AB:

$$y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$Z_2 = 2\pi \int \left(c + \sqrt{a^2 - x^2}\right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi \left\{ ac\, arcsin\, \frac{x}{a} + ax \right\},$$

wobei es keiner willkührlichen Constanten bedarf; für $x = a$ erhält man die vom Quadranten AB beschriebene Fläche

$$R_2 = 2\pi a (\tfrac{1}{2}\pi c + a).$$

Die Punkte auf dem Quadranten AD bestimmen sich durch die Gleichung

$$y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2}$$

und daraus findet man für die von jenem Quadranten beschriebene Fläche

$$R_1 = 2\pi a (\tfrac{1}{2}\pi c - a).$$

Das Doppelte von $R_1 + R_2$ giebt die Gesammtoberfläche des entstandenen Ringes, nämlich

6) $$R = 4\pi^2 ac.$$

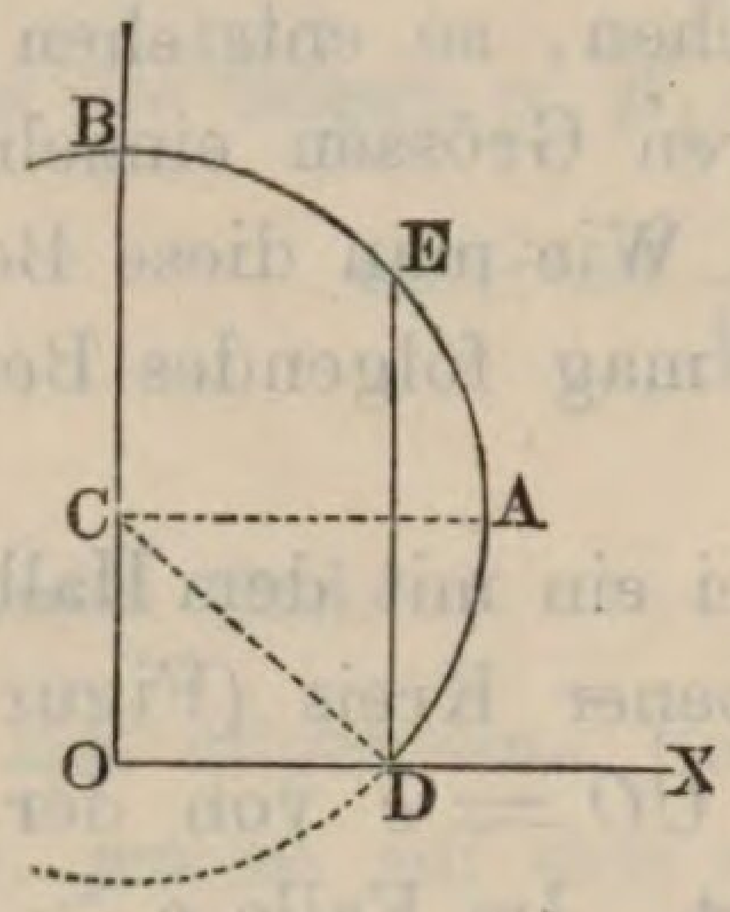
Im Falle $c < a$ (Fig. 70 a. f. S.) besteht die Oberfläche, welche der Kreisbogen $BEAD$ beschreibt, aus den drei von BE, EA und AD erzeugten Flächen. Um die erste zu erhalten geben wir in der Formel

$$Z_2 = 2\pi a \left\{ c\, arcsin\, \frac{x}{a} + x \right\}$$

dem x seinen grössten Werth $OD = \sqrt{a^2 - c^2}$, woraus folgt

$$Z_2 = 2\pi a \left\{ c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + \sqrt{a^2 - c^2} \right\}.$$

Fig. 70.



Für alle Punkte des zweiten Bogens EA ist

$$y = c + \sqrt{a^2 - x^2},$$

mithin

$$Z = 2\pi \int \left(c + \sqrt{a^2 - x^2}\right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi a \left\{ c \arcsin \frac{x}{a} + x + Const. \right\},$$

wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass $Z = 0$ wird, wenn x seinen kleinsten Werth OD erhält. Dies giebt

$$Z = 2\pi a \left\{ c \arcsin \frac{x}{a} - c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} + x - \sqrt{a^2 - c^2} \right\}$$

und für $x = a$ erhält man für die vom Bogen EA beschriebene Fläche

$$Z_1 = 2\pi a \left\{ \tfrac{1}{2}\pi c + a - \sqrt{a^2 - c^2} - c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}.$$

Endlich werden alle Punkte auf AD durch die Gleichung

$$y = c - \sqrt{a^2 - x^2}$$

bestimmt, mithin ist hier

$$Z = 2\pi \int \left(c - \sqrt{a^2 - x^2}\right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi a \left\{ c \arcsin \frac{x}{a} - x + Const. \right\};$$

giebt man der Constanten einen solchen Werth, dass Z verschwindet für $x = OD$ und nimmt dann $x = a$, so erhält man für die vom Bogen AD beschriebene Fläche

$$Z_0 = 2\pi a \left\{ \tfrac{1}{2}\pi c - a + \sqrt{a^2 - c^2} - c \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right\}.$$

Die Oberfläche des ganzen Wulstes ist das Doppelte von $Z_0 + Z_1 + Z_2$; durch Einführung des Winkels $OCD = \theta$ wird hieraus

7) $$W = 4\pi a \{ c(\pi - \theta) + a \sin\theta \}.$$

Im letzten Falle $c = a$, $\theta = 0$ liefern die Formeln 6) und 7) denselben Werth $4\pi^2 a^2$.

Wenn die Fläche, deren Complanation verlangt wird, weder eine cylindrische noch durch Umdrehung entstanden ist, so führt das Problem auf Doppelintegrale, deren Behandlung einem späteren Capitel vorbehalten bleibt.

Cap. XV.

Die einfachen bestimmten Integrale.

§. 89.

Definitionen und Werthbestimmungen.

Wir knüpfen an die Betrachtungen des §. 64 wieder an, denen zufolge unter dem Symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

der Grenzwerth verstanden wird, gegen welchen die Summe

1) $$f(a)\delta_1 + f(a+\delta_1)\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\delta_3 + \cdots\cdots + f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1})\delta_n$$

convergirt, wenn die Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ der Null näher und näher kommen, während sie immer der Bedingung $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n = b - a$ genügen müssen. Zugleich erinnern wir an die geometrische Bedeutung dieser Definition für den Fall, dass x als Abscisse und $y = f(x)$ als zugehörige Ordinate einer Curve angesehen wird; es ist nämlich das obige bestimmte Integral gleich der Fläche, welche die Strecke $b - a$ der Abscissenachse zur Basis hat, seitwärts durch die Ordinaten $f(a)$, $f(b)$ und oberhalb durch die genannte Curve begrenzt wird (Fläche $ABDC$ auf S. 303). Später ergab sich, dass das bestimmte Integral auch als Differenz zweier Specialwerthe des unbestimmten Integrales

2) $$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

betrachtet werden konnte, und es war

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ innerhalb des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ keine Unterbrechung der Continuität erleidet. — Welche von diesen zwei Definitionen des bestimmten Integrales man als die primäre wählen will, ist an sich gleichgültig; wir entscheiden uns für die erste, weil sie in gewisser Rücksicht die allgemeinere ist. Die zweite Definition setzt nämlich voraus, dass man das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ bereits kenne, und hierin liegt wiederum die Voraussetzung, dass die Natur der Function $f(x)$ bekannt sei; eine solche Beschränkung findet bei der ersten Definition nicht statt, es reicht bei ihr hin, wenn das jedem x von $x = a$ bis $x = b$ entsprechende y angebbar ist, gleichgültig, wo man es herbekommen hat. Wer z. B. mit dem Bleistift einen beliebigen regellosen (nur wenigstens zusammenhängenden) Zug auf das Papier wirft, weiss nach der ersten Definition recht gut die Bedeutung des bestimmten Integrales, da mit dem Zuge selbst eine Fläche entstanden ist, er kann den Werth desselben nach §. 66 oder auf mechanische Weise (mittelst eines sogenannten Planimeters) sehr genau finden, während dies nach der zweiten Definition erst dann geschehen könnte, wenn die, vielleicht gar nicht angebbare Gleichung der entstandenen Curve bekannt wäre.

In allen Fällen, wo sich der Werth des unbestimmten Integrales $\int f(x)\,dx$ entwickeln lässt, ist es natürlich das Einfachste, das bestimmte Integral aus dem unbestimmten herzuleiten. Wir geben hierzu einige Beispiele.

Mittelst der Fundamentalformel 6) in §. 65 erhält man sehr leicht

1) $$\int_0^\alpha \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{4\alpha},$$

2)*) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha};$$

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass unter einem Integrale von der Form

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

der Grenzwerth zu verstehen ist, welchem sich das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bei unendlich wachsenden b nähert.

die Formel 10) §. 65 liefert:

$$3) \qquad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Reductionsformel 8) in §. 73 ergiebt sich für $a = 1$, $b = -1$, $n = 1$

$$\int x^{m-1}(1-x)^s dx$$
$$= -\frac{x^{m-1}(1-x)^{s+1}}{s+m} + \frac{m-1}{s+m}\int x^{m-2}(1-x)^s dx;$$

führt man die Grenzen $x = 1$, $x = 0$ ein und setzt voraus, dass $m - 1$ und $s + 1$ positiv sind, so erhält man einfacher

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^s dx = \frac{m-1}{s+m}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^s dx.$$

Bei ganzen positiven m lässt sich diese Formel $(m-1)$mal nach einander anwenden; dies giebt

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^s dx$$
$$= \frac{m-1}{s+m}\cdot\frac{m-2}{s+m-1}\cdots\frac{2}{s+3}\cdot\frac{1}{s+2}\int_0^1 (1-x)^s dx.$$

Der Werth des noch übrigen Integrals ist, unbestimmt genommen,

$$= -\frac{1}{s+1}(1-x)^{s+1} + Const.,$$

daraus folgt, weil $s + 1$ als positiv vorausgesetzt wurde,

$$\int_0^1 (1-x)^s dx = \frac{1}{s+1}.$$

Substituirt man dies und nimmt $s + 1 = a$, so gelangt man zu dem Resultate

$$4) \qquad \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{a-1} dx = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m-1)}{a(a+1)\,.\,.\,.\,(a+m-1)},\quad a > 0.$$

Aus der vorhin benutzten Reductionsformel erhält man ferner für $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $s = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Schreibt man m für $m - 1$ und führt die Grenzen $x = 1$ und $x = 0$ ein, so wird einfacher

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m} \int_0^1 \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Durch mehrmalige Anwendung dieser Formel kommt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, auf eines der beiden Integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

und damit gelangt man zu folgenden Ergebnissen

5) $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,....\,m}\,\frac{\pi}{2},\ (m \text{ gerade}),$$

6) $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,...\,(m-1)}{3\,.\,5\,.\,7\,....\,m},\ (m \text{ ungerade}).$$

Wir machen ferner Gebrauch von der Reductionsformel

$$\int x^m e^{-ax}\,dx = -\frac{x^m e^{-ax}}{a} + \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{-ax}\,dx$$

und führen die Grenzen $x = \infty$ und $x = 0$ ein. Unter der Voraussetzung, dass m und a positive Grössen sind, verschwindet das Product $x^m e^{-ax}$ sowohl für $x = \infty$ als für $x = 0$, und daher wird

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{m}{a}\int_0^\infty x^{m-1} e^{-ax}\,dx.$$

Bei ganzen positiven m führt die wiederholte Anwendung dieser Formel auf das Integral

7) $$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a},\ a > 0$$

und daher wird

8) $$\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m}{a^{m+1}},\ a > 0.$$

Die Fundamentalformel 8) in §. 65 liefert durch Einführung der Grenzen $u = \frac{1}{2}\pi$ und $u = 0$

9) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

Endlich benutzen wir noch die beiden Formeln

$$\int e^{-\alpha u} \cos\beta u \, du = -\frac{\alpha \cos\beta u - \beta \sin\beta u}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha u} + C,$$

$$\int e^{-\alpha u} \sin\beta u \, du = -\frac{\alpha \sin\beta u + \beta \cos\beta u}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha u} + C,$$

und nehmen erst $u = \infty$ dann $u = 0$. Unter der Voraussetzung, dass α eine positive die Null übersteigende Grösse ist, verschwinden die Producte $e^{-\alpha u} \cos\beta u$ und $e^{-\alpha u} \sin\beta u$ für $u = \infty$, und es bleibt

10) $$\int_0^\infty e^{-\alpha u} \cos\beta u \, du = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0,$$

11) $$\int_0^\infty e^{-\alpha u} \sin\beta u \, du = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha > 0.$$

§. 90.

Fundamentaleigenschaften bestimmter Integrale.

I. Behält die Function $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ dasselbe Vorzeichen, so kommt letzteres den Grössen $f(a), f(a + \delta_1), \ldots f(a + \delta_1 + \cdots + \delta_{n-1})$ gemeinschaftlich zu und ebenso dem Integrale zwischen jenen Grenzen. Geometrisch heisst dies, eine Curve mit durchaus positiven oder durchaus negativen Ordinaten besitzt eine positive resp. negative Fläche.

Wendet man die Definition des bestimmten Integrales auf einen Ausdruck von der Form

$$f(x) = A\,\varphi(x) + B\,\psi(x)$$

an, so entsteht ein Aggregat von zwei Summen, welches sich zu einer einfachen Summe zusammenziehen lässt; man erhält nämlich

1) $$\int_a^b \{A\,\varphi(x) + B\,\psi(x)\}\, dx = A \int_a^b \varphi(x)\, dx + B \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

Zu demselben Resultate führt die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen, wenn

$$\int \varphi(x)\, dx = \Phi(x) + C_1, \quad \int \psi(x)\, dx = \Psi(x) + C_2$$

gesetzt wird.

Aus den beiden vorigen Bemerkungen zusammen folgt ein häufig gebrauchter Satz. Nehmen wir an, in dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

sei $f(x)$ ein Product zweier stetigen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, deren erste innerhalb des Intervalles a bis b für $x = \alpha$ ihren grössten und für $x = \beta$ ihren kleinsten Werth erhalten möge, so ist für jenes Intervall $\varphi(\alpha) - \varphi(x)$ positiv, $\varphi(\beta) - \varphi(x)$ negativ, ferner, wenn $\psi(x)$ von a bis b positiv bleibt, auch $[\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\,\psi(x)$ positiv, dagegen $[\varphi(\beta) - \varphi(x)]\,\psi(x)$ negativ. Nach dem Obigen ist nun

$$\int_a^b [\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\,\psi(x)\,dx \text{ positiv}; \int_a^b [\varphi(\beta) - \varphi(x)]\,\psi(x)\,dx \text{ negativ};$$

durch Integration der einzelnen Theile giebt dies

$$2) \qquad \varphi(\alpha)\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx > \varphi(\beta)\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Will man aus dieser Ungleichung eine Gleichung bilden, so lasse man in dem Ausdrucke

$$\varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx$$

die willkührliche Grösse ξ das Intervall a bis b durchlaufen und beachte, dass derselbe einmal kleiner und einmal grösser als das Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

wird; wegen der Stetigkeit von $\varphi(\xi)$ muss es daher einen zwischen a und b liegenden Werth von ξ geben, für welchen beide Ausdrücke gleich werden. Diesen Werth von ξ können wir mit $a + \vartheta(b - a)$ bezeichnen, wo ϑ ein positiver echter Bruch ist; wir haben daher die Gleichung

$$3) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi[a + \vartheta(b - a)]\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

und zwar unter der Determination, dass $\varphi(x)$ stetig und $\psi(x)$ stetig

und zugleich positiv bleibt von $x = a$ bis $x = b$. Beispielsweise ist nach diesem Satze

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \,.\, x^{m-1}\, dx = \sin\frac{\vartheta\pi}{4} \cdot \frac{(\frac{1}{4}\pi)^m}{m},$$

woraus u. A. folgt, dass der Werth des Integrales für unendlich wachsende m gegen die Null convergirt, was man auf anderem Wege nicht so leicht finden würde.

Nimmt man einfach $\psi(x) = 1$, so wird aus Nro. 3)

$$4) \quad \int_a^b \varphi(x)\, dx = (b-a)\,\varphi[a + \vartheta(b-a)];$$

die geometrische Deutung hiervon ist sehr einfach (vergl. §. 8, Nr. 2).

II. Betrachten wir nun die Veränderungen, welche im bestimmten Integrale entstehen, wenn das Integrationsintervall zu- oder abnimmt. Aus der ursprünglichen Definition des bestimmten Integrales folgt die nachstehende auch geometrisch leicht zu erklärende Gleichung:

$$5) \quad \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

und umgekehrt

$$\int_a^c f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Setzt man in Nro. 5) $c = a$ und berücksichtigt, dass jederzeit

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

sein muss, so folgt noch

$$6) \quad \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx,$$

und es würde sehr leicht sein, diese Eigenschaften mittelst der Gleichung 3) in §. 89 zu verifiziren.

Von besonderem Nutzen ist oft folgende Bemerkung. Nach Nro. 5) hat man

$$\int_{\mu-\gamma}^{\mu+\gamma} f(x)\, dx = \int_{\mu-\gamma}^{\mu} f(x)\, dx + \int_{\mu}^{\mu+\gamma} f(x)\, dx;$$

entwickelt man die Integrale der rechten Seite, indem man der Einfachheit wegen $\delta_1 = \delta_2 \ldots = \delta_n = \delta$ setzt, so ist in jedem Falle $\delta = \frac{\gamma}{n}$ und die rechte Seite der vorigen Gleichung bildet den Grenzwerth von:

$$f(\mu-\gamma)\,\delta + f(\mu-\gamma+\delta)\,\delta + f(\mu-\gamma+2\,\delta)\,\delta + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + f(\mu-\gamma+\overline{n-1}\,\delta)\,\delta$$
$$+ f(\mu+\gamma)\,\delta + f(\mu+\gamma-\delta)\,\delta + f(\mu+\gamma-2\,\delta)\,\delta + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + f(\mu+\gamma-\overline{n-1}\,\delta)\,\delta,$$

wobei die dem zweiten Integrale entsprechende Reihe die umgekehrte Anordnung erhalten hat. Ist nun für jedes ξ

7) $$f(\mu-\xi) = f(\mu+\xi),$$

so wird die zweite Reihe der ersten gleich und es folgt daraus:

8) $$\int_{\mu-\gamma}^{\mu+\gamma} f(x)\,dx = 2\int_{\mu-\gamma}^{\mu} f(x)\,dx.$$

Ist dagegen

9) $$f(\mu-\xi) = -f(\mu+\xi),$$

so heben sich alle Glieder der obigen Reihen gegenseitig auf und es bleibt:

10) $$\int_{\mu-\gamma}^{\mu+\gamma} f(x)\,dx = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Ergebnisse ist folgende: wenn $f(\mu-\xi) = f(\mu+\xi)$, so besteht die zu quadrirende Curve aus zwei congruenten Theilen von gleicher Lage CN und DN, Fig. 71, wo $OM = \mu$ und $AM = \gamma$. Die Fläche $ABDNC$ beträgt daher das Doppelte von der Fläche $AMNC$; wenn dagegen $f(\mu - \xi) = -f(\mu+\xi)$, so sind jene Theile zwar ebenfalls congruent, aber von entgegengesetzter Lage; die entsprechenden Flächen AMC und

Fig. 71.

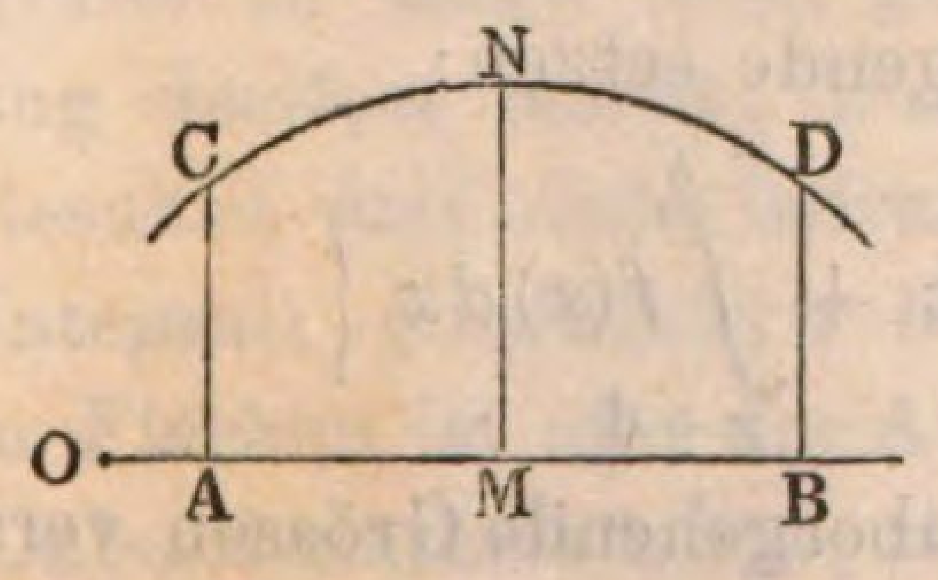
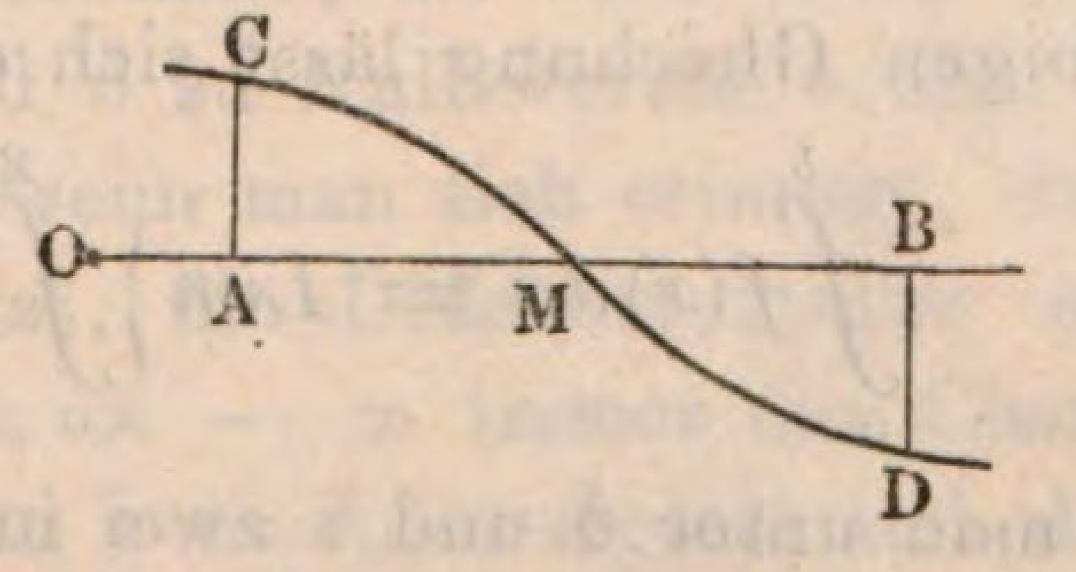


Fig. 72.



BMD besitzen dann gleiche Grösse und entgegengesetzte Vorzeichen (Fig. 72), es ist mithin die Fläche $ACMDB = 0$. Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. ohne alle Rechnung, dass

$$\int_0^{\pi} \sin^m x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x\,dx,$$

ebenso, dass

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m x\,dx$$

sein muss, ferner bei ganzen und positiven n:

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n-1} x\,dx = 0,\quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n-1} x\,dx = 0.$$

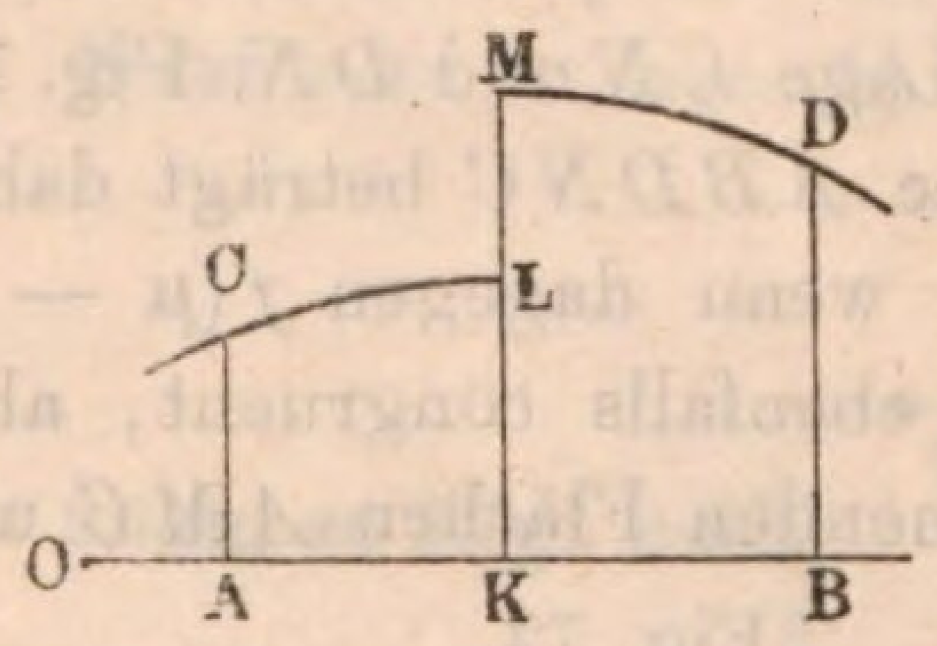
III. Hier ist zugleich der Ort, um die Bedeutung des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

für den Fall zu erörtern, dass die Function $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles eine Unterbrechung der Continuität erleidet. Tritte eine solche ein für $x = \varkappa$, wo $b > \varkappa > a$, so kann man nach Nro. 5) die Zerlegung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\varkappa - 0} f(x)\,dx + \int_{\varkappa + 0}^b f(x)\,dx$$

Fig. 73.



vornehmen, die geometrisch bedeutet, dass die über der Strecke $AB = b - a$ (Fig. 73) stehende Fläche $ABDMLC$ aus zwei Theilen $AKLC$ und $KBDM$ zusammengesetzt ist, und dass $KL = f(\varkappa - 0)$ die letzte Ordinate des ersten und $KM = f(\varkappa + 0)$ die erste Ordinate des zweiten Stückes sein soll. Statt der obigen Gleichung lässt sich die folgende setzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = Lim\left\{\int_a^{\varkappa - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varkappa + \delta}^b f(x)\,dx\right\},$$

wenn man unter δ und ε zwei in Null übergehende Grössen versteht. Will man die Integration mittelst der Gleichung

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

ausführen, so wird in diesem Falle

$$11)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - Lim\left\{F(\varkappa+\delta) - F(\varkappa-\varepsilon)\right\},$$

also gilt dann die Gleichung 4) ohne Weiteres nicht mehr, sie bedarf im Gegentheil einer Correction. So wäre es z. B. unrichtig,

$$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -2$$

setzen zu wollen, ohne zu beachten, dass die Function $\frac{1}{(1-x)^2}$ für $x = 1$ discontinuirlich wird; der wahre Werth ist

$$\frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} - Lim\left\{\frac{1}{1-(1+\delta)} - \frac{1}{1-(1-\varepsilon)}\right\} = -2 + \infty$$

Auf gleiche Weise wäre es falsch,

$$\int_{-b}^{b} \frac{dx}{x} = lb - l(-b) = l(-1)$$

zu nehmen, wobei eine reelle Curve zu einer imaginären Fläche käme; man muss im Gegentheil, da $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, die Rechnung so stellen:

$$\int_{-b}^{b} \frac{1}{x}\,dx = lb - l(-b) - Lim\left\{l(0+\delta) - l(0-\varepsilon)\right\}$$

$$= Lim\; l\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

Da δ und ε auf beliebige Weise in Null übergeführt werden dürfen, so ist $\frac{\varepsilon}{\delta}$ eine unbestimmte Grösse, mithin der Werth des obigen Integrales so lange nicht genau bestimmt, als man keine Voraussetzung darüber macht, wie ε und δ zu Null werden sollen. Dieses Resultat darf nicht befremden, wenn man sich erinnert, dass jenes Integral, geometrisch betrachtet, die Differenz zweier unendlichen Flächen ist und der Ausdruck $\infty - \infty$ immer den Charakter der Unbestimmtheit trägt; setzt man $\varepsilon = \delta$, so ergiebt sich der sogenannte Hauptwerth des Integrales und zwar ist er $= 0$. Man würde denselben auch dadurch gefunden haben, dass man mittelst der Formel

$$\int \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} l(x^2) + Const.$$

integrirt hätte, welche sich durch Differentiation als richtig ausweist.

§. 91.

Substitution neuer Variabelen in bestimmten Integralen.

Wie bei unbestimmten, so kann man auch bei bestimmten Integralen eine neue Variabele durch Substitution einführen, nur sind dabei die entsprechenden Aenderungen der Grenzen zu beachten. Setzt man nämlich in dem Integrale

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\, dx$$

$\varphi(x) = y$, so erhält man wie früher (in §. 66, III.) $x = \psi(y)$, $dx = \psi'(y)\,dy$; ist nun $x = a$ geworden, so hat y den Werth $\varphi(a)$ angenommen, der oberen Integrationsgrenze $x = b$ entspricht auf gleiche Weise $y = \varphi(b)$ und man hat daher

$$1) \qquad \int_a^b f[\varphi(x)]\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\psi'(y)\,dy,$$

und wenn sich die Integration rechter Hand ausführen lässt, so ist zugleich der Werth des ursprünglichen Integrales gefunden, ohne dass man, wie bei unbestimmten Integralen, die Substitution $y = \varphi(x)$ rückwärts anzuwenden nöthig hätte.

So ergiebt sich z. B. für $\varphi(x) = hx + k$

$$2) \qquad \int_a^b f(hx + k)\, dx = \frac{1}{h}\int_{ah+k}^{bh+k} f(y)\, dy;$$

specieller für $a = 0$ und $b = 1$, und umgekehrt geschrieben

$$\int_k^{h+k} f(y)\, dy = h\int_0^1 f(hx + k)\, dx,$$

oder, wenn $k = \alpha$, $h = \beta - \alpha$ gesetzt wird:

$$3) \qquad \int_\alpha^\beta f(y)\, dy = (\beta - \alpha)\int_0^1 f[\alpha + (\beta - \alpha)x]\, dx,$$

wodurch ein Integral mit beliebigen Grenzen auf ein anderes mit den Grenzen 0 und 1 zurückgeführt ist. Setzt man weiter

$$x = \frac{z}{1+z}, \text{ also } z = \frac{x}{1-x},$$

so erhält man zunächst

$$f[\alpha + (\beta - \alpha)x]\,dx = f\left(\frac{\alpha + \beta z}{1+z}\right)\frac{dz}{(1+z)^2};$$

wenn ferner $x = 0$ und $x = 1$ geworden ist, so hat z die Werthe $z = 0$ und $z = \frac{1}{0} = \infty$ angenommen; demnach wird aus Nro. 3):

4) $$\int_\alpha^\beta f(y)\,dy = (\beta - \alpha)\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha + \beta z}{1+z}\right)\frac{dz}{(1+z)^2},$$

und man kann also jedem bestimmten Integrale auch die Grenzen 0 und ∞ verschaffen.

Setzt man ferner in dem Integrale

$$\int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^m z^{a-1}\,dz$$

$l\left(\frac{1}{z}\right) = x$, mithin $z = e^{-x}$, $dz = -\,e^{-x}dx$, so geht dasselbe über in

$$-\int_\infty^0 x^m e^{-ax}\,dx = +\int_0^\infty x^m e^{-ax}\,dx;$$

den Werth des letzteren Integrales kennt man aus §. 89, Formel 8) für den Fall, dass m eine ganze positive Zahl und $a > 0$ ist, daher

$$\int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^m z^{a-1}\,dz = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,m}{a^{m+1}},\ a > 0.$$

Mit Hülfe der Substitution $\sin u = x$, $u = \arcsin x$, $du = dx : \sqrt{1 - x^2}$ erhält man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m u\,du = \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

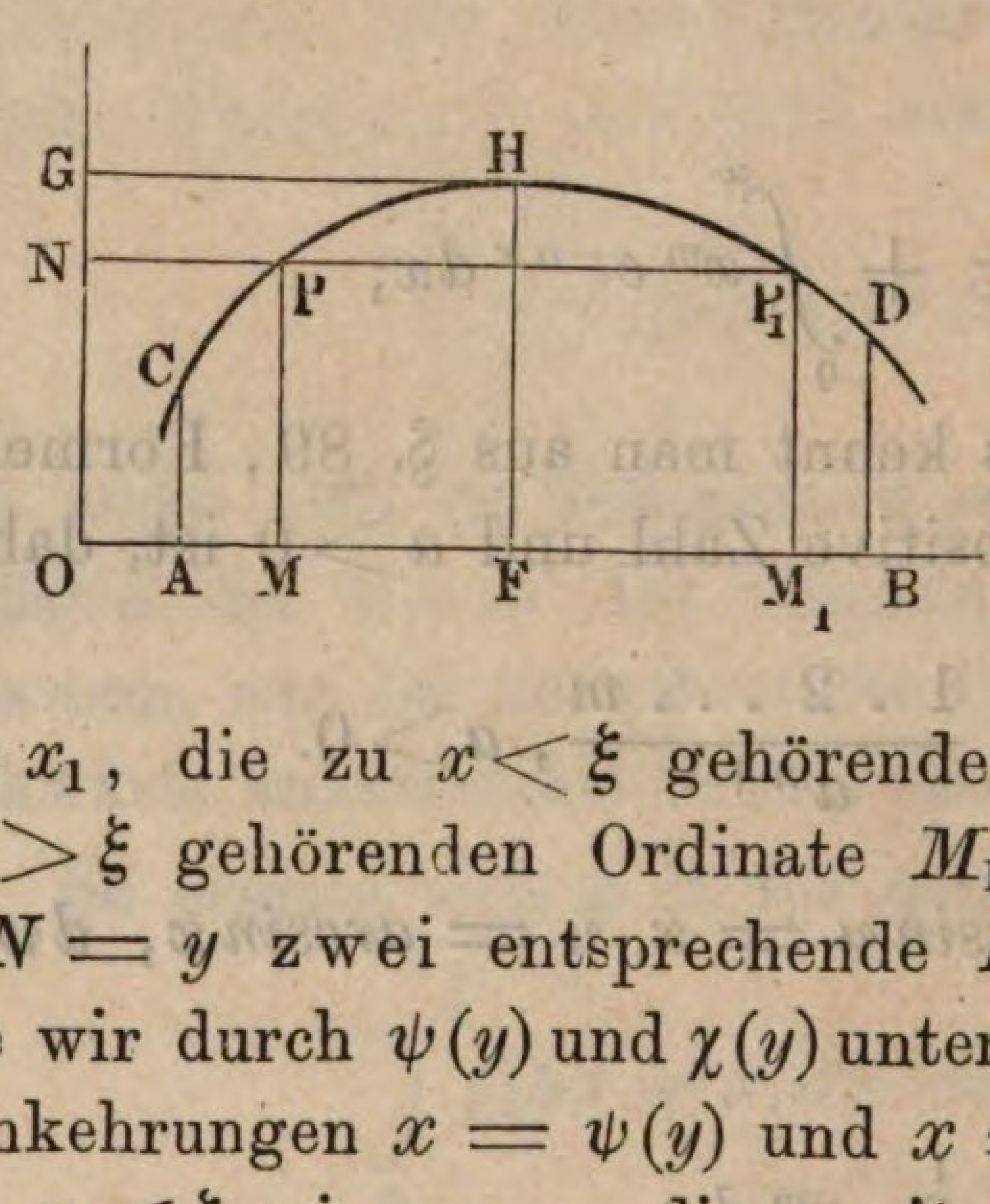
und so ist das Integral auf ein bereits entwickeltes zurückgeführt (§. 89, Nro. 5 u. 6). Gleichen Werth hat auch das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m v\,dv,$$

wie die Substitution $v = \frac{1}{2}\pi - u$ zeigt.

Eine wesentliche Modification verlangt die in Nro. 1) angegebene Umwandlung in dem Falle, wo die Gleichung $\varphi(x) = y$, nach x aufgelöst, mehrere reelle Wurzeln darbietet; da nämlich der Werth von y nicht rückwärts wieder eingesetzt wird, so bleibt hier die Frage übrig, welche von den verschiedenen Wurzeln für x genommen werden soll. Denken wir uns die Sache der Anschaulichkeit wegen geometrisch, nämlich $y = \varphi(x)$ als Gleichung einer Curve, so bedeutet die Umkehrung dieser Gleichung, dass nicht wie früher die Abscisse, sondern nunmehr die Ordinate die willkürliche der beiden Coordinaten sein, die Curve also gewissermaassen über der Ordinatenachse statt über der Abscissenachse construirt werden soll. Ob nun einer Ordinate y nur eine Abscisse x oder mehrere x entsprechen, das hängt von dem Laufe der krummen Linie ab. Wenn dieselbe von $x = a$ bis $x = b$ nur steigt oder nur fällt, also $\varphi'(x)$ sein Vorzeichen nicht wechselt, so gehört zu jedem neuen x ein neues y, ebenso umgekehrt zu jedem y ein einziges x; es existirt in diesem Falle nur eine reelle Umkehrung der Gleichung $y = \varphi(x)$, und diese Umkehrung $x = \psi(y)$ ist die in der Formel 1) vorkommende.

Fig. 74.



Wenn dagegen die Curve $y = \varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ ein Maximum oder ein Minimum hat, welches für $x = \xi$ eintreten möge, so finden sich über $x = \xi$ hinaus die früheren Ordinaten wenigstens zum Theil wieder; so ist in Figur 74, für $OF = \xi$, $OM = x$, $OM_1 = x_1$, die zu $x < \xi$ gehörende Ordinate $MP = y$ gleich der zu $x_1 > \xi$ gehörenden Ordinate $M_1 P_1$; umgekehrt giebt es also für $ON = y$ zwei entsprechende Abscissen $NP = x$, $NP_1 = x_1$, die wir durch $\psi(y)$ und $\chi(y)$ unterscheiden wollen; von diesen beiden Umkehrungen $x = \psi(y)$ und $x = \chi(y)$ ist die erste da zu nehmen, wo $x < \xi$ sein muss, die zweite, wenn man weiss, dass $x > \xi$ sein soll. Zerlegen wir nun das ursprüngliche Integral wie folgt:

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_a^\xi f[\varphi(x)]\,dx + \int_\xi^b f[\varphi(x)]\,dx,$$

so ist im ersten Integrale rechter Hand $x < \xi$, im zweiten $x > \xi$, also dort $x = \psi(y)$, hier $x = \chi(y)$ einzusetzen; die Transformation geschieht im Uebrigen wie früher und giebt jetzt

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\xi)} f(y)\psi'(y)\,dy + \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(b)} f(y)\chi'(y)\,dy.$$

Ganz ähnlich ist die Sache in dem Falle, wo zwischen $x = a$ und $x = b$ mehrere Maxima und Minima, mithin auch mehrere Umkehrungen stattfinden; sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Werthe von x, für welche jene Maxima und Minima eintreten, so zerlegt man das ursprüngliche Integral in eine Reihe anderer von $x = a$ bis $x = \xi_1$, $x = \xi_1$ bis $x = \xi_2$ etc. und substituirt in jedem einzelnen Integrale die Umkehrung der Gleichung $y = \varphi(x)$, welche dem betreffenden Integrationsintervalle entspricht.

Ein paar allgemeine Beispiele zu dieser Regel sind folgende. Es sei erstlich $\varphi(x) = x^2 + 2rx$, $a = -\infty$, $b = +\infty$, so tritt ein Maximum ein für $x = -r$ und aus $x^2 + 2rx = y$ folgen die beiden Werthe

$$x = -r - \sqrt{r^2 + y},\quad x = -r + \sqrt{r^2 + y},$$

von welchen der erste $< -r$, der zweite $> -r$ ist; nach diesen Bemerkungen hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + 2rx)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-r} f(x^2 + 2rx)\,dx + \int_{-r}^{\infty} f(x^2 + 2rx)\,dx$$

$$= \int_{+\infty}^{-r^2} f(x)\cdot\frac{-dy}{2\sqrt{r^2 + y}} + \int_{-r^2}^{+\infty} f(y)\cdot\frac{+dy}{2\sqrt{r^2 + y}},$$

und wenn man im ersten Integrale rechter Hand die Integrationsgrenzen vertauscht, wodurch es mit dem zweiten Integrale identisch wird, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + 2rx)\,dx = \int_{-r^2}^{\infty} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{r^2 + y}};$$

für $y = r^2(z^2 - 1)$ erhält man noch:

5) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + 2rx)\,dx = 2r\int_0^{\infty} f[r^2(z^2 - 1)]\,dz.$$

Es sei zweitens $\varphi(x) = \gamma x + \frac{\alpha}{x}$, $a = 0$, $b = \infty$, so tritt für $x = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ein Minimum ein; wir setzen daher:

$$\int_0^\infty f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx + \int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}}^\infty f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung $\gamma x + \frac{\alpha}{x} = y$ sind:

$$x = \frac{1}{2\gamma}\left[y - \sqrt{y^2 - 4\alpha\gamma}\right],\ x = \frac{1}{2\gamma}\left[y + \sqrt{y^2 - 4\alpha\gamma}\right],$$

und daher wird aus der obigen Gleichung die folgende:

$$\int_0^\infty f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\int_\infty^{2\sqrt{\alpha\gamma}} f(y)\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4\alpha\gamma}}\right] dy + \frac{1}{2\gamma}\int_{2\sqrt{\alpha\gamma}}^\infty f(y)\left[1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4\alpha\gamma}}\right] dy,$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$\int_0^\infty f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_{2\sqrt{\alpha\gamma}}^\infty f(y)\, \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 - 4\alpha\gamma}}.$$

Nehmen wir weiter $\sqrt{y^2 - 4\alpha\gamma} = z$, so ergiebt sich noch:

6) $$\int_0^\infty f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty f(\sqrt{4\alpha\gamma + z^2})\, dz.$$

Hieraus lassen sich noch mancherlei andere Transformationsformeln ableiten; für $f(u) = F\left(\frac{1}{\beta + u}\right)$ folgt z. B.:

7) $$\int_0^\infty F\left(\frac{x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty F\left(\frac{1}{\beta + \sqrt{4\alpha\gamma + z^2}}\right) dz,$$

für $f(u) = F(u^2 - 2\alpha\gamma)$ dagegen ergiebt sich aus Nro. 6)

8) $$\int_0^\infty F\left(\gamma^2 x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty F(2\alpha\gamma + z^2)\, dz,$$

und wenn man $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, $x^2 = u$, $z^2 = t$ setzt:

$$9)\quad \int_0^\infty F\left(cu+\frac{a}{u}\right)\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty F(2\sqrt{ac}+t)\frac{dt}{\sqrt{t}},$$

endlich für $F(z)=\varphi\left(\frac{1}{b+z}\right)$:

$$10)\quad \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{a+bu+cu^2}\right)\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{b+2\sqrt{ac}+t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Diese Beispiele mögen hinreichen, um die vielfache Umwandelbarkeit bestimmter Integrale erkennen zu lassen.

§. 92.

Die Differentialquotienten bestimmter Integrale.

Aus der Definition des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

geht unmittelbar hervor, dass der Werth desselben nicht mehr von x sondern nur von den Integrationsgrenzen a und b, der Natur der Function $f(x)$ und den in ihr vorkommenden Constanten abhängig ist. Denkt man sich diese Constanten als willkürlich, so kann man den Werth des Integrales in Beziehung auf diese Constanten differenziren.

Aendert sich b allein, so ist der Differenzenquotient des Integrales:

$$\frac{\int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx}{\Delta b};$$

die völlige Willkürlichkeit des Δb erlaubt, dasselbe als eine von den Grössen δ zu betrachten, welche in der Definition des bestimmten Integrales Nro. 2) in §. 89 vorkommen, also $\Delta b=\delta_{n+1}$ zu setzen; man hat dann für verschwindende $\delta_1, \delta_2, \ldots . \delta_n$ und $\delta_{n+1}=db$:

$$\int^b f(x)\,dx=f(a)\delta_1+f(a+\delta_1)\delta_2+f(a+\delta_1+\delta_2)\delta_3+\cdots$$
$$\cdots+f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1})\delta$$

$$\int_a^{b+db} f(x)\,dx = f(a)\,\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \cdots$$
$$\cdots + f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1})\,\delta_n$$
$$+ f(a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n)\,\delta_{n+1},$$

mithin durch Subtraction, Division mit $db = \delta_{n+1}$ und weil $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n + \delta_{n+1} = b - a + db$ in $b - a$ übergeht,

$$1)\qquad \frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{db} = f(b).$$

Dieses Resultat stimmt damit überein, dass der Differentialquotient einer ebenen Fläche die letzte Ordinate ist.

Aus der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ergiebt sich durch beiderseitige Differentiation in Beziehung auf a, welches rechter Hand die obere Grenze bildet,

$$2)\qquad \frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{da} = -f(a).$$

Enthält die Function $f(x)$ ausser x noch eine willkürliche Constante r, in welchem Falle wir $f(x,r)$ für $f(x)$ schreiben, und sind ausserdem a und b von r unabhängig, so hat man die Gleichung

$$\frac{\int_a^b f(x,r+\Delta r)\,dx - \int_a^b f(x,r)\,dx}{\Delta r} = \int_a^b \frac{f(x,r+\Delta r) - f(x,r)}{\Delta r}\,dx.$$

Rechter Hand lässt sich der bekannte Satz

$$f(r+h) = f(r) + hf_r'(r) + \tfrac{1}{2}h^2 f_r''(r+\varepsilon h)$$
$$0 < \varepsilon < 1$$

für $h = \Delta r$ anwenden und giebt

$$\frac{\int_a^b f(x,r+\Delta r)\,dx - \int_a^b f(x,r)\,dx}{\Delta r}$$
$$= \int_a^b f_r'(x,r)\,dx + \tfrac{1}{2}\Delta r \int_a^b f_r''(x,r+\varepsilon\Delta r)\,dx.$$

Ist nun bei unendlich abnehmenden Δr

3) $$Lim \left\{ \Delta r \int_a^b f_r''(x, r + \varepsilon \Delta r)\, dx \right\} = 0,$$

so folgt aus der vorigen Gleichung durch Uebergang zur Grenze für verschwindende Δr

4) $$\frac{d \int_a^b f(x,r)\, dx}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r} dx.$$

Die in Nro. 3) angegebene Bedingung ist übrigens immer erfüllt, wenn a und b endliche Grössen sind und wenn gleichzeitig $f_r''(x, r)$ von $x = a$ bis $x = b$ nur endliche Werthe hat. Aus Formel 4) in §. 90 folgt nämlich

$$\int_a^b f_r''(x, r + \varepsilon \Delta r)\, dx = (b - a) f_r''(a + \vartheta [b - a], r + \varepsilon \Delta r),$$

das Integral besitzt also einen endlichen Werth und wenn dieser mit Δr multiplicirt wird, so convergirt das Product gleichzeitig mit Δr gegen die Grenze Null. In jedem anderen Falle muss besonders untersucht werden, ob die Bedingung 3) erfüllt ist.

Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall, wenn nämlich r in $f(x)$ und zugleich in a und b vorkommt; der Werth des Integrales, der für den Augenblick W heissen möge, ist dann eine Function dreier Variabelen a, b, r, deren beide erste wiederum von der letzten abhängen; es gilt hier die bekannte Regel der Differentialrechnung

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\partial W}{\partial a} \cdot \frac{da}{dr} + \frac{\partial W}{\partial b} \cdot \frac{db}{dr} + \frac{\partial W}{\partial r},$$

und sie giebt in unserem Falle

$$\frac{dW}{dr} = -f(a,r) \frac{da}{dr} + f(b,r) \frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\, dx,$$

oder, wenn man einen in Beziehung auf r genommenen Differentialquotienten kurz mit D_r bezeichnet,

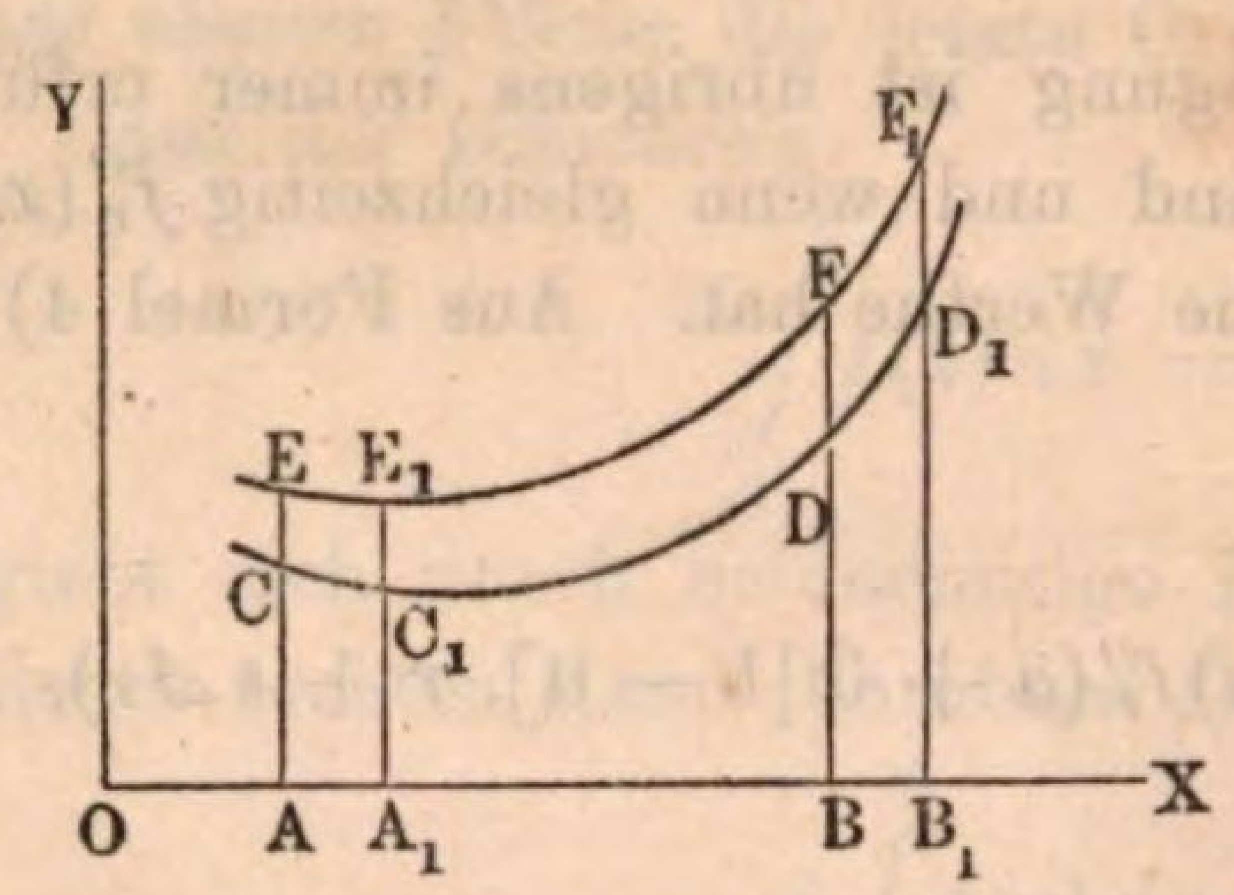
5) $$D_r \int_a^b f(x,r)\,dx$$

$$= \int_a^b [D_r f(x,r)]\,dx + f(b,r)\,.\,D_r b - f(a,r)\,.\,D_r a,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Bedingungsgleichung 3) stattfindet.

Dieses Resultat wird anschaulich, wenn man sich $y = f(x,r)$ als Gleichung einer Curve und das bestimmte Integral wiederum als die über der Strecke $b - a = AB$, Fig. 75, der Abscissenachse stehende Fläche $ABDC$ denkt. Aendert sich nämlich r in $f(x,r)$ allein, so erhält man eine ähnliche Curve von anderem Parameter, und die Fläche $ABDC$ nimmt um den Streifen $CDFE$ zu, welcher durch

Fig. 75.



$$\int_a^b [D_r f(x,r)\,.\,dr]\,dx$$

ausgedrückt wird. Durch die alleinige Aenderung von b wächst die Fläche um $BB_1D_1D = f(b,r)\,.\,D_r b\,.\,dr$, und durch Aenderung des a vermindert sie sich um $AA_1C_1C = f(a,r)\,.\,D_r a\,.\,dr$. Die gleichzeitige Aenderung von r, b und a verwandelt die ursprüngliche Fläche in $A_1B_1F_1E_1$, und mit Weglassung der Vierecke DD_1F_1F, CC_1E_1E, welche unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sind, hat man

$$A_1B_1F_1E_1 - ABDC = CDFE + BB_1D_1D - AA_1C_1C;$$

aus diesem Differential der Fläche $ABDC$ ergiebt sich derselbe Differentialquotient wie oben.

Will man das Integral mehrmals nach einander in Beziehung auf r differenziren, so ist es von Vortheil, die beiden letzten Glieder rechter Hand in Nro. 5) durch die Differenz

$$D_r\{bf(b,r) - af(a,r)\} - \{b\,D_r f(b,r) - a\,D_r f(a,r)\}$$

zu ersetzen; die wiederholte Differentiation giebt dann immer Ausdrücke von derselben Form, nämlich:

6)
$$D_r^n \int_a^b f(x,r)\,dx$$
$$= \int_a^b \left[D_r^n f(x,r)\right] dx + D_r^n \left\{ b f(b,r) - a f(a,r) \right\}$$
$$- \left\{ b D_r^n f(b,r) - a D_r^n f(a,r) \right\}.$$

Zum Ueberfluss könnte man diese Formel noch mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ verificiren.

Sehr häufig benutzt man die Differentiation in Beziehung auf einen Parameter r um aus einem bekannten Integrale mehrere andere Integrale herzuleiten. Setzt man z. B. in der Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}$$

$\alpha^2 = r$ und differenzirt die nunmehrige Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{r \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega} = \frac{\pi}{2\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

n-mal in Beziehung auf r, was hier ohne weiteres erlaubt ist, so erhält man

$$(-1)^n\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2n} \omega\, d\omega}{(r \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^{n+1}}$$
$$= \frac{\pi}{2\beta} (-1)^n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{r^n \sqrt{r}}$$

und nach Restitution des Werthes von r

7)
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2n} \omega\, d\omega}{(\alpha^2 \cos^2 \omega + \beta^2 \sin^2 \omega)^{n+1}} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ (2n)} \frac{\pi}{2\alpha^{2n+1}\beta}.$$

Diese Gleichung könnte man wieder mehrmals in Beziehung auf β^2 differenziren, was ein noch allgemeineres Resultat geben würde.

In manchen Fällen dient dasselbe Verfahren in umgekehrter Weise zur Werthbestimmung von Integralen. Ist nämlich W der unbekannte Werth eines Integrales, so kann es geschehen, dass $\frac{dW}{dr}$ ein einfacheres Integral darstellt, dessen Werth V bekannt ist; man

findet dann $W = \int V\,dr$. Ein Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$8)\qquad W = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-rx}}{x}\,dx\quad r, > 0.$$

Da hier die obere Integrationsgrenze unendlich ist, so müssen wir untersuchen, wie in der Gleichung

$$\frac{\Delta W}{\Delta r} = \int_0^\infty \frac{e^{-rx} - e^{-(r+\Delta r)x}}{x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left\{ e^{-rx} - \tfrac{1}{2}x\,e^{-(r+\varepsilon\Delta r)x}\,\Delta r \right\} dx$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\Delta r \int_0^\infty x\,e^{-(r+\varepsilon\Delta r)x}\,dx$$

der letzte Ausdruck sich bei verschwindenden Δr gestaltet. Giebt man dem ε seinen kleinsten und grössten Werth, so ist leicht zu sehen, dass der Werth des noch übrigen Integrales weniger beträgt als

$$\int_0^\infty x\,e^{-rx}\,dx = \frac{1}{r^2},$$

dagegen mehr als

$$\int_0^\infty x\,e^{-(r+\Delta r)x}\,dx = \frac{1}{(r+\Delta r)^2};$$

hieraus folgt

$$Lim \left\{ \Delta r \int_0^\infty x\,e^{-(r+\varepsilon\Delta r)x}\,dx \right\} = 0,$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{r}.$$

Durch Integration erhält man

$$W = l\,r + Const.,$$

und hier bestimmt sich die Integrationsconstante aus der Bemerkung, dass (nach Nro. 8) $W = 0$ werden muss für $r = 1$; es ist daher $Const. = 0$, $W = l\,r$ d. h.

$$9)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-rx}}{x}\,dx = l\,r,\quad r > 0.$$

Nach demselben Verfahren erhält man

$$10)\quad \int_0^{\infty}\frac{[(r-1)x-1]\,e^{-x}+e^{-rx}}{x^2}\,dx=r(lr-1)+1,\ r>0.$$

§. 93.

Verwandlung von bestimmten Integralen in Reihen.

Wie bei unbestimmten, so benutzt man auch bei bestimmten Integralen unendliche Reihen zur Berechnung der Integralwerthe; dabei hat man wiederum zu berücksichtigen, dass die Formel

$$\int_a^b (u_0+u_1+u_2+\cdots)\,dx=\int_a^b u_1\,dx+\int_a^b u_2\,dx+\int_a^b u_3\,dx+\cdots$$

nicht ohne Weiteres auf den Fall anwendbar ist, wo die Reihe ins Unendliche fortgeht; man muss daher die Reihe erst als endliche nehmen, ihren Rest hinzufügen und schliesslich untersuchen, ob das Restintegral sich der Grenze Null nähert, wenn die Anzahl der Reihenglieder unendlich wächst (vergl. §. 67, II.). Einige Beispiele mögen dies zeigen.

a Das zu berechnende Integral sei

$$U=\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x}.$$

Wollte man geradezu

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

setzen, so würde ein unbrauchbares Resultat von der Form $U=+\infty-\infty+\infty-\infty+$ etc. zum Vorschein kommen; man muss daher erst eine Umwandlung des Integrales vornehmen. Nun ist

$$U=\int_0^1\frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x}+\int_1^{\infty}\frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x};$$

im ersten Integrale schreiben wir y für x, wodurch sich dasselbe nicht ändert; im zweiten Integrale benutzen wir die Substitution

$$\frac{1}{x}=y,\quad x=\frac{1}{y},\quad dx=-\frac{dy}{y^2},$$

und erhalten statt jenes Integrales

$$-\int_1^0 \frac{dy}{y^\mu(y+1)} = +\int_0^1 \frac{y^{-\mu}dy}{1+y};$$

mit dem vorigen Integrale zusammen giebt dies

$$U = \int_0^1 \frac{y^{\mu-1} + y^{-\mu}}{1+y}\, dy.$$

Hier lässt sich die Reihenentwickelung

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots + (-1)^{n-1} y^{n-1} + \frac{(-1)^n y^n}{1+y}$$

benutzen und die entstehenden Einzelintegrale haben endliche Werthe sobald die Grössen

$$\begin{array}{lllll} \mu, & \mu+1, & \mu+2, \cdots\cdots & \mu+n-1, \\ -\mu+1, & -\mu+2, & -\mu+3, \cdots\cdots & -\mu+n, \end{array}$$

positiv sind, d. h. μ zwischen 0 und 1 liegt. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich

$$U = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{1+\mu} + \frac{1}{2+\mu} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1+\mu}$$

$$+ \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{2-\mu} + \frac{1}{3-\mu} - \cdots\cdot + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\mu}$$

$$+ (-1)^n \int_0^1 \frac{y^{\mu-1} + y^{-\mu}}{1+y}\, y^n dy$$

oder auch durch Zusammenziehung von je zwei Brüchen

$$U = \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{2^2 - \mu^2} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{2\mu}{(n-1)^2 - \mu^2}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\mu} + (-1)^n \int_0^1 \frac{y^\mu + y^{1-\mu}}{1+y}\, y^{n-1} dy.$$

Man bemerkt leicht, dass $y^\mu + y^{1-\mu}$ immer zwischen 0 und 2 enthalten ist und dass folglich der Werth des letzten Integrales mehr als Null beträgt, aber weniger als

$$2\int_0^1 \frac{y^{n-1}}{1+y}\, dy < 2\int_0^1 y^{n-1} dy$$

mithin weniger als $\frac{2}{n}$ (vergl. §. 90 Formel 2). Lässt man daher in der Gleichung

$$U - (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\mu} - (-1)^n \int_0^1 \frac{y^\mu + y^{1-\mu}}{1+y} y^{n-1} dy$$

$$= \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\mu}{2^2-\mu^2} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{2\mu}{(n-1)^2 - \mu^2}$$

die Zahl n unendlich wachsen, so erhält man für U die Entwickelung

$$U = \frac{1}{\mu} + \frac{2\mu}{1^2-\mu^2} - \frac{2\mu}{2^2-\mu^2} + \frac{2\mu}{3^2-\mu^2} - \cdots\cdots$$

Die vorliegende Reihe ist summirbar nach Formel 6) in §. 50; zufolge der ursprünglichen Bedeutung von U und des nachher gefundenen Werthes hat man

1) $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi},\quad 0 < \mu < 1,$$

oder auch für $x = t^2 = \tan^2\theta$ und $2\mu - 1 = \lambda$

2) $$\int_0^\infty \frac{t^\lambda\,dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan^\lambda\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\lambda\pi},\quad -1 < \lambda < +1.$$

b. Versteht man unter p eine ganze positive Zahl > 0 und setzt

$$V = \int_0^\infty \frac{z^p\,dz}{e^z - 1},$$

so hat man identisch

$$V = \int_0^\infty z^p \left\{ e^{-z} + e^{-2z} + \cdots + e^{-nz} + \frac{e^{-(n+1)z}}{1-e^{-z}} \right\} dz$$

$$= 1.\,2\cdots p \left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}} \right]$$

$$+ \int_0^\infty \frac{z}{e^z - 1} z^{p-1} e^{-nz}\,dz.$$

Sehr einfache Betrachtungen zeigen, dass der Quotient $z : (e^z - 1)$ immer zwischen Null und der Einheit liegt; das letzte Integral hat daher einen positiven Werth, der weniger beträgt als

$$\int_0^\infty z^{p-1} e^{-nz}\,dz = \frac{1\cdot 2\cdots(p-1)}{n^p}.$$

Versteht man unter ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch, so lässt sich die vorige Gleichung in der Form

$$V - \varrho \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p-1)}{n^p}$$

$$= 1 \,.\, 2 \ldots p \left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{p+1}}\right]$$

schreiben und hieraus folgt bei unendlich wachsenden n und constant bleibenden p

$$V = 1 \cdot 2 \cdots p \left[\frac{1}{1^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \cdots\right]$$

oder nach einer schon früher (§ 50) gebrauchten Bezeichnung

3) $$\int_0^\infty \frac{z^p \, dz}{e^z - 1} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p S_{p+1}, \quad p > 0.$$

In dem Falle eines ungeraden $p = 2q - 1$ lässt sich S_{2q} durch die Bernoulli'sche Zahl B_{2q-1} ausdrücken (§. 50, Nro. 28); es wird dann

4) $$\int_0^\infty \frac{z^{2q-1} \, dz}{e^z - 1} = \frac{2^{2q-1} B_{2q-1} \pi^{2q}}{2q}$$

oder auch wenn man statt z eine neue Variabele τ mittelst der Substitution $z = 2\pi\tau$ einführt,

5) $$\int_0^\infty \frac{\tau^{2q-1} \, d\tau}{e^{2\pi\tau} - 1} = \frac{B_{2q-1}}{4q}.$$

c. Als letztes Beispiel diene die Entwickelung des Integrales

$$W = \int_0^\infty \frac{\sin \beta z}{e^z - 1} \, dz.$$

Zunächst ergiebt sich auf ähnliche Weise wie vorhin

$$W = \int_0^\infty \left\{e^{-z} + e^{-2z} + \cdots + e^{-nz} + \frac{e^{-(n+1)z}}{1 - e^{-z}}\right\} \sin \beta z \, dz$$

$$= \frac{\beta}{\beta^2 + 1^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + 2^2} + \cdots\cdots + \frac{\beta}{\beta^2 + n^2}$$

$$+ \beta \int_0^\infty \frac{z}{e^z - 1} \, \frac{\sin \beta z}{\beta z} \, e^{-nz} \, dz;$$

das Product

$$\frac{z}{e^z - 1} \frac{\sin \beta z}{\beta z}$$

liegt immer zwischen $+1$ und -1, daher ist das letzte Integral zwischen

$$+\int_0^\infty e^{-nz}\, dz = +\frac{1}{n} \text{ und } -\int_0^\infty e^{-nz}\, dz = -\frac{1}{n}$$

enthalten, und folglich kann man statt der vorigen Gleichung schreiben

$$W - \frac{\beta \varrho}{n} = \frac{\beta}{\beta^2 + 1^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + 2^2} + \dots + \frac{\beta}{\beta^2 + n^2},$$
$$-1 < \varrho < +1.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n wird hieraus

$$W = \frac{\beta}{\beta^2 + 1^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + 2^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + 3^2} + \dots$$

d. i. nach Formel 6) in §. 59

6) $$\int_0^\infty \frac{\sin \beta z}{e^z - 1}\, dz = \tfrac{1}{2}\left\{\pi \frac{e^{\beta\pi} + e^{-\beta\pi}}{e^{\beta\pi} - e^{-\beta\pi}} - \frac{1}{\beta}\right\}.$$

Setzt man noch

$$z = 2\pi\tau,\ \beta = \frac{\alpha}{2\pi},$$

so wird die Gleichung 6) zur folgenden

7) $$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha\tau}{e^{2\pi\tau} - 1}\, d\tau = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

8) $$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \alpha\tau}{e^{2\pi\tau} - 1} \frac{d\tau}{\tau} = \tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{2}\left\{l(1 - e^{-\alpha}) - l\alpha\right\},$$

welche Formel sich leicht durch Differentiation in Beziehung auf α verificiren lässt.

§. 94

Reihensummirungen durch bestimmte Integrale.

Da ein bestimmtes Integral als ein geschlossener Ausdruck gelten kann, dessen Werth sich nach §. 82 mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit berechnen lässt, so ist es nicht selten von Vortheil, endliche oder unendliche Reihen in bestimmte Integrale zu verwandeln, also die Summen jener durch die Werthe der letzteren auszudrücken. Einige allgemeinere Beispiele hierzu sind folgende.

I. Setzen wir wie in §. 18, Nr. 14)

$$\psi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1\,.\,2} f''(x) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

so ergiebt sich

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n)}(x)$$

mithin umgekehrt durch Integration

$$\psi(x) = \int \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n)}(x)\,dx + Const.$$

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir erst $x=b$, dann $x=a$ und subtrahiren die so entstehenden Werthe von $\psi(x)$. Ist nun $f^{(n)}(x)$ endlich und stetig von $x=a$ bis $x=b$, so ist es auch das Product $(b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)$, und die Differenz $\psi(b) - \psi(a)$ besitzt dann denselben Werth wie das bestimmte Integral

$$\int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n)}(x)\,dx;$$

vermöge der Bedeutung von $\psi(x)$ erhalten wir

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) - \cdots\cdots$$

$$\cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n-1)}(a) = \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n)}(x)\,dx$$

oder

$$1)\qquad f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdot+\frac{(b-a)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$=f(b)-\int\limits_a^b\frac{(b-x)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)\,dx.$$

Setzen wir $b-a=h$ und schreiben u für x, so haben wir

$$2)\; f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$=f(a+h)-\int\limits_a^{a+h}\frac{(a+h-u)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)}f^{(n)}(u)\,du,$$

und dies ist nichts Anderes als eine Summenformel für die n ersten Glieder der Taylor'schen Reihe. Gewöhnlich schreibt man statt der Gleichung 2)

$$3)\qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

wo R_n den Rest der Reihe bezeichnet, nämlich

$$4)\qquad R_n=\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h-u)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}f^{(n)}(u)\,du.$$

Durch Substitution von $u=x+v$, $du=dv$ erhält letzterer die Form

$$5)\qquad R_n=\int\limits_0^h\frac{(h-v)^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+v)\,dv$$

und daraus wird für $v=hw$

$$6)\qquad R_n=\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\int\limits_0^1(1-w)^{n-1}f^{(n)}(x+hw)\,dw.$$

Nimmt man in der Gleichung 2) $a=0$ und schreibt x für h, so erhält man

$$7)\qquad f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1\,.\,2}x^2+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+\frac{f^{(n-1)}(0)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}x^{n-1}+R_n,$$

wobei der Rest R_n unter folgenden Formen dargestellt werden kann

8) $$R_n = \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{(n)}(u)\,du,$$

9) $$R_n = \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-1)} \int_0^1 (1-w)^{n-1} f^{(n)}(x\,w)\,dw.$$

Die in §. 18 unter Nro. 18) und 19) angegebenen Formeln des Restes der Taylor'schen Reihe können aus den obigen Gleichungen leicht hergeleitet werden, wenn man von den Formeln des Abschnittes I. in §. 90 Gebrauch macht.

II. In §. 82 wurde gezeigt, dass sich die Fläche

$$U = \int_a^b f(x)\,dx$$

mit beliebiger Genauigkeit berechnen lässt, und zwar ist nach den Formeln 9) und 10)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h) + \tfrac{1}{2}f(a+nh)]$$
$$- \tfrac{1}{12}h^2[f'(b) - f'(a)] + \tfrac{1}{384}\varrho\,(b-a)\,h^4 M,$$

worin

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad -1 < \varrho < +1,$$

und M den absolut grösseren Werth bezeichnet, welchen $f^{IV}(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ erreicht. Setzt man zur Vereinfachung $a = h = 1$, mithin $b = n + 1$ und addirt beiderseits $\frac{1}{2}f(n+1)$, so hat man

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n+1)$$
$$= \int_1^{n+1} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}[f(n+1) - f(1)]$$
$$+ \tfrac{1}{12}[f'(n+1) - f'(1)] - \tfrac{1}{384}\varrho\,n\,M$$

oder für $n + 1 = p$ und durch Trennung

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(p)$$
$$= \int^{(x=p)} f(x)\,dx - \int_{(x=1)} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}f(p) - \tfrac{1}{2}f(1)$$
$$+ \tfrac{1}{12}f'(p) - \tfrac{1}{12}f'(1) - \tfrac{1}{384}\varrho\,(p-1)\,M.$$

Der zweite, vierte und sechste Summand sind von p unabhängig und lassen sich zu einer Constanten C zusammenziehen, mithin ist

$$10)\quad f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(p)$$
$$= C + \int^{p} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}f(p) + \tfrac{1}{12}f'(p) - \tfrac{1}{384}\varrho(p-1)M.$$

Dabei müssen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ und $f^{IV}(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = 1$ bis $x = p$; unter M ist der absolut grösste Werth zu verstehen, den $f^{IV}(x)$ innerhalb des genannten Intervalles erreicht.

Wie die Formel 10) zur Summirung endlicher Reihen benutzt werden kann, mögen die folgenden zwei Beispiele zeigen.

a. Mit der Annahme $f(x) = \dfrac{1}{x}$ genügt man den angegebenen Bedingungen, und zwar für jedes $x > 1$; ferner ist

$$f^{IV}(x) = -\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{x^5},\quad M = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4,$$

mithin

$$11)\quad \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p}$$
$$= C + lp + \frac{1}{2p} - \frac{1}{12p^2} - \frac{\varrho(p-1)}{16p^5}.$$

Um die Constante C, die jedenfalls einen endlichen Werth haben muss, zu bestimmen, schaffen wir lp auf die linke Seite und gehen zur Grenze für unendlich wachsende p über; es wird dann

$$12)\quad Lim \left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - lp\right\} = C.$$

Diese Gleichung erhält eine bessere Gestalt, wenn die Formel

$$x - l(1+x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots\cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n\varepsilon}{n}x^n$$

benutzt, welche aus der Formel 1) in §. 46 durch die Substitutionen

$$p = n,\quad \frac{1}{(1+\vartheta x)^n} = \varepsilon$$

hervorgeht, und worin bei positiven x der Werth von ε zwischen 0 und 1 enthalten ist. Setzt man nämlich der Reihe nach $x = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots \dfrac{1}{p}$, so erhält man

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}-l(p+1)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}\right)-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{p^3}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\left(\frac{1}{1^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{p^{n-1}}\right)$$

$$\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\varepsilon_1}{1^n}+\frac{\varepsilon_2}{2^n}+\cdots+\frac{\varepsilon_n}{p^n}\right),$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ verschiedene positive echte Brüche bezeichnen. Zufolge dieses Umstandes liegt die letzte Summe zwischen Null und

$$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{p^n},$$

sie bildet also einen Bruchtheil dieses Ausdruckes. Zerlegt man $l(p+1)$ in $lp+l\left(1+\frac{1}{p}\right)$ und geht zur Grenze für unendlich wachsende p über, so wird

$$C=\tfrac{1}{2}S_2-\tfrac{1}{3}S_3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}S_{n-1}+\frac{(-1)^n\varepsilon}{n}S_n,$$

und für unendliche n

13) $$C=\tfrac{1}{2}S_2-\tfrac{1}{3}S_3+\tfrac{1}{4}S_4-\cdots;$$

dabei haben S_2, S_3, S_4, etc. die nämliche Bedeutung wie in §. 50 Formel 8). Die in Nro. 13) vorkommende Reihe wird rascher convergent, wenn man sie mit der Gleichung

$$0=1-l2-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\cdots$$

vereinigt, nämlich

14) $$C=1-l2+\tfrac{1}{2}(S_2-1)-\tfrac{1}{3}(S_3-1)+\cdots\cdot$$

und hieraus findet man

$$C=0{,}5772156649\cdots$$

Nimmt man in Formel 11) beispielweis $p=1000$, so wird der Rest

$$\frac{\varrho(p-1)}{16p^5}<\frac{1}{16\,.\,1000^4}<\frac{1}{10^{13}},$$

mithin erhält man die Summe der Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1000}$ auf wenigstens 12 Decimalen genau; sie ist $7{,}48547086\cdots$

b. Die Annahme $f(x)=lx$ genügt gleichfalls den aufgestellten Bedingungen, falls $x>1$ ist; sie giebt

15) $$l1 + l2 + \cdots lp = l(1.2.3\ldots p)$$
$$= C + p(lp-1) + \tfrac{1}{2}lp + \frac{1}{12p} + \frac{\varrho(p-1)}{64p^4}.$$

Um die Constante zu bestimmen, erinnern wir an die identische Gleichung

$$1.3.5\ldots(2q-1) = \frac{1.2.3.4\ldots(2q)}{2.4.6.8\ldots(2q)} = \frac{1.2.3\ldots(2q)}{2^q.1.2.3\ldots q},$$

woraus folgt

$$\frac{2.4.6\ldots(2q)}{1.3.5\ldots(2q-1)} = \frac{2^{2q}(1.2.3\ldots q)^2}{1.2.3\ldots(2q)}.$$

Wir nehmen beiderseits die natürlichen Logarithmen, wodurch rechts der Ausdruck $2ql2 + 2l(1.2..q) - l(1.2..2q)$ entsteht, und transformiren die Logarithmen der Producte $1.2\ldots q$ und $1.2\ldots 2q$ nach Formel 15), wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{12p} + \frac{\varrho(p-1)}{64p^4} = U_p$$

sein möge; wir erhalten so

$$l\left(\frac{2.4.6\ldots(2q)}{1.3.5\ldots(2q-1)}\right) = C - \tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{1}{2}lq + 2U_q - U_{2q}$$

oder nach Multiplication mit 2 und Subtraction von $l(2q+1)$

$$l\left(\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2q)^2}{3^2.5^2\ldots(2q-1)^2(2q+1)}\right) = 2C - l2 - l\left(2+\frac{1}{q}\right) + 2U_q - U_{2q}.$$

Die linke Seite kann unter der Form

$$l\left(\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}\ldots\frac{2q}{2q-1}.\frac{2q}{2q+1}\right)$$

dargestellt werden und convergirt bei unendlich wachsenden q gegen die Grenze $l(\frac{1}{2}\pi)$ (s. S. 237); rechter Hand nähern sich $\frac{1}{q}$, U_q und U_{2q} der gemeinschaftlichen Grenze Null, mithin bleibt

$$l(\tfrac{1}{2}\pi) = 2C - 2l2 \text{ oder } C = \tfrac{1}{2}l(2\pi).$$

Nach Nro. 15 ist nun

16) $$l(1.2.3\ldots p) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (p+\tfrac{1}{2})lp - p + \frac{1}{12p} + \frac{\varrho(p-1)}{64p^4},$$

welche Formel bei grossen p eine ansehnliche Genauigkeit gewährt.

Benutzt man wieder U_p zur Abkürzung, so hat man nach Nro. 16)

17) $$1.2.3\ldots p = \sqrt{2p\pi}\left(\frac{p}{e}\right)^p e^{U_p}.$$

Vermöge der Bemerkung, dass der Binomialcoefficient $(\mu)_k$ eines ganzen Exponenten μ unter der Form

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(\mu-k)\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,k}$$

dargestellt werden kann, folgt aus Nro. 17) das Resultat

$$(\mu)_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{(\mu-k)^{\mu-k+\frac{1}{2}}\,k^{k+\frac{1}{2}}}\,e^{U\mu - U(\mu-k) - Uk},$$

welches für die Wahrscheinlichkeitsermittelung bei oft wiederholten Versuchen von Werth ist.

Cap. XVI.

Die mehrfachen bestimmten Integrale.

§. 95.

Die Doppelintegrale und ihre Anwendung zur Cubatur begrenzter Räume.

Wenn eine Function zweier Variabelen x und y zuerst in Beziehung auf y bei constant bleibenden x integrirt und das Ergebniss dieser Integration einer neuen auf x bezüglichen Integration unterworfen wird, so entsteht ein Doppelintegral, welches man durch

$$\int dx \int f(x,y)\,dy$$

bezeichnet und wobei die Anordnung beider Integrationen von der Rechten zur Linken gelesen wird. So ist z. B.

$$\int dx \int \frac{y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \int dx \left\{ -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C \right\}$$
$$= -l\,(x+\sqrt{x^2+y^2}) + Cx + C_1$$

und darin bedeuten C und C_1 die beiden durch die Integrationen eingeführten willkührlichen Constanten. Wie man sieht, bietet die Sache keine Besonderheiten dar so lange die Integrationen unbestimmt bleiben, sie verlangt dagegen eine genauere Untersuchung falls die Integrationen zwischen bestimmten Grenzen vorgenommen werden sollen.

Nach der primitiven summatorischen Bedeutung des einfachen Integrales ist

$$\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy$$

die Grenze, welcher sich die Summe

$$f(x,y_0)\,\varepsilon_1 + f(x,y_0+\varepsilon_1)\,\varepsilon_2 + f(x,y_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\varepsilon_3 + \cdots$$
$$\cdots + f(x,y_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1})\,\varepsilon_n$$

unendlich nähert, wenn die Anzahl der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ in's Unendliche wächst, während gleichzeitig jede einzelne derselben gegen die Null convergirt und ihre Summe $= Y - y_0$ bleibt. Dieser Grenzwerth kann auch als Differenz zweier Specialwerthe des unbestimmten Integrales

$$\int f(x,y)\,dy = F(x,y) + Const.$$

angesehen werden, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass $F(x,y)$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und stetig bleibt. Diese Voraussetzung festhaltend, dürfen wir

$$f(x,y_0)\,\varepsilon_1 + f(x,y_0+\varepsilon_1)\,\varepsilon_2 + f(x,y_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\varepsilon_3 + \cdots$$
$$\cdots + f(x,y_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1})\,\varepsilon_n$$
$$= F(x,Y) - F(x,y_0) - \sigma$$

setzen, wobei nach §. 64 S. 301 die mit σ bezeichnete Grösse zwischen $-\mu(Y-y_0)$ und $+\mu(Y-y_0)$ liegt, wenn μ eine beliebig kleine willkührlich gewählte Zahl bezeichnet. Geben wir dem x der Reihe nach die Werthe x_0, $x_0+\delta_1$, $x_0+\delta_1+\delta_2, \ldots x_0+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{m-1}$ und multipliciren die entstehenden Gleichungen mit $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$, so erhalten wir durch Addition

$$f(x_0,y_0)\,\delta_1\,\varepsilon_1 + f(x_0,y_0+\varepsilon_1)\,\delta_1\,\varepsilon_2 + f(x_0,y_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\delta_1\,\varepsilon_3 + \cdots$$
$$+ f(x_0+\delta_1,y_0)\,\delta_2\,\varepsilon_1 + f(x_0+\delta_1,\,y_0+\varepsilon_1)\,\delta_2\,\varepsilon_2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ f(x_0+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{m-1},\,y_0)\,\delta_m\,\varepsilon_1 + \cdots$$
$$= [F(x_0,Y)-F(x_0,y_0)]\,\delta_1 + [F(x_0+\delta_1,Y)-F(x_0+\delta_1,y_0)]\,\delta_2 + \cdots$$
$$-(\sigma_1\,\delta_1+\sigma_2\,\delta_2+\cdots+\sigma_m\,\delta_m),$$

worin jede der Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ beliebig klein gemacht werden kann. Wählen wir $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ so, dass ihre Summe $= X - x_0$ ist, so haben wir linker Hand eine Doppelsumme von der Form

$$\Sigma\Sigma f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

worin sich die zwei Summenzeichen auf die für x und y geltenden Werthepaare

$$\begin{array}{lll} x_0, y_0; & x_0, y_0 + \varepsilon_1; & x_0, y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \dots \\ x_0 + \delta_1, y_0; & x_0 + \delta_1, y_0 + \varepsilon_1; & x_0 + \delta_1, y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \dots \\ x_0 + \delta_1 + \delta_2, y_0; & x_0 + \delta_1 + \delta_2, y_0 + \varepsilon_1; & x_0 + \delta_1 + \delta_2, y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \dots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

beziehen und der Reihe nach

$$\Delta x = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots \delta_m,$$
$$\Delta y = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n,$$

zu nehmen ist. Die erste Summe rechter Hand lässt sich

$$= \int\limits_{x_0}^{X} [F(x, Y) - F(x, y_0)]\, dx - \varrho$$

setzen, wo ϱ gegen die Null convergirt, wenn m unendlich wächst, jedoch ist hierzu die Bedingung erforderlich, dass $F(x, y)$ endlich und stetig bleibt innerhalb der Intervalle $x = x_0$ bis $x = X$ und $y = y_0$ bis $y = Y$. Was endlich die Summe $\sigma_1 \delta_1 + \sigma_2 \delta_2 +$ etc. anbelangt, so zeigen ganz ähnliche Schlüsse wie in §. 64, dass sie zwischen $-\lambda(X - x_0)$ und $+\lambda(X - x_0)$ gefasst werden kann, wo λ eine beliebig kleine Grösse ist. Durch Uebergang zur Grenze für gleichzeitig unendlich wachsende m und n ergiebt sich nach diesen Bemerkungen

$$Lim\, \Sigma\Sigma f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y = \int\limits_{x_0}^{X} [F(x, Y) - F(x, y_0)]\, dx.$$

Um diesen Satz in Worten ausdrücken zu können, setzen wir

$$Lim\, \Sigma\Sigma f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y = \int\limits_{x_0}^{X} \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy,$$

d. h. wir definiren das bestimmte Doppelintegral als den Grenzwerth der Doppelsumme von $f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$, wenn x und y alle mit den Integrationsgrenzen verträglichen Werthepaare erhalten und Δx und Δy gegen die Null convergiren; die Gleichung

$$\int\limits_{x_0}^{X} \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx,\, dy = \int\limits_{x_0}^{X} [F(x, Y) - F(x, y_0)]\, dx$$
$$= \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

zeigt dann, dass jener Grenzwerth auch durch zwei aufeinander fol-

gende Integrationen gefunden werden kann, falls die Integrationsgrenzen endliche Grössen sind und die Functionen

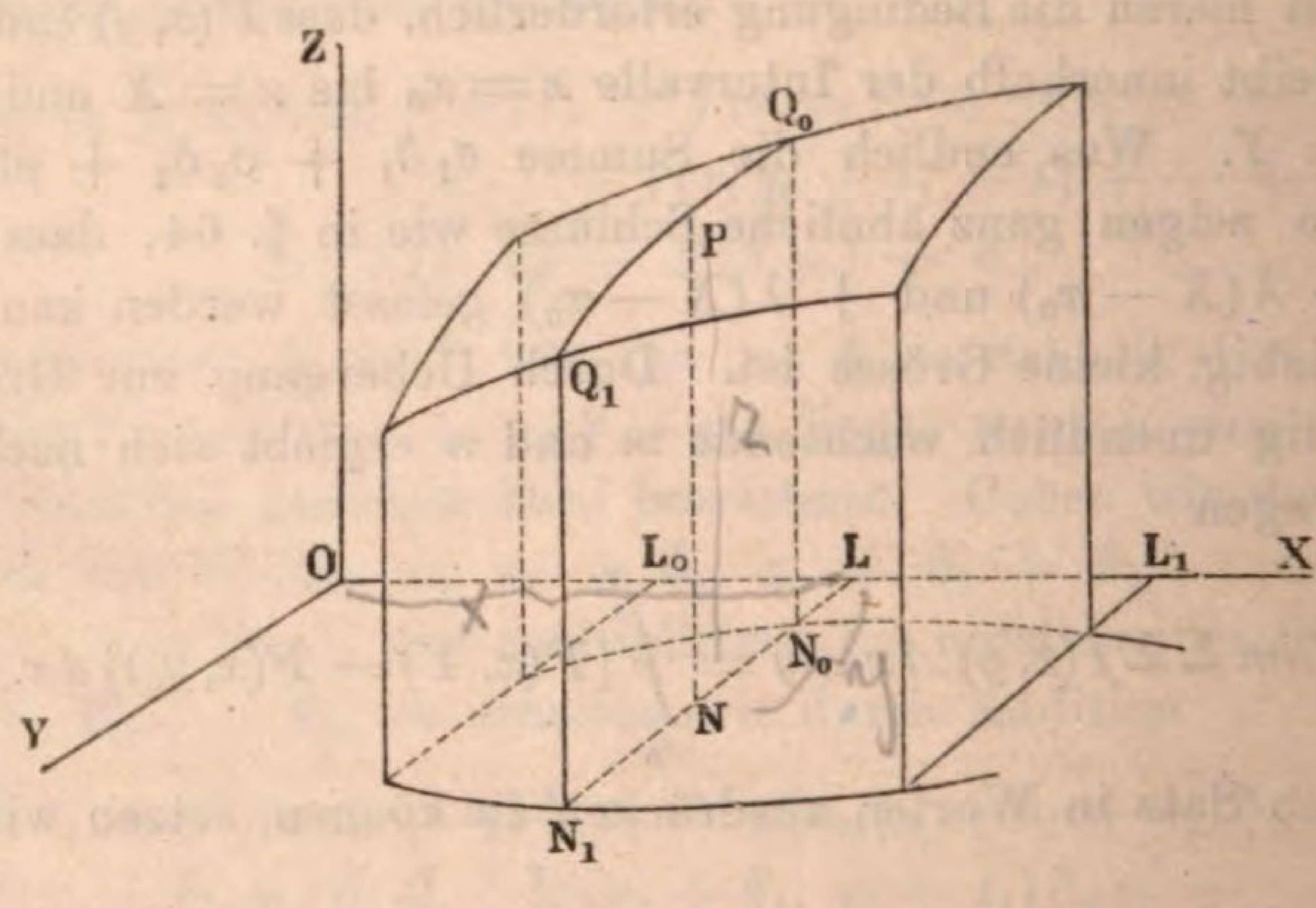
$$f(x,y, \int f(x,y)\,dy, \quad \int dx \int f(x,y)\,dy$$

innerhalb jener Grenzen endlich und stetig bleiben.

Aus der summatorischen Bedeutung des Doppelintegrales geht noch hervor, dass es, wenn auch umständlich, doch jederzeit möglich wäre, den Werth eines Doppelintegrales direct mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Den vorigen analytischen Betrachtungen lässt sich auf folgende Weise ein geometrischer Sinn unterlegen, der zur Lösung eines stereometrischen Problemes führt. In Fig. 76 mögen $OL = x$,

Fig. 76.



$LN = y$, $NP = z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P bedeuten und es sei

$$z = f(x,y)$$

die Gleichung einer Fläche, auf welcher jener Punkt liegt; ferner denken wir uns in der xy-Ebene parallel zur y-Achse zwei Gerade gezogen, deren Entfernungen von jener Achse bekannt, nämlich $OL_0 = x_0$ und $OL_1 = X$ sein mögen; in derselben Ebene stellen wir uns endlich zwei Curven vor, welche durch die Gleichungen

$$LN_0 = y_0 = \varphi(x), \quad LN_1 = Y = \psi(x)$$

bestimmt sein sollen. Jene Geraden und diese Curven schneiden sich im Allgemeinen und bilden ein ebenes theils gerad, theils krummlinig begrenztes Viereck; letzteres betrachten wir als die Basis eines geraden Cylinders, welcher oberhalb durch die vorhin erwähnte

Fläche begrenzt wird, und stellen uns die Aufgabe, das Volumen V dieses Cylinders zu berechnen.

Aendern wir x um dx, gleichzeitig y um dy, construiren wir ferner das Rechteck aus dx, dy und lassen von allen Punkten seiner Peripherie Gerade $\parallel OZ$ bis zur Fläche aufsteigen, so erhalten wir ein Parallelepiped von der endlichen Höhe z und der unendlich kleinen Basis $dx\,dy$; sein Volumen ist $z\,dx\,dy = f(x,y)\,dx\,dy$. Das gesuchte Volumen V bildet die Summe einer unendlichen Menge solcher Elementarparallelepipede, und daher ist

$$V = \int\int z\,dx\,dy = \int\int f(x,y)\,dx\,dy,$$

wobei sich die Anwendung doppelter Summenzeichen durch den Umstand rechtfertigt, dass die Summe aller Parallelepipede nur dann vollständig zu erhalten ist, wenn letztere nach den beiden Richtungen der y und x zusammengezählt werden. Vereinigt man erst diejenigen Parallelepipede, welche zu einem und demselben x aber zu den verschiedenen von y_0 bis Y gehenden y gehören, so bedeutet der Ausdruck

$$\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy = dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy$$

das Volumen einer Schicht, welche die Dicke oder Höhe dx besitzt und in der Entfernung x parallel zur Ebene yz steht, mithin den Querschnitt $N_0 N_1 Q_1 Q_0$ zur Basis hat. Durch Vereinigung aller dieser von $x = x_0$ bis $x = X$ reichenden Schichten erhalten wir das ganze Volumen

$$1) \qquad V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch mittelst der Formel

$$V = \int_{x_0}^{X} U\,dx,$$

worin U den Flächeninhalt des Querschnittes $N_0 N_1 Q_1 Q_0$ bedeutet, welcher im Abstande x parallel zur yz-Ebene gelegt ist. Nach der bekannten Regel zur Quadratur ebener Flächen hat man, $LN = y$ als Abscisse und $NP = z$ als Ordinate ansehend,

$$U = \int_{y_0}^{Y} z\,dy,$$

mithin durch Substitution in die vorige Gleichung

$$V = \int_{x_0}^{X} \left\{ \int_{y_0}^{Y} z\,dy \right\} dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} z\,dy.$$

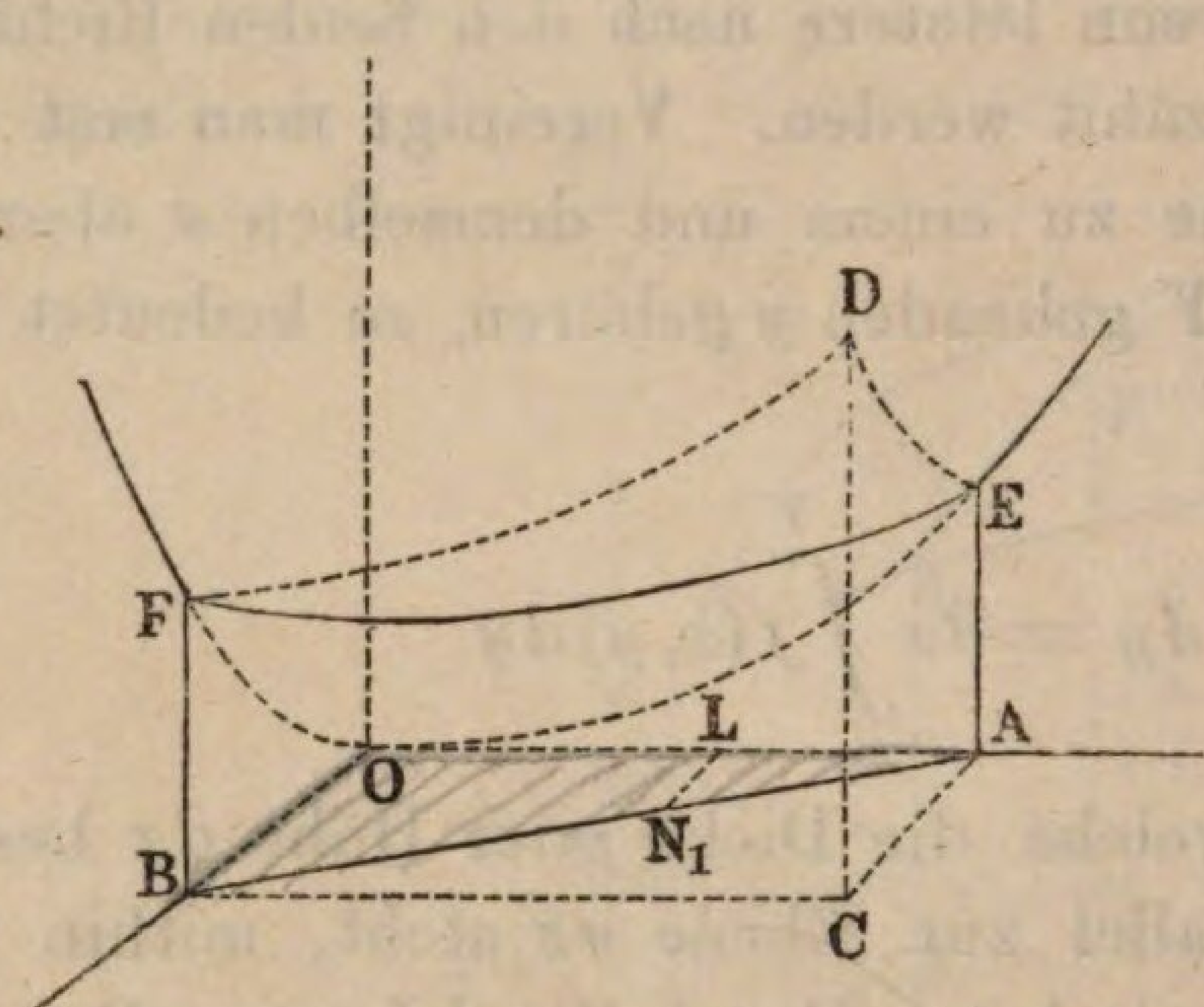
Diese Formel stimmt mit Nro. 1) überein, sobald $f(x, y)$ für z gesetzt wird.

Als Beispiel einer solchen Cubatur diene folgender Fall. Die oberhalb begrenzende Fläche sei ein elliptisches Paraboloid, bestimmt durch die Gleichung

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2;$$

die Basis des Volumens sei ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 77) mit den Katheten $OA = a$, $OB = b$. Die Summation aller Volumelemente, d. h. die doppelte Integration bezieht sich dann auf alle positiven x und y, welche der Bedingung

Fig. 77.



$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1$$

genügen, mithin sind die Integrationsgrenzen

$$x_0 = 0,\ X = OA = a,$$
$$y_0 = 0,\ Y = LN_1 = b\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Dies giebt

$$V = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} (\alpha x^2 + \beta y^2)\,dy$$

$$= \int_0^a dx \left\{ \alpha x^2 \,.\, b\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \alpha \cdot \tfrac{1}{3} b^3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{12} ab(\alpha a^2 + \beta b^2).$$

Denkt man sich denjenigen Punkt D der Fläche aufgesucht, dessen Coordinaten $OA = a$, $OB = AC = b$, $CD = c$ sind, so ist $c = \alpha a^2 + \beta b^2$, mithin V gleich dem zwölften Theile des Parallelepipedes aus den Kanten a, b, c.

Für ein zweites Beispiel behalten wir das elliptische Paraboloid als obere Begrenzungsfläche bei, nehmen aber als Basis die ganze aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse. Die Integrationen beziehen sich jetzt auf alle positiven und negativen x und y, welche der Bedingung

$$0 \leqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$$

genügen; daher ist

$$V = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} (\alpha x^2 + \beta y^2)\, dy.$$

Die Ausführung beider Integrationen giebt

$$V = \tfrac{1}{4}\pi ab(\alpha a^2 + \beta b^2) = \tfrac{1}{4}\pi abc,$$

worin wieder ein einfacher stereometrischer Satz liegt.

§. 96.

Die Umkehrung der Integrationenfolge.

Durch die summatorische Bedeutung des Doppelintegrales, welche in der Definition

$$\int\int f(x,y)\, dx\, dy = Lim\, \Sigma\Sigma f(x,y)\, \Delta x\, \Delta y$$

ausgesprochen ist, wird man (ähnlich wie bei den unendlichen Doppelreihen) zu der Frage veranlasst, ob der Werth des Doppelintegrales ungestört bleibt oder nicht, wenn man die beiden angedeuteten Integrationen in umgekehrter Reihenfolge ausführt.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo die Integrationen unbestimmte sind, und nennen V den Werth des Doppelintegrales, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int f(x,y)\, dx, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = f(x,y).$$

Andererseits gilt nach §. 15 die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x}$$

vorausgesetzt, dass die Variabelen x, y keine solchen Werthe erhalten, wodurch eine der Functionen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad V$$

discontinuirlich werden könnte; es ist daher unter dieser Beschränkung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \int f(x, y)\, dx,$$

$$V = \int \int f(x, y)\, dy\, dx.$$

Demnach besteht die Gleichung

$$\int \int f(x, y)\, dx\, dy = \int \int f(x, y)\, dy\, dx$$

so lange, als die vier Functionen

$$f(x, y), \quad \int f(x, y)\, dx, \quad \int f(x, y)\, dy, \quad \int \int f(x, y)\, dx\, dy$$

keine Unterbrechung der Continuität erleiden.

Bei bestimmten Doppelintegralen ist diese Schlussweise nicht direct anwendbar, und daher muss man in diesem Falle auf die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zurückgehen. Meistentheils sind die vier Integrationsgrenzen nicht unmittelbar gegeben, sondern man kennt nur eine Bedingung, welcher die Variabelen x und y genügen sollen (vergl. das vorige geometrische Beispiel); gleichzeitig ist auch die Anordnung der Integrationen nicht vorgeschrieben, es wird nur die Doppelsumme aller der Elemente $f(x, y)\, dx\, dy$ verlangt, für welche jene Bedingung besteht. Ist letztere der Art, dass sich aus ihr bestimmte Integrationsgrenzen sowohl bei der einen als bei der anderen Anordnung der Integration ergeben, so kann man auch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zweimal anwenden, indem man erst

$$\int f(x, y)\, dy = F(x, y)$$

setzt und die zugehörigen Integrationsgrenzen y_0, Y, x_0, X bestimmt, nachher aber

$$\int f(x, y)\, dx = \Phi(x, y)$$

setzt und die neuen Integrationsgrenzen ξ_0, Ξ, η_0, Υ aus der gegebenen Bedingung herleitet. Im ersten Falle findet man

$$Lim\, \Sigma \Sigma f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy,$$

im zweiten

$$Lim\,\Sigma\Sigma f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y = \int_{\eta_0}^{Y} dy \int_{\xi_0}^{\Xi} f(x,y)\,dx,$$

mithin

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\eta_0}^{Y}\int_{\xi_0}^{\Xi} f(x,y)\,dy\,dx;$$

jedoch gilt dieser Satz im Allgemeinen nur so lange als die Functionen

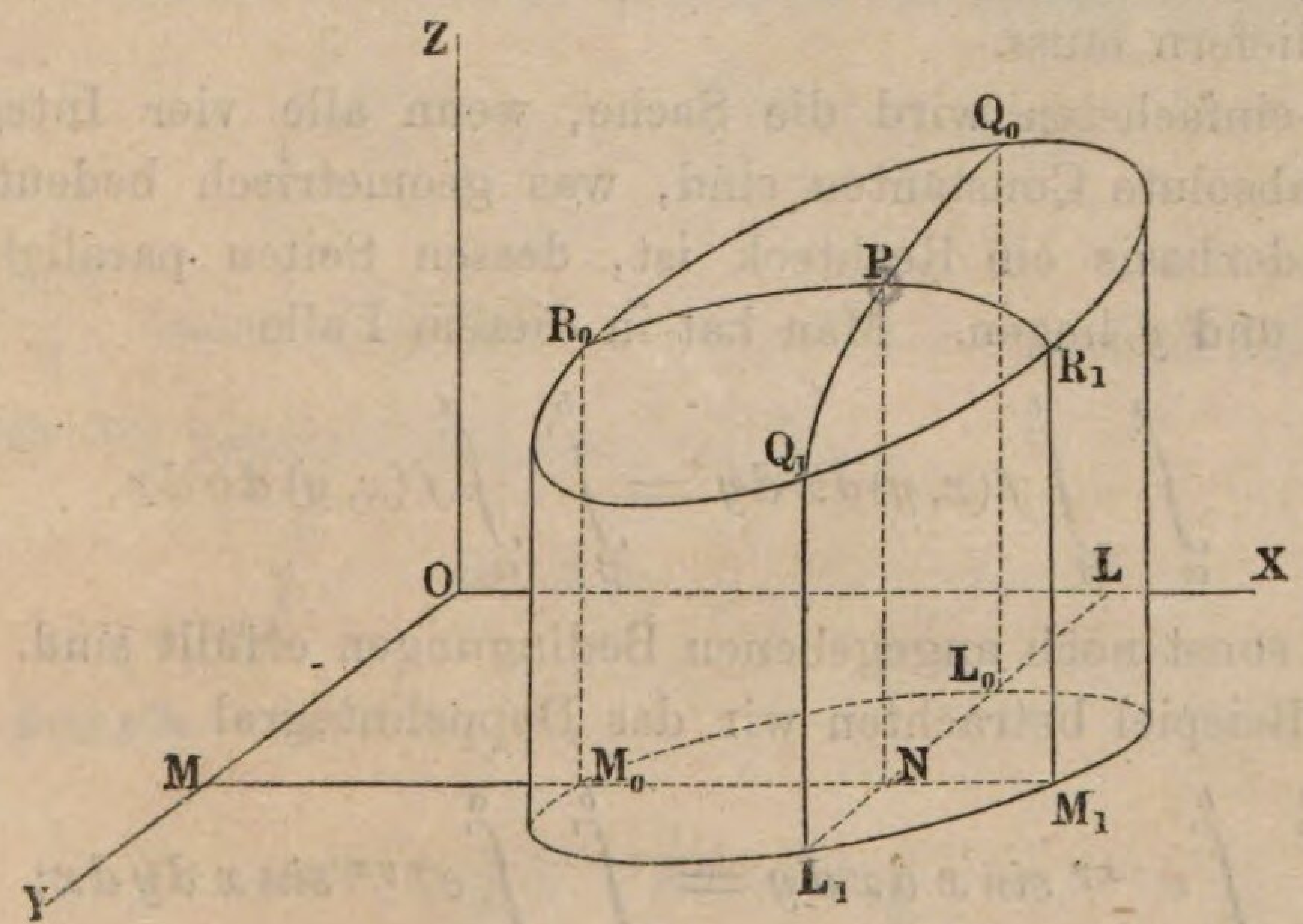
$$f(x,y), \quad \int f(x,y)\,dy, \quad \int f(x,y)\,dx,$$

$$\int dx \int f(x,y)\,dy, \quad \int dy \int f(x,y)\,dx$$

endlich und stetig bleiben.

Diesen Erörterungen lässt sich auf folgende Weise ein geometrischer Sinn unterlegen. In Fig. 78 mögen $OL = x$, $OM = LN = y$,

Fig. 78.



und $NP = z$ die drei rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P im Raume bezeichnen, ferner sei $z = f(x,y)$ die Gleichung einer Fläche, endlich denke man sich in der xy-Ebene eine geschlossene Curve oder überhaupt einen Contour $L_0 M_0 L_1 M_1$ gegeben; nimmt man letzteren zur Basis eines Cylinders, welcher von der vorigen Fläche geschnitten wird, so ist das Cylindervolumen

$$V = \int\int z\,dx\,dy = \int\int f(x,y)\,dx\,dy,$$

wobei x und y an die Bedingung gebunden sind, dass der Punkt xy die Cylinderbasis nicht überschreiten darf. Aus dieser Bedingung ergeben sich in jedem Falle die nöthigen Integrationsgrenzen, wobei wir der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die Curve $L_0 M_0 L_1 M_1$ von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden könne. Integrirt man zuerst in Beziehung auf y bei vorläufig constanten x, so sind (wie in §. 95) $LL_0 = y_0$, $LL_1 = Y$ die Integrationsgrenzen für y; die nachherigen Integrationsgrenzen für x sind die Entfernungen, in welchen die beiden parallel zur y-Achse an die Cylinderbasis gelegten Tangenten die x-Achse schneiden. Will man dagegen zuerst nach x integriren, so verlängert man die Gerade MN bis zu ihren Durchschnitten M_0 und M_1 mit der Cylinderbasis und erhält $MM_0 = \xi_0$, $MM_1 = \Xi$; die Grenzen für die nachherige auf y bezügliche Integration ergeben sich, wenn man parallel zur x-Achse Tangenten an die Cylinderbasis legt. Sowohl bei dem ersten als bei dem zweiten Systeme von je vier Integrationsgrenzen ist die Bedingung erfüllt, dass der Punkt N die Cylinderbasis nicht überschreitet; dann erhellt aber ohne Weiteres, dass die Summirung aller Volumenelemente $z\,dx\,dy$ in beiden Fällen dasselbe Cylindervolumen liefern muss.

Am einfachsten wird die Sache, wenn alle vier Integrationsgrenzen absolute Constanten sind, was geometrisch bedeutet, dass die Cylinderbasis ein Rechteck ist, dessen Seiten parallel zu den Achsen x und y liegen. Man hat in diesem Falle

$$\int_\alpha^a \int_\beta^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_\beta^b \int_\alpha^a f(x,y)\,dy\,dx,$$

wenn die sonst noch angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Als Beispiel betrachten wir das Doppelintegral

$$\int_0^a \int_0^b e^{-xy} \sin x\,dx\,dy = \int_0^b \int_0^a e^{-yx} \sin x\,dy\,dx;$$

es ergiebt sich, wenn jedesmal die erste der angedeuteten Integrationen ausgeführt wird,

$$\int^a \frac{1 - e^{-bx}}{x} \sin x\,dx = \int_0^b \frac{1 - e^{-ay}(\cos a + y \sin a)}{1 + y^2}\,dy$$

$$= \arctan b - \cos a \int_0^b \frac{e^{-ay}}{1 + y^2}\,dy - \sin a \int_0^b \frac{y e^{-ay}}{1 + y^2}\,dy.$$

Da der Bruch $\frac{1}{1+y^2}$ zwischen 0 und 1 liegt, so ist der Werth des mit $\cos a$ multiplicirten Integrales positiv und kleiner als

$$\int_0^b e^{-ay}\,dy = \frac{1-e^{-ab}}{a};$$

für das zweite Integral rechter Hand gilt eine ähnliche Bemerkung, und man hat daher

$$\int_0^a \frac{1-e^{-bx}}{x}\sin x\,dx = \arctan b - \frac{1-e^{-ab}}{a}(\varrho_0 \cos a + \varrho_1 \sin a)$$

wo ϱ_0 und ϱ_1 nicht näher bestimmte positive echte Brüche bezeichnen. Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende a ergiebt sich ferner, a und b als positiv vorausgesetzt,

$$1)\qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-bx}}{x}\sin x\,dx = \arctan b.$$

Das Integral linker Hand zerfällt in die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,e^{-bx}dx,$$

und da $\frac{\sin x}{x}$ immer zwischen $+1$ und -1 enthalten ist, so liegt der Werth des zweiten Integrales zwischen

$$\int_0^\infty e^{-bx}\,dx \text{ und } -\int_0^\infty e^{-bx}\,dx,$$

er kann deshalb

$$= \varrho \int_0^\infty e^{-bx}\,dx = \varrho\,\frac{1}{b}$$

gesetzt werden, wenn ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet. Aus der nunmehrigen Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\varrho}{b} = \arctan b$$

folgt für $b = \infty$

$$2)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dieses Beispiel lehrt gleichzeitig, wie man sich in den Fällen zu verhalten hat, wo unendliche Integrationsgrenzen vorkommen.

Um auch ein Beispiel für den allgemeinen Fall zu haben, betrachten wir das Doppelintegral

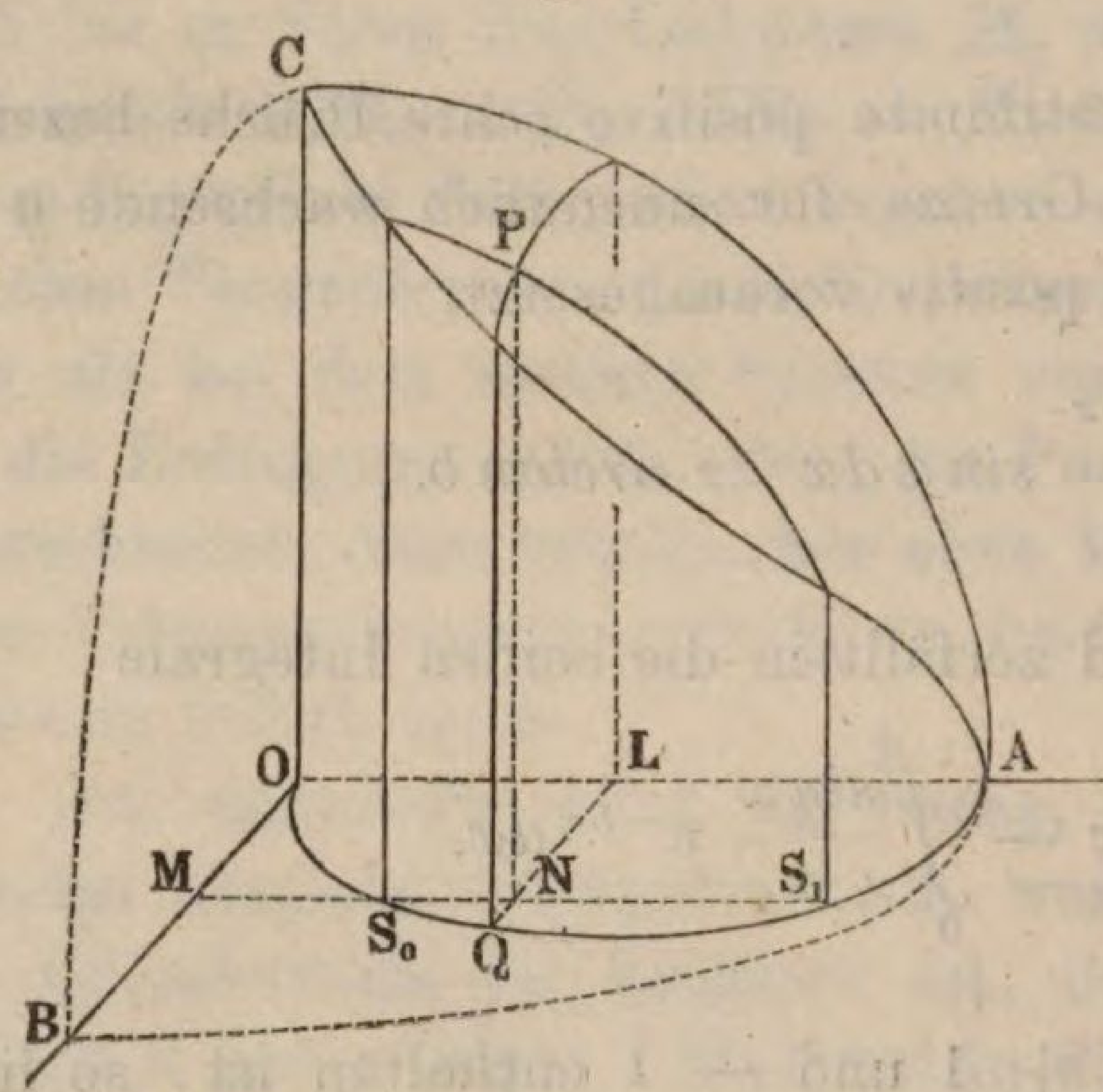
$$V = \int\int \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$(x - c)^2 + y^2 \leqq c^2$$

genügenden x und y beziehen mögen. Geometrisch bedeutet hier V das Volumen eines Cylinders, welcher den über $OA = 2c$ construirten Halbkreis zur Basis hat, und von einer mit dem Radius OA beschriebenen Kugel geschnitten wird (Fig. 79). Integrirt man zuerst in Beziehung auf y, so sind 0 und $LQ\sqrt{2cx - x^2}$ die zugehörigen Integrationsgrenzen; nachher ist x von 0 bis $2c$ auszudehnen, also

Fig. 79.



$$V = \int_0^{2c} dx \int_0^{\sqrt{2cx - x^2}} \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2c} dx \left\{(2c - x)\sqrt{2cx} + (4c^2 - x^2)\, arcsin \sqrt{\frac{x}{2c + x}}\right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9}\right)(2c)^3.$$

Bei umgekehrter Anordnung der Integrationen gelten für x die Grenzen $MS_0 = c - \sqrt{c^2 - y^2}$ und $MS_1 = c + \sqrt{c^2 - y^2}$, für y die Grenzen 0 und c, mithin ist auch

$$V = \int_0^c dy \int_{c - \sqrt{c^2 - y^2}}^{c + \sqrt{c^2 - y^2}} \sqrt{4c^2 - x^2 - y^2}\, dx.$$

Als Werth des ersten Integrales findet man

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2c}\left\{(c+\sqrt{c^2-y^2})\sqrt{c-\sqrt{c^2-y^2}}-(c-\sqrt{c^2-y^2})\sqrt{c+\sqrt{c^2-y^2}}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}(4c^2-y^2)\left\{arcsin\frac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{\sqrt{4c^2-y^2}}-arcsin\frac{c-\sqrt{c^2-y^2}}{\sqrt{4c^2-y^2}}\right\},$$

derselbe lässt sich aber noch sehr zusammenziehen. Das Quadrat vom Inhalt der ersten Parenthese ist nämlich $2y^2(c-y)$, mithin der Inhalt selbst $= y\sqrt{2(c-y)}$; mittelst der Formel 9) auf S. 5 ergiebt sich ferner als Differenz der beiden Kreisbögen der eine Bogen

$$arcsin\left[\sqrt{2c}\,\frac{(c+\sqrt{c^2-y^2})^{\frac{3}{2}}-(c-\sqrt{c^2-y^2})^{\frac{3}{2}}}{4c^2-y^2}\right]$$

$$= arcsin\,\frac{2\sqrt{c(4c^3-3cy^2-y^3)}}{4c^2-y^2} = arcsin\,\frac{2\sqrt{c(c-y)}}{2c-y}$$

$$= arcsin\left[2\sqrt{\frac{c}{2c-y}}\sqrt{1-\frac{c}{2c-y}}\right] = 2\,arcsin\sqrt{\frac{c}{2c-y}},$$

wobei die Formel

$$arcsin\,(2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}) = 2\,arcsin\,\gamma$$

angewendet worden ist. Nach diesen Bemerkungen erhält man

$$V=\int_0^c\left\{y\sqrt{c(c-y)}+(4c^2-y^2)\,arcsin\sqrt{\frac{c}{2c-y}}\right\}dy,$$

was zu demselben Werthe von V führt wie die vorige Rechnung.

Den Nutzen, welchen die Umkehrung der Integrationenfolge gewährt, zeigt das etwas allgemeinere Beispiel

$$V=\int\int\sqrt{4c^2-x^2-y^2}\,\psi(y)\,dx\,dy,$$

worin $\psi(y)$ eine beliebige Function von y bedeuten und die Integrationsbedingung dieselbe wie vorhin sein möge. Hier lässt sich bei der ersten Anordnung die auf y bezügliche Integration im Allgemeinen gar nicht ausführen, wohl aber kann man bei der zweiten Anordnung genau wie vorhin rechnen; damit gelangt man zu der Gleichung

$$\int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}}\sqrt{4c^2-x^2-y^2}\,\psi(y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^c\left\{y\sqrt{c(c-y)}+(4c^2-y^2)\,arcsin\sqrt{\frac{c}{2c-y}}\right\}\psi(y)\,dy,$$

welche die Reduction des Doppelintegrales auf ein einfaches darstellt.

Hinsichtlich des allgemeinen Doppelintegrales

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy$$

fügen wir noch eine Bemerkung für den Fall bei, dass die Function $f(x, y)$ innerhalb der Integrationsgrenzen Unterbrechungen der Continuität erleiden sollte. Wird $f(x, y)$ nur einmal discontinuirlich und zwar für $x = \xi$ und $y = \eta$, wo ξ zwischen x_0 und X, η zwischen y_0 und Y liegt, so betrachtet man V als den speciellen Werth, welchen die Summe

$$\int_{x_0}^{\xi - \varepsilon} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_{\xi + \delta}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy$$

bei gleichzeitig verschwindenden δ und ε erhält. In jedem der beiden einzelnen Integrale bleibt $f(x, y)$ continuirlich und daher können dieselben wie früher behandelt werden. Aehnlich verhält sich die Sache, wenn mehrere Unterbrechungen der Continuität vorhanden sind. Im Allgemeinen gilt hier der Satz nicht mehr, dass der Werth des Doppelintegrales unabhängig von der Anordnung der Integrationen ist.

§. 97.

Doppelintegrale in Polarcoordinaten.

Will man in einem Doppelintegrale statt einer der beiden Variabelen x und y eine neue Veränderliche substituiren, so hat man ganz wie in §. 91 zu verfahren, und daher bedarf dieser Fall keiner besonderen Auseinandersetzung; dagegen wird die Sache anders, wenn statt x und y gleichzeitig zwei neue Variabele einzuführen sind.

I. Wir betrachten zuerst den einfachen und häufig vorkommenden Fall, wo das Doppelintegral

1) $$V = \int \int f(x, y)\, dx\, dy$$

in Polarcoordinaten transformirt, also

2) $$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

gesetzt werden soll.

Denken wir uns die auf y bezügliche Integration als die erste, so können wir zunächst θ für y einführen, wenn wir aus den Gleichungen 2) die neue Gleichung

$$y = x \tan \theta$$

bilden, worin x als Constante zu betrachten ist; dies giebt

$$V = \int \int f(x, x \tan \theta)\, dx \,.\, x \sec^2 \theta \, d\theta.$$

Um zweitens r an die Stelle von x zu bringen, substituiren wir $x = r \cos \theta$ und beachten, dass hier $\cos \theta$ constant, dagegen r die neue Variabele ist; wir erhalten so

$$V = \int \int f(r \cos \theta,\ r \sin \theta) \cos \theta \, dr \,.\, r \cos \theta \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= \int \int f(r \cos \theta,\ r \sin \theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

wofür bei umgekehrter Anordnung der Integrationen auch

3) $$V = \int \int f(r \cos \theta,\ r \sin \theta)\, r\, d\theta\, dr$$

geschrieben werden kann. Die Einführung von Polarcoordinaten geschieht also in der Weise, dass x, y, $dx\, dy$ der Reihe nach durch $r \cos \theta$, $r \sin \theta$, $r\, d\theta\, dr$ ersetzt werden.

Der geometrische Sinn dieser Transformation ist folgender. Betrachten wir $z = f(x, y)$ wieder als Gleichung einer Fläche und $V = \int \int z\, dx\, dy$ als Volumen, so bleibt es für die Grösse von V gleichgültig, ob die Basis dieses Volumens in rechteckförmige oder in anders gestaltete Elemente zerlegt wird, wenn nur diese Elemente die Basis, und die über den Flächenelementen construirten Parallelepipede das gesuchte Volumen wirklich ausfüllen. Diejenige Zerlegung nun, welche einem polaren Coordinatensysteme entspricht, ergiebt sich von selbst, wenn man r und θ gleichzeitig ändert, und während das rechtwinklige Coordinatensystem zu einer schachbretähnlichen Theilung der Basis führt, sind bei dem Polarsysteme die einzelnen Elemente von zwei concentrischen Kreisbögen und von zwei Radien begrenzt (Fig. 80 u. 81 a. f. S.). Irgend eines dieser Elemente $NN_1N_3N_2$ (Fig. 81) kann als Rechteck aus den Seiten NN_1 und NN_2 betrachtet werden und zwar ist

$$OL = x,\ LN = y,\ ON = r,\ \angle LON = \theta,$$

$$NN_1 = dr,\ NN_2 = r\, d\theta,\ \text{Fläche}\ NN_1N_3N_2 = r\, d\theta \,.\, dr.$$

Das Volumen V entsteht durch Summirung der Parallelepipede über

den Flächenelementen; der Inhalt eines solchen Parallelepipedes ist $z\,r\,d\theta\,dr$, folglich

$$V = \int\int z\,r\,d\theta\,dr,$$

Fig. 80.

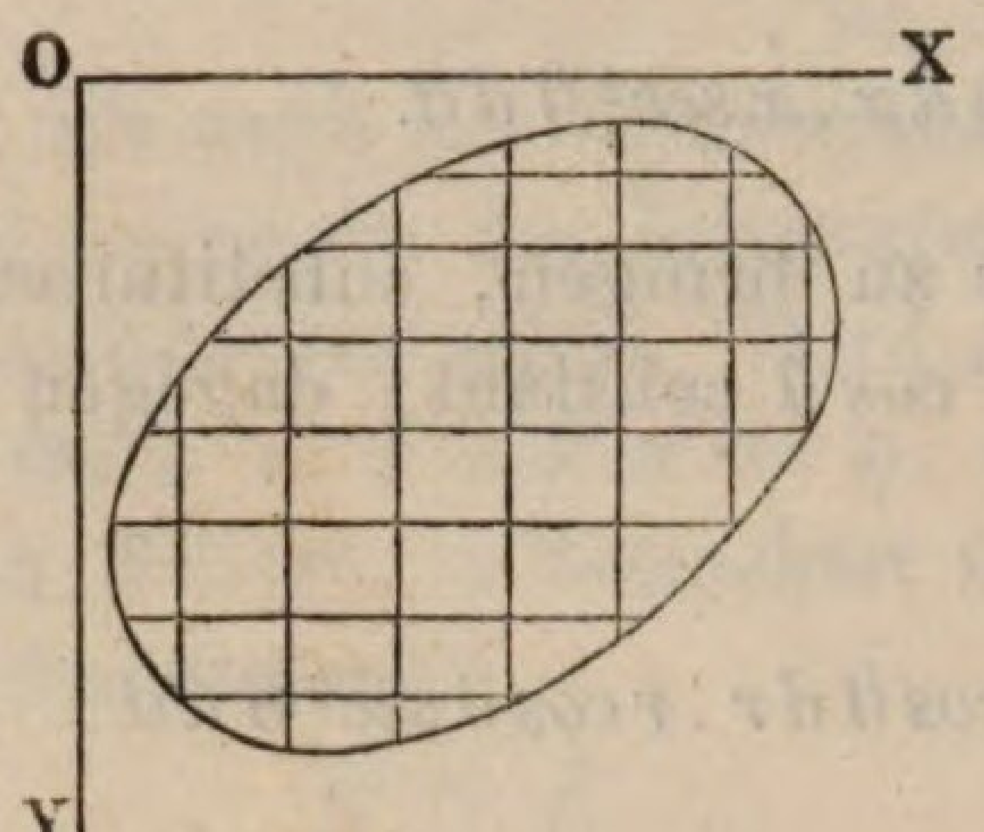
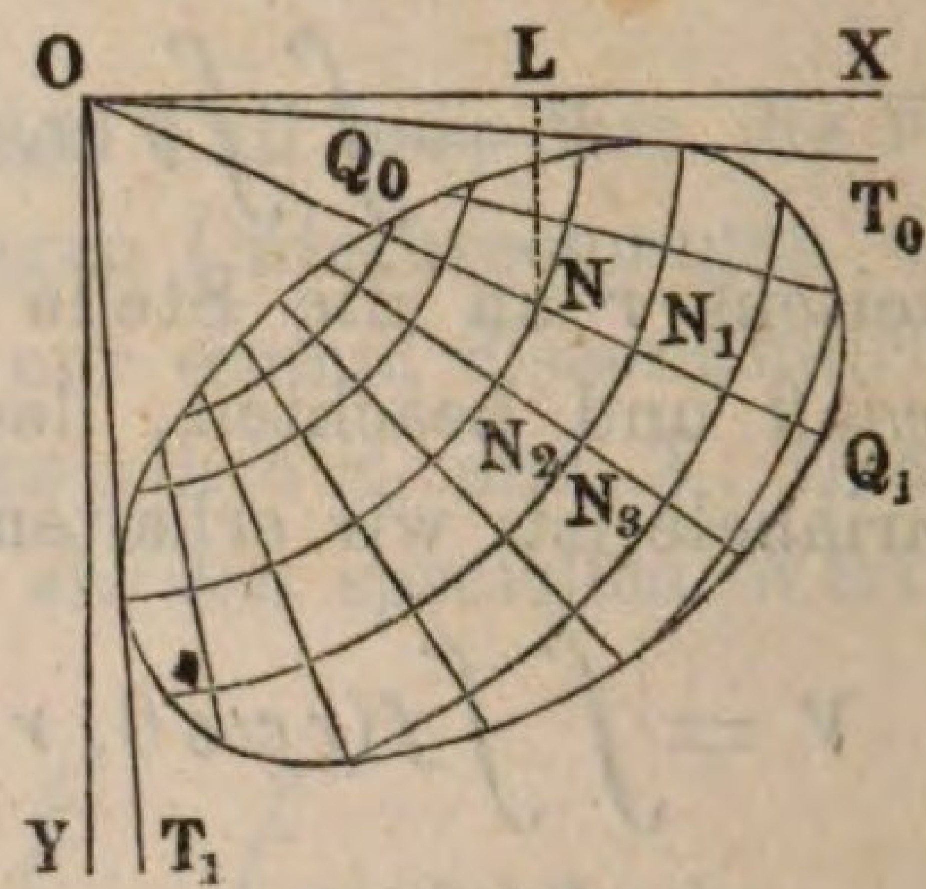


Fig. 81.



was mit Nr. 3) übereinstimmt, wenn $z = f(x, y) = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ wieder eingesetzt wird.

Die Integrationsgrenzen für r und θ sind in jedem Falle besonders zu bestimmen. Sind die ursprünglichen Grenzen für x und y so beschaffen, dass der Punkt xy innerhalb eines Contours bleibt, welcher von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden kann, so ergeben sich die Integrationsgrenzen für r, wenn man den Radiusvector ON bis zu seinen Durchschnitten Q_0 und Q_1 mit jenem Contour verlängert (Fig. 81); die Grenzen für θ sind nachher die Winkel LOT_0 und LOT_1, welche zwei, von O aus an den Contour gelegte Tangenten mit der x-Achse einschliessen. Für $OQ_0 = r_0$, $OQ_1 = R$, $\angle\ LOT_0 = \theta_0$, $LOT_1 = \Theta$ ist dann

$$V = \int_{\theta}^{\Theta}\int_{r_0}^{R} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Einige allgemeinere Beispiele mögen dies erläutern. Beziehen sich die ursprünglichen Integrationen auf alle positiven x und y, welche der Bedingung $x^2 + y^2 \leqq c^2$ genügen, so bleibt der Punkt xy innerhalb eines mit dem Radius c beschriebenen Kreisquadranten; man erhält für diesen Fall

$$4)\quad \int_0^c\int_0^{\sqrt{c^2-x^2}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^c f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Ist ursprünglich die Bedingung gegeben, dass sowohl x als y positiv und $(x - c)^2 + y^2 \leqq c^2$ sein soll, so bleibt der Punkt xy

im Innern eines Halbkreises, dessen Durchmesser $2c$ auf der x-Achse liegt; dies giebt

$$5)\quad \int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2c\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Hiernach ist speciell

$$\int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} \sqrt{4c^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2c\cos\theta} \sqrt{4c^2-r^2}\,r\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\cdot\tfrac{1}{3}(2c)^3(1-\sin^3\theta) = \tfrac{1}{3}(2c)^3(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{2}{3}).$$

übereinstimmend mit der viel umständlicheren Rechnung im vorigen Paragraphen.

Das unter Nro. 5) verzeichnete Integral lässt sich auch auf die Weise transformiren, dass man erst $x = x_1 - c$ und nachher $x_1 = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ setzt, wovon der geometrische Sinn leicht einzusehen ist; man erhält zuletzt

$$6)\quad \int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_0^{c} f(r\cos\theta - c, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Wenn sich die ursprünglichen Integrationen auf alle positiven x und y beziehen, so durchläuft der Punkt xy die ganze unendliche Ebene, welche von den positiven Theilen der x- und y-Achse begrenzt wird; bei Polarcoordinaten geschieht dasselbe, sobald r von 0 bis ∞, dagegen θ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt wird, mithin ist

$$7)\quad \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Als gelegentliche Anwendung hiervon diene die Ermittelung des Werthes von

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

welcher vorläufig mit K bezeichnet werden möge. Für das Doppelintegral

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

hat man erstens

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = K^2;$$

andererseits ist dasselbe nach Nro. 7)

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, d\theta\, dr = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Die Vergleichung beider Resultate giebt $K = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ d. i.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

II. Auf die in Nro. 4), 5) und 6) betrachteten Integrale lassen sich einige andere von etwas allgemeinerer Form zurückführen. Sind die ursprünglichen Integrationen so zu leiten, dass bei positiven x und y

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1$$

bleibt, so bewegt sich der Punkt xy innerhalb eines Ellipsenquadranten, und es ist dann

$$V = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Indem man erst $x = a\,\xi$, nachher $y = b\eta$ substituirt, kommt man auf ein neues Integral, welches an die Bedingung $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$ gebunden ist, nämlich

$$V = ab \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} f(a\xi, b\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Dieses lässt sich nach Nro. 4) behandeln, wenn man c, x, y durch 1, $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$ ersetzt; hiernach wird

$$9)\quad \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 f(ar\cos\theta,\, br\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr.$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus Nro. 6) und 7)

$$10)\quad \int_0^{2a}\int_0^{b\sqrt{2\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,y)\,dx\,dy = ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\cos\theta} f(ar\cos\theta,\, br\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

$$= ab\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(ar\cos\theta - a,\, br\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

§. 98.

Substitution neuer Variabelen in Doppelintegralen.

Die im vorigen Paragraphen gezeigte Transformation ist nur ein specieller Fall des allgemeinen Problemes, statt der ursprünglichen Variabelen x und y zwei neue Variabele s und t einzuführen, welche mit jenen durch zwei Gleichungen

$$1)\qquad x = \varphi(s,t),\quad y = \psi(s,t)$$

verbunden sind. Will man diese Substitutionen nicht gleichzeitig, sondern nach einander bewirken und zwar zuerst y durch t ersetzen, so denke man sich s aus beiden Gleichungen eliminirt und das Resultat auf die Form

$$y = \chi(x,t)$$

gebracht; für die erste Integration bleibt x constant, und es wird daher

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f[x,\chi(x,t)]\,dx\,\frac{\partial\chi(x,t)}{\partial t}\,dt.$$

Substituirt man jetzt $\varphi(s,t)$ für x, wobei t als constant, dagegen s als die neue für x eintretende Variabele zu betrachten ist, so erhält man ein Resultat von der Form

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f[\varphi(s,t),\,\psi(s,t)]\,\Omega\,ds\,dt,$$

wo Ω eine Function von s und t bedeutet, die sich durch Ausführung der angedeuteten Operationen von selber bestimmt.

Dieses Verfahren erlaubt eine wesentliche Modification, wenn man beachtet, dass es nur darauf ankommt, $dx\,dy$ auf die Form $\Omega\,ds\,dt$ zu bringen, indem man bei der ersten Integration x als Constante ansieht. Statt nämlich aus den Gleichungen 1) die Variabele s zu eliminiren, kann man auch ds herausschaffen, was folgende Rechnung giebt. Man hat zunächst, weil erst x als Constante gilt,

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt, \; dy = \frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt,$$

mithin durch Elimination von ds

$$dy = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}}{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} dt.$$

Bei der zweiten Integration ist x die ursprüngliche, s die neue Variabele, daher

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds,$$

also zusammen

$$dx\, dy = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) ds\, dt.$$

Die allgemeine Formel zur gleichzeitigen Substitution zweier neuen Variabelen lautet jetzt

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int\int f[\varphi(s, t),\; \psi(s, t)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) ds\, dt.$$

Zu derselben Formel gelangt man durch folgende geometrische Betrachtung, bei welcher das ursprüngliche Doppelintegral wieder als Volumen (s. §. 95) angesehen werden möge. Zwei willkührliche Grössen s und t, welche die Lage eines beliebigen Punktes in der Horizontalebene bestimmen, lassen sich als Coordinaten dieses Punktes betrachten, wenn man den Begriff der Coordinaten in seiner weitesten Bedeutung nimmt. Die Gleichungen 1) vermitteln dann den Uebergang von den ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten x und y zu den neuen Coordinaten s und t. Für die Grösse des Volumens V ist es aber gleichgültig, ob seine Basis in rechteckförmige oder anders gestaltete Elemente zerlegt wird, und daher fragt es sich nur noch, welche Zerlegung dem neuen Coordinatensysteme der s und t entspricht. Sowie nun das frühere Element ein Rechteck war, dessen vier Ecken durch die Coordinaten

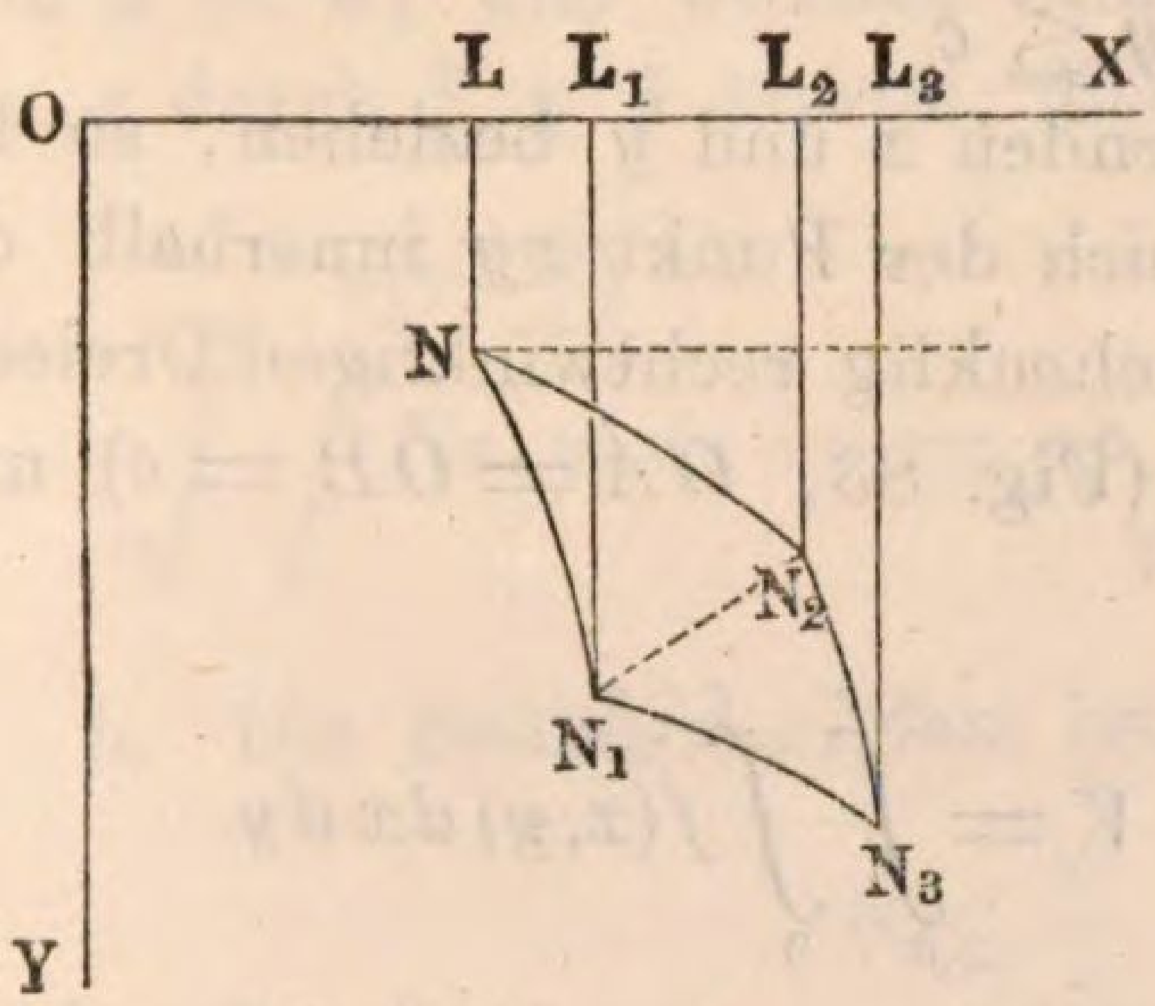
$$x, y; \; x + dx, y; \; x, y + dy; \; x + dx, y + dy$$

bestimmt wurden, so müssen wir als neues Element ein Viereck nehmen, dessen Ecken N, N_1, N_2, N_3 die Coordinaten

$$s, t; \; s + ds, t; \; s, t + dt; \; s + ds, t + dt$$

haben (Fig 82). Da die Bögen NN_1, N_1N_3, N_3N_2, N_2N unendlich klein sind, so können wir sie als gerade Linien und das Flächenelement $NN_1N_3N_2$ als das Doppelte des Dreiecks NN_1N_2 betrachten; letztere Fläche lässt sich aber durch die Coordinaten ihrer Ecken ausdrücken. Bezeichnen wir nämlich die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte N, N_1 und N_2 mit x und y, x_1 und y_1, x_2 und y_2, so ist die Fläche des Dreiecks

Fig. 82.



$$NN_1N_2 = \tfrac{1}{2}[(x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y)],$$

mithin die Fläche des Elementes

$$NN_1N_3N_2 = (x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y).$$

Der Punkt N_1 entstand aber aus dem Punkte N durch alleinige Aenderung des s, mithin ist

$$x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial s}\,ds,\quad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial s}\,ds;$$

ebenso führte die partielle Aenderung des t von N nach N_2, man hat folglich

$$x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial t}\,dt,\quad y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial t}\,dt.$$

Durch Substitution dieser vier Werthe ergiebt sich

$$NN_1N_3N_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right) ds\,dt,$$

oder wegen der Gleichungen 1)

$$NN_1N_3N_2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial s}\right) ds\,dt.$$

Das Product $z\,.\,NN_1N_3N_2 = f(x,y)\,.\,N_1N_2N_3N_2$ stellt wieder das Volumen eines unendlich dünnen Parallelepipedes dar, und die Doppelsumme aller dieser Volumenelemente giebt das ganze Volumen; nach Substitution der Werthe von x, y und $N_1N_2N_3N_2$ gelangt man zu der Gleichung 2).

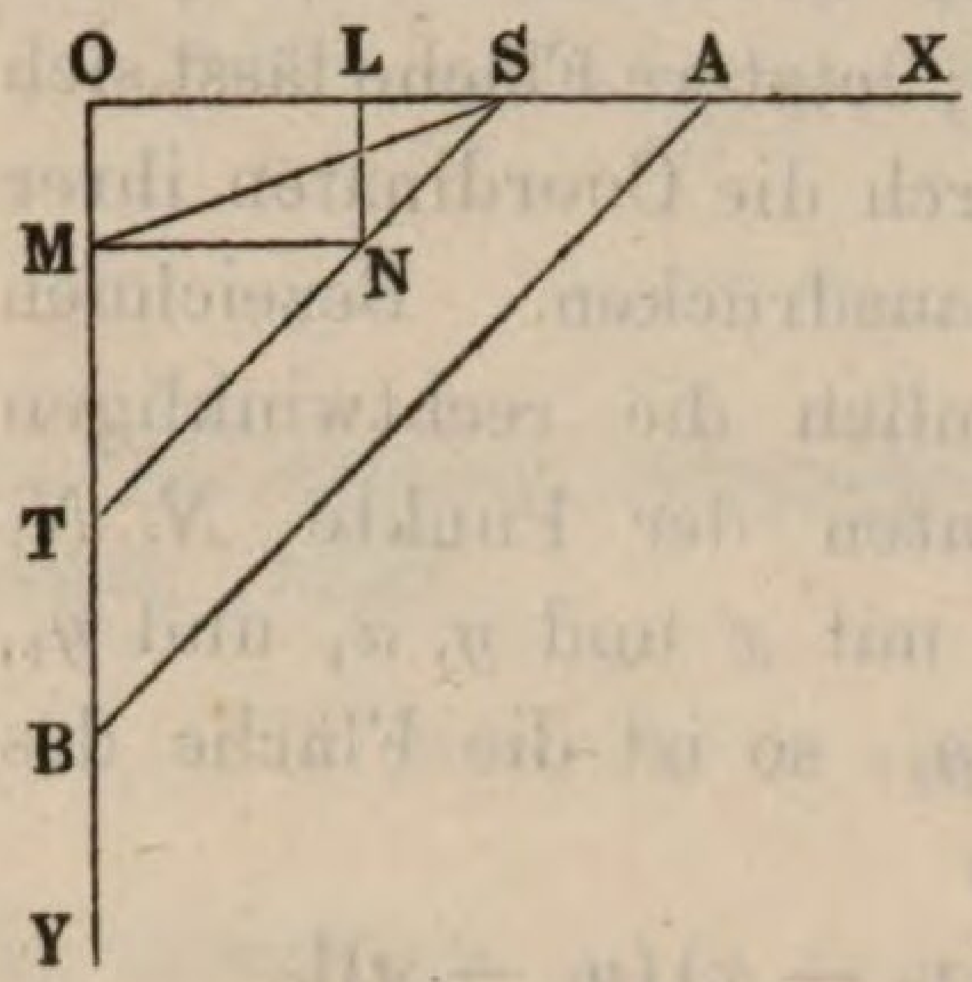
Es versteht sich von selbst, dass bei bestimmten Doppelintegralen die neuen auf s und t bezüglichen Integrationsgrenzen besonders zu ermitteln sind. Wir geben hierzu ein paar Beispiele namentlich auch um zu zeigen, wie durch passende Wahl von φ und ψ constante Integrationsgrenzen für s und t zu erreichen sind.

a. Wenn sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$0 \leqq x + y \leqq c$$

genügenden x und y beziehen, so bewegt sich der Punkt xy innerhalb des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks AOB (Fig. 83, $OA = OB = c$) und es ist

Fig. 83.



$$V = \int_0^c \int_0^{c-x} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Durch N legen wir $ST \parallel AB$, ziehen SM und setzen $OS = OT = s$, $\angle OSM = \omega$; es ist dann

$$OL = x = s - s \tan\omega, \quad OM = y = s \tan\omega$$

oder wenn zur Abkürzung $\tan\omega = t$ gesetzt wird,

$$x = s - st, \quad y = st.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = s.$$

Um ferner den Punkt N in dem Dreiecke AOB herumzuführen, braucht man nur s von 0 bis c, ω von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$ d. h. t von 0 bis 1 auszudehnen; dies giebt

$$3) \qquad \int_0^c \int_0^{c-x} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^c \int_0^1 f(s - st, st)\, s\, ds\, dt.$$

Als specielle Anwendung hat man z. B.

$$\int_0^c \int_0^{c-x} e^{k(x+y)^2}\, dx\, dy = \int_0^c \int_0^1 e^{ks^2}\, s\, ds\, dt$$

$$= \int_0^c e^{ks^2}\, s\, ds = \frac{e^{kc^2} - 1}{2k},$$

wo in der zweiten Form beide Integrationen ausführbar sind, während sich in der ersten Form schon die auf y bezügliche Integration nicht in endlicher Gestalt bewirken lässt.

Ist etwas allgemeiner die Grenzbedingung vorgeschrieben, dass bei positiven x und y

$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1$$

bleiben soll, in welchem Falle das Dreieck AOB die ungleichen Katheten $OA = a$ und $OB = b$ besitzt, so nehme man erst $y = b\eta$ dann $x = a\xi$ und benutze schliesslich die Formel 3) indem man x, y, c durch ξ, η, 1 ersetzt; dies giebt

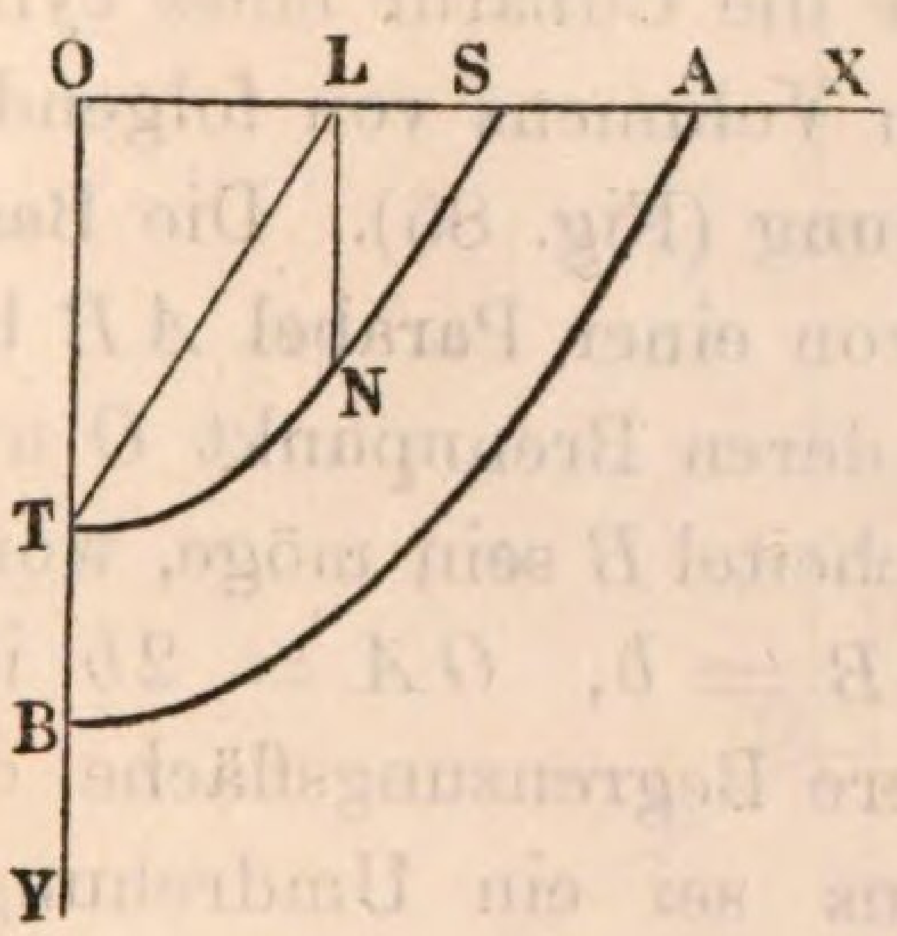
$$4)\quad \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} f(x, y)\, dx\, dy = ab \int_0^1 \int_0^1 f[as(1-t), bst]\, s\, ds\, dt.$$

b. Die Bedingung, dass bei positiven x und y

$$0 \leqq \frac{x^2}{c} + y \leqq c$$

sein soll, entspricht dem Falle, wo der Punkt xy innerhalb eines Parabelsegmentes AOB bleibt; die Parabelachse fällt mit der y-Achse zusammen, $AO = BO$ ist der Parameter der Parabel (Fig. 84) und

Fig. 84.



$$V = \int_0^c \int_0^{c-\frac{x^2}{c}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Legt man durch N eine ähnliche Parabel mit dem Parameter $OS = OT = s$ und setzt $\angle\, OTL = \omega$, so hat man

$$x = s \tan\omega,\ y = s - \frac{x^2}{c} = s(1 - \tan^2\omega),$$

oder für $\tan\omega = t$,

$$x = st,\ y = s(1 - t^2),$$

wo nun s und t als die neuen Coordinaten von N gelten. Hieraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = -s(1 + t^2).$$

Um ferner N in dem Parabelsegmente herumzuführen, muss s von 0 bis c, ω von $\frac{1}{4}\pi$ bis 0 oder t von 1 bis 0 ausgedehnt werden; dies giebt

$$5)\quad \int_0^c \int_0^{c-\frac{x^2}{c}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^c \int_0^1 f(st, s - st^2)\, s(1 + t^2)\, ds\, dt.$$

Wenn die ursprünglichen Integrationen auf alle positiven x und y zu beziehen sind, welche der etwas allgemeineren Bedingung

$$0 \leqq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} \leqq 1$$

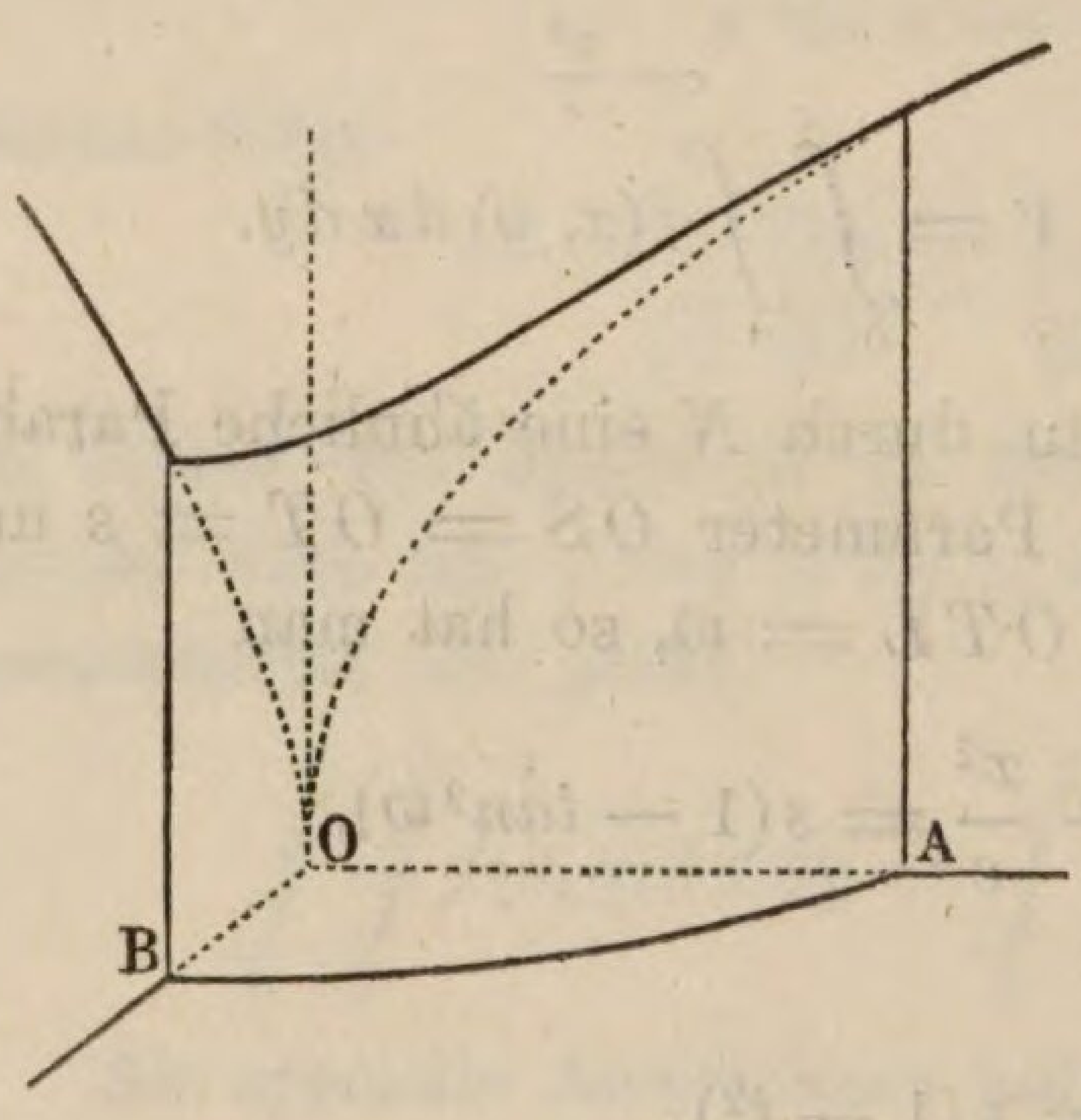
genügen, wobei die Strecken $AO = a$ und $BO = b$ ungleich sind, so nimmt man erst $x = a\xi$, $y = b\eta$ und wendet dann die vorige Formel an; man erhält auf diesem Wege

5) $$\int_0^a \int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= ab \int_0^1 \int_0^1 f[ast, bs(1-t^2)]\,s(1+t^2)\,ds\,dt.$$

Als gelegentliche Anwendung geben wir die Cubatur eines cylindrischen Volumens von folgender Entstehung (Fig. 85). Die Basis werde von einer Parabel AB begrenzt, deren Brennpunkt O und deren Scheitel B sein möge, worin also $OB = b$, $OA = 2b$ ist; die obere Begrenzungsfläche des Volumens sei ein Umdrehungsparaboloid vierten Grades, nämlich

Fig. 85.



$$z^4 = k^2(x^2 + y^2),$$

welches entsteht, wenn eine mit dem Parameter k construirte Parabel um ihre Scheiteltangente rotirt. Es ist dann

$$V = \sqrt{k} \int_0^{2b} \int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{2b}\right)^2\right]} \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

$$= 2b^2\sqrt{k} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt[4]{4b^2s^2t^2 + b^2s^2(1-t^2)^2}\,s(1+t^2)\,ds\,dt$$

$$= 2b^2\sqrt{bk} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s}\sqrt{1+t^2}\,s(1+t^2)\,ds\,dt$$

d. h.

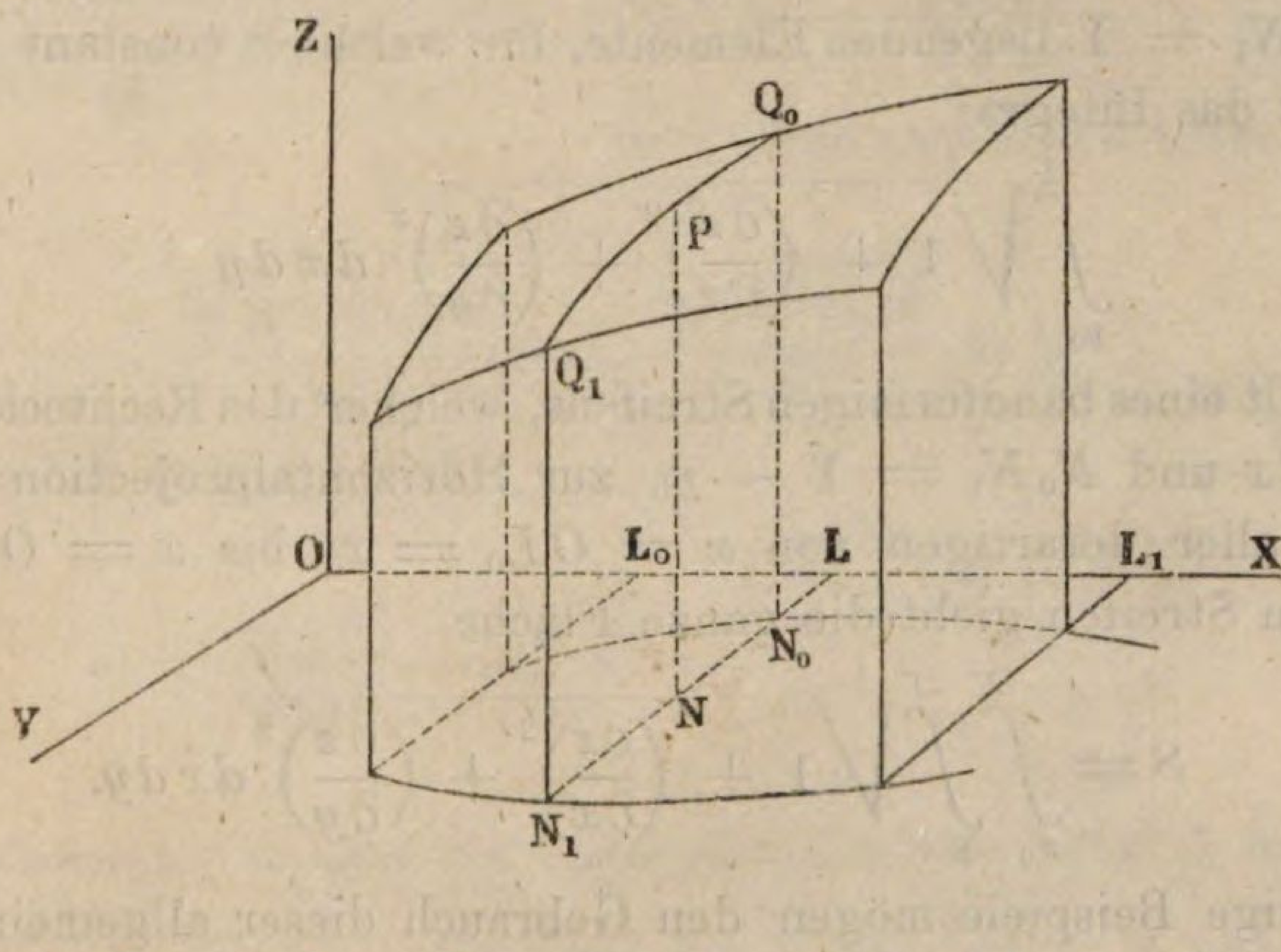
$$V = b^2\sqrt{bk}\,\frac{7\sqrt{2} + 3l(1+\sqrt{2})}{10} = 1{,}25436157\,.\,b^2\sqrt{bk}.$$

§. 99.

Die Complanation der Flächen.

Um auf einer durch die Gleichung $z = F(x, y)$ bestimmten Fläche ein begrenztes Stück zu erhalten, denken wir uns in der Ebene xy zwei zur y-Achse parallele Gerade und zwei beliebige Curven gezogen, welche mit jenen Parallelen zusammen ein gemischtliniges Viereck bilden (Fig. 86). Dieses Viereck betrachten wir als

Fig. 86.



die Horizontalprojection eines Flächenstückes, dessen Inhalt S bestimmt werden soll.

Lassen wir x um dx, y um dy wachsen, so können wir das aus dx und dy construirte Rechteck als Horizontalprojection eines unendlich kleinen Flächenstückes σ ansehen; letzteres ist ein krummlinig begrenztes Viereck, dessen Ecken nicht in einer Ebene liegen. Wegen der unendlichen Abnahme des σ lässt sich aber dieses Flächenelement so betrachten, als läge es auf der durch den Punkt xyz gehenden Berührungsebene der Fläche, und zwar beträgt der hierbei begangene Fehler nur unendlich kleine Grössen höherer Ordnungen. Nennen wir für den Augenblick μ den Neigungswinkel der Tangentialebene (oder der Ebene des σ) gegen die xy-Ebene, so haben wir

$$\sigma \cos\mu = dx\,dy \text{ oder } \sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\mu}.$$

Zufolge des Satzes, dass der Winkel zwischen zwei Ebenen mit dem Winkel zwischen den Normalen auf jenen Ebenen übereinkommt, ist μ nichts Anderes als der Winkel, welchen die im Punkte xyz errichtete Normale der Fläche mit der z-Achse einschliesst, also nach §. 27, Nro. 6)

$$\cos\mu = \cos\nu_z = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Das Flächenelement σ bestimmt sich mithin durch die Gleichung

$$\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

und die Summe aller dieser Flächenelemente giebt die ganze Fläche S. Bilden wir zunächst die Summe aller von $y = LN_0 = y_0$ bis $y = LN_1 = Y$ liegenden Elemente, für welche x constant bleibt, so bedeutet das Integral

$$\int_{y_0}^{Y}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

den Inhalt eines bandförmigen Streifens, welcher das Rechteck aus den Seiten dx und $N_0N_1 = Y - y_0$ zur Horizontalprojection hat; die Summe aller derartigen von $x = OL_0 = x_0$ bis $x = OL_1 = X$ liegenden Streifen giebt die ganze Fläche

$$1)\qquad S = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Einige Beispiele mögen den Gebrauch dieser allgemeinen Complanationsformel zeigen.

a. Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung der Fläche ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

mithin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b};$$

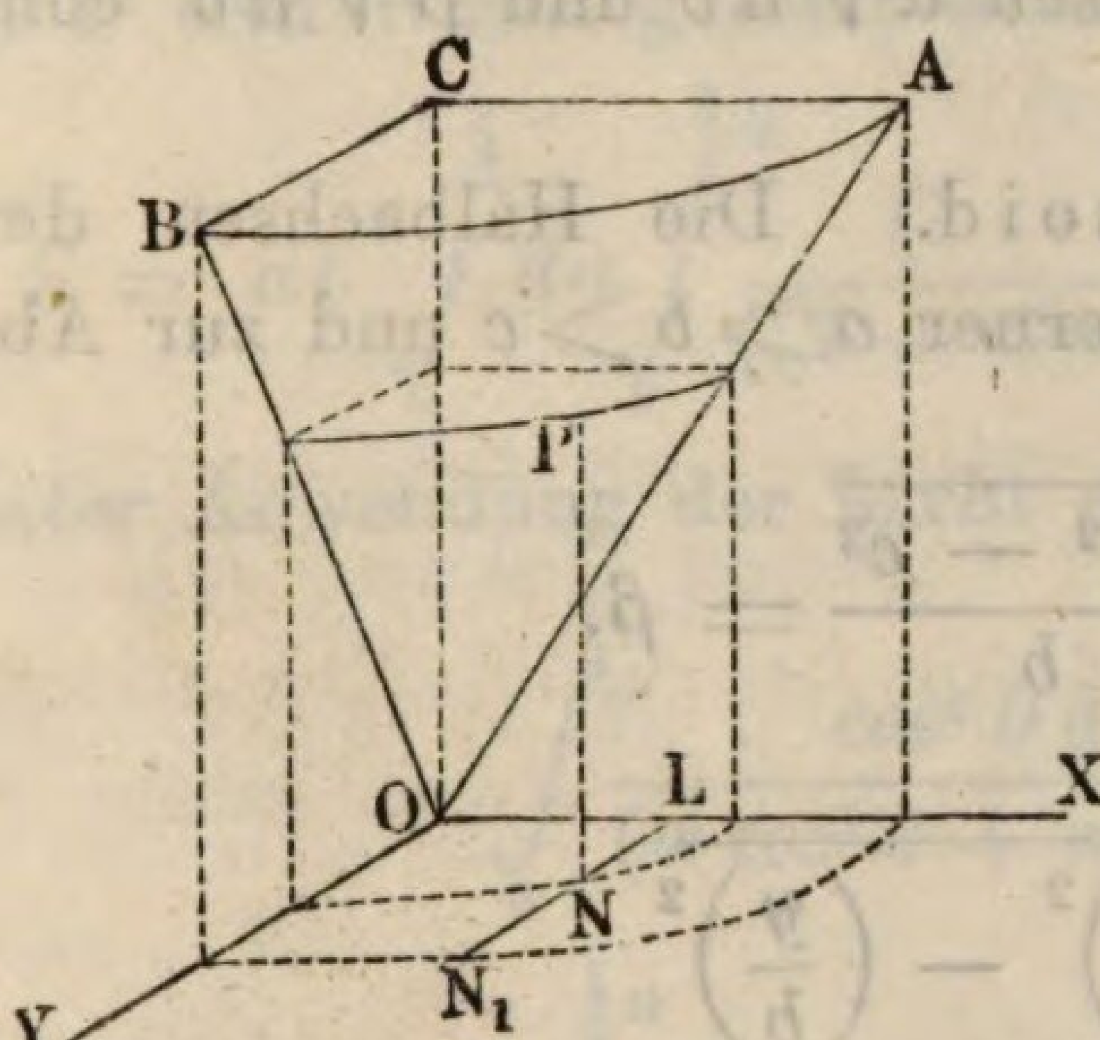
als Horizontalprojection nehmen wir den Quadranten der aus den Halbparametern a und b construirten Ellipse; es ist dann

$$S = \int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Durch Anwendung der Formel 9) in §. 97 erhalten wir

$$S = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, d\theta\, dr = \frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{6}\, ab.$$

Fig. 87.



b. Der elliptische Kegel. In Fig. 87 sei $OC = c$ die Höhe des Kegels, ACB seine elliptische Basis mit den Halbachsen $AC = a$, $BC = b$; die Coordinatenebene xy möge parallel zur Ebene ABC durch die Spitze O gehen. Die Gleichung der Fläche ist dann

$$z = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

und wenn zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} = \beta$$

gesetzt wird, so findet sich

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Die Horizontalprojection des Mantelquadranten $AOBA$ ist eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse, daher

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx\, dy \sqrt{\left\{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}.$$

Nach Formel 9) in §. 97 ergiebt sich

$$S = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \sqrt{\alpha^2 \cos^2\theta + \beta^2 \sin^2\theta}\; r\, d\theta\, dr$$

$$= \tfrac{1}{2} ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\alpha^2 \cos^2\theta + \beta^2 \sin^2\theta}\, d\theta,$$

mithin für den ganzen Mantel

$$M = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}\,.\,4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\alpha^2 ab\cos^2\theta + \beta^2 ab\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Hierin liegt der geometrische Satz, dass der Kegelmantel dieselbe Fläche besitzt wie der Mantel eines Cylinders, dessen Höhe $=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, und dessen Basis eine aus den Halbachsen $\alpha\sqrt{ab}$ und $\beta\sqrt{ab}$ construirte Ellipse ist.

c. Das dreiachsige Ellipsoid. Die Halbachsen der Fläche mögen a, b, c heissen, es sei ferner $a > b > c$ und zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} = \beta.$$

Aus der Gleichung der Fläche nämlich

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

findet man

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1 - \left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 - \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Verstehen wir unter S die Fläche eines ellipsoidischen Octanten, so ist die Horizontalprojection von S ein Ellipsenquadrant mit den Halbachsen a und b, mithin

$$S = \int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx\,dy\sqrt{\left\{\frac{1 - \left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 - \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\right\}}.$$

Durch Anwendung von Formel 9) in §. 97, wobei zur Abkürzung

$$\alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\theta = s^2$$

sein möge, ergiebt sich sofort

$$S = ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1 - s^2 r^2}{1 - r^2}}\,r\,dr.$$

Statt r führen wir eine neue Variabele u ein mittelst der Substitution

$$\frac{1 - r^2}{1 - s^2 r^2} = u^2,$$

woraus

$$r^2 = \frac{1 - u^2}{1 - s^2 u^2}, \quad r\,dr = -\frac{(1 - s^2)u\,du}{(1 - s^2 u^2)^2}$$

folgt; wir erhalten

$$S = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1 - s^2}{(1 - s^2 u^2)^2}\, du$$

oder auch, wenn die Reihenfolge der Integrationen umgekehrt und für s^2 sein Werth gesetzt wird,

$$S = ab \int_0^1 du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1 - \alpha^2)\cos^2\theta + (1 - \beta^2)\sin^2\theta}{[(1 - \alpha^2 u^2)\cos^2\theta + (1 - \beta^2 u^2)\sin^2\theta]^2}\, d\theta.$$

Unter Anwendung der leicht entwickelbaren Formeln

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4m\sqrt{mn}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4n\sqrt{mn}}$$

folgt schliesslich

$$S = \tfrac{1}{4}\pi ab \int_0^1 \left\{ \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 u^2} + \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}}.$$

Man kann dieser Formel noch eine andere Gestalt verleihen, wenn man die identische Gleichung beachtet

$$\int \left\{ \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 u^2} + \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}}$$

$$= \frac{1}{u}\left\{1 - \frac{1 - u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}\right\} + \int \left\{1 - \frac{1 - u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}\right\} \frac{du}{u^2},$$

welche durch Differentiation leicht zu prüfen ist; es ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{4}\pi ab \left[1 + \int_0^1 \left\{1 - \frac{1 - u^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}}\right\} \frac{du}{u^2}\right].$$

Nach §. 74 hat es keine Schwierigkeit, dieses Integral auf verschiedene Weise in unendliche Reihen zu verwandeln.

d. Die Schraubenfläche. Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich für den Fall, dass die Achse der Fläche zur z-Achse genommen wird

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{c}$$

oder, wenn man sich auf den Quadranten der ersten Windung beschränkt,

$$z = c \arctan \frac{y}{x}.$$

Hieraus folgt

$$S = \int\int \sqrt{1 + \frac{c^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

und in Polarcoordinaten

$$S = \int\int \sqrt{r^2 + c^2}\, d\theta\, dr.$$

Als Horizontalprojection des zu bestimmenden Flächenstückes nehmen wir ein gemischtliniges Viereck begrenzt von zwei mit den Radien r_0, r_1 beschriebenen Kreisen und von den zwei Radien, welche mit der x-Achse die gegebenen Winkel θ_0 und θ_1 einschliessen; es ist dann

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{c^2 + r^2}\, d\theta\, dr$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$S = \tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0) \left\{ r_1 \sqrt{c^2 + r_1^2} - r_0 \sqrt{c^2 + r_0^2} + c^2 l \left(\frac{r_1 + \sqrt{c^2 + r_1^2}}{r_0 + \sqrt{c^2 + r_0^2}} \right) \right\}.$$

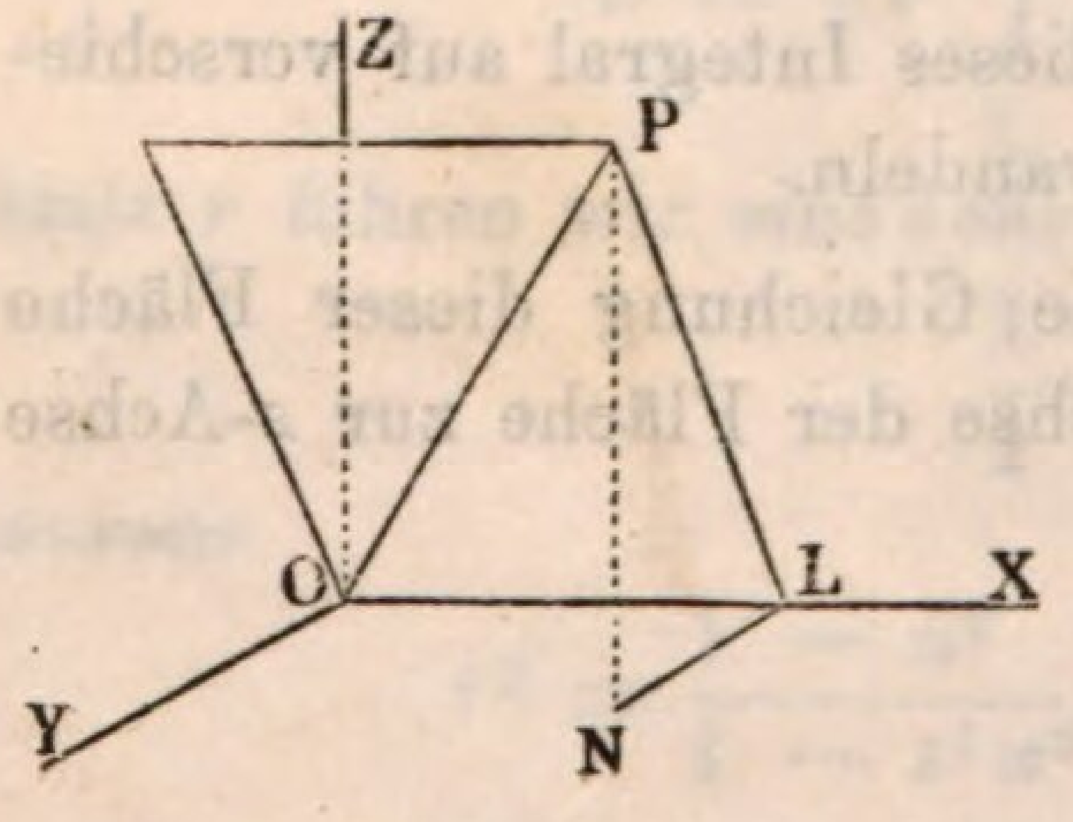
§. 100.

Complanationsformel für Polarcoordinaten.

Statt der rechtwinkligen Coordinaten $OL = x$, $LN = y$, $NP = z$ benutzt man nicht selten räumliche Polarcoordinaten, indem man den Radiusvector $OP = r$, den Winkel $POX = \theta$ und den Winkel zwischen den beiden Ebenen xy und LOP nämlich $\angle NLP = \omega$ mittelst der Formeln

1) $$x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta \cos\omega,\ z = r \sin\theta \sin\omega$$

Fig. 88.



in Rechnung bringt (Fig. 88). Nach Substitution dieser Werthe erhält man aus der ursprünglichen Flächengleichung $z = f(x, y)$ die Polargleichung derselben Fläche, und wenn man diese Gleichung nach r auflöst, so ist das Resultat von der Form

$$r = F(\theta, \omega);$$

darin sind θ und ω die neuen unabhängigen Variabelen. Bezeichnen wir für den Augenblick wie folgt

$$3)\qquad \varphi(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

und wenden die allgemeine Regel für die Substitution neuer Variabelen auf die Complanationsformel

$$S = \int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

an, so ist bei den neuen unabhängigen Variabelen θ und ω

$$4)\quad S = \int\int \varphi(r\cos\theta,\ r\sin\theta\cos\omega)\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\omega} - \frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) d\theta\, d\omega.$$

Hier kommt es nur noch darauf an, den Werth von φ in Polarcoordinaten auszudrücken, also die partiellen Differentialquotienten von z zu entfernen und dafür die partiellen Differentialquotienten von r einzuführen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Da z eine Function von x und y war, mithin auch von θ und ω abhängt, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\omega} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\omega} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\omega}.$$

Diese Gleichungen liefern die Werthe der beiden Unbekannten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$; setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\omega} - \frac{\partial y}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta} = L,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\omega} - \frac{\partial z}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} = M,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\omega} - \frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} = N,$$

so findet man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{L}{N},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{M}{N},$$

mithin

$$\varphi = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{N}.$$

Nach Substitution dieses Werthes geht die Formel 4) über in

$$5)\qquad S = \int\int \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\, d\theta\, d\omega.$$

Die Differentiation der Gleichungen 1) giebt ferner, wenn man immer beachtet, dass r von θ und ω abhängt,

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\cos\omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\sin\omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\sin\omega + r\cos\omega\right)\sin\theta,$$

und mittelst derselben erhält man

$$L = r\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\sin\theta,$$

$$M = -r\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\theta\cos\omega - \frac{\partial r}{\partial \omega}\sin\omega\right],$$

$$N = -r\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\theta\sin\omega + \frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega\right],$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = r^2\left[\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right\}\sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2\right].$$

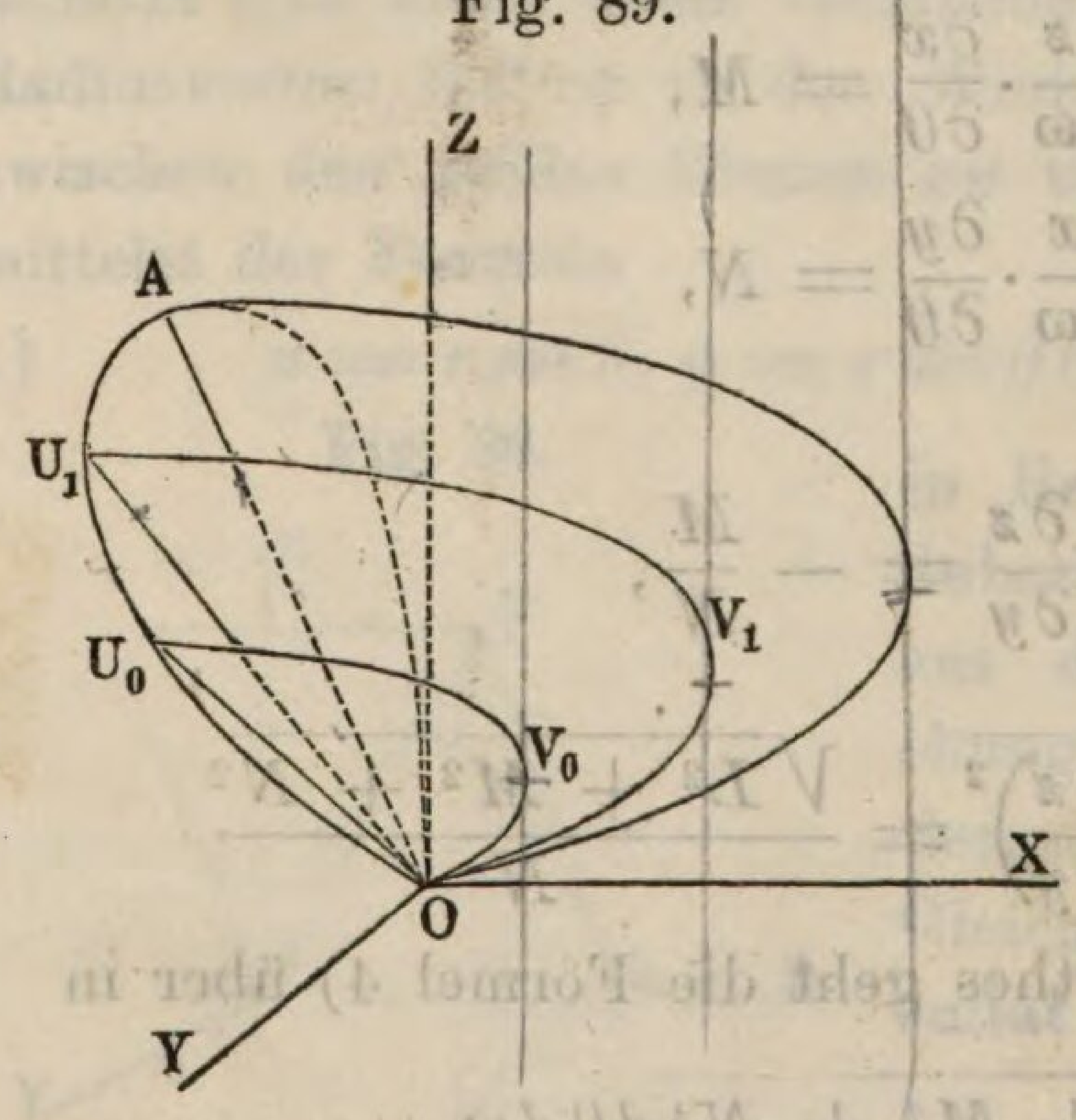
Die Formel 5) gewinnt hiernach folgende Gestalt

$$6) \quad S = \int\int \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\}\sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2}\; r\,d\theta\,d\omega;$$

dabei sind, wie immer, die Integrationsgrenzen aus der Begrenzung des gegebenen Flächenstückes herzuleiten.

Beispielsweis betrachten wir eine Fläche von folgender Entstehungsweise. In der Ebene yz sei eine Lemniscate construirt (Fig. 89), deren Halbachse $OA = a$ den rechten Winkel YOZ halbiren möge; man legt ferner Ebenen wie z. B. XOU_0 und XOU_1, welche die x-Achse in sich enthalten und die Lemniscate in U_0, U_1 etc. schneiden; in jeder dieser Ebenen nimmt man die betreffende Lemniscatensehne (OU_0, OU_1 etc.) zum Durchmesser eines Kreises und denkt sich durch die stetige Folge dieser Kreise die Fläche erzeugt. Als Gleichung der letzteren findet man in rechtwinkligen Coordinaten

Fig. 89.



$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2yz,$$

woraus augenblicklich erhellt, dass die Complanation in rechtwinkligen Coordinaten zu ausserordentlichen Weitläufigkeiten führen würde; dagegen ist bei Polarcoordinaten sehr einfach

$$r = a \sin\theta \sqrt{\sin 2\omega},$$

$$\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} = \frac{a \sin\theta}{\sqrt{\sin 2\omega}}.$$

Verstehen wir unter S den Sector der Fläche, welcher einerseits von zwei, zu den Neigungswinkeln $XOU_0 = \omega_0$ und $XOU_1 = \omega_1$ gehörenden Halbkreisen OU_0V_0 und OU_1V_1, anderseits von dem Lemniscatenbogen U_0U_1 begrenzt wird, so haben wir ω von ω_0 bis ω_1, θ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ auszudehnen; dies giebt

$$S = a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin^2\theta \, d\theta \, d\omega = \tfrac{1}{4}\pi a^2 (\omega_1 - \omega_0).$$

Für $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \frac{1}{2}\pi$ erhält man den Inhalt des in der Figur angegebenen vierten Theiles der Fläche; der Inhalt der ganzen Fläche ist demnach $= \frac{1}{2}\pi^2 a^2$.

§. 101.

Die dreifachen Integrale.

Sowie ein Doppelintegral den Grenzwerth einer Doppelsumme bildet, so soll auch das dreifache Integral

$$1) \qquad W = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

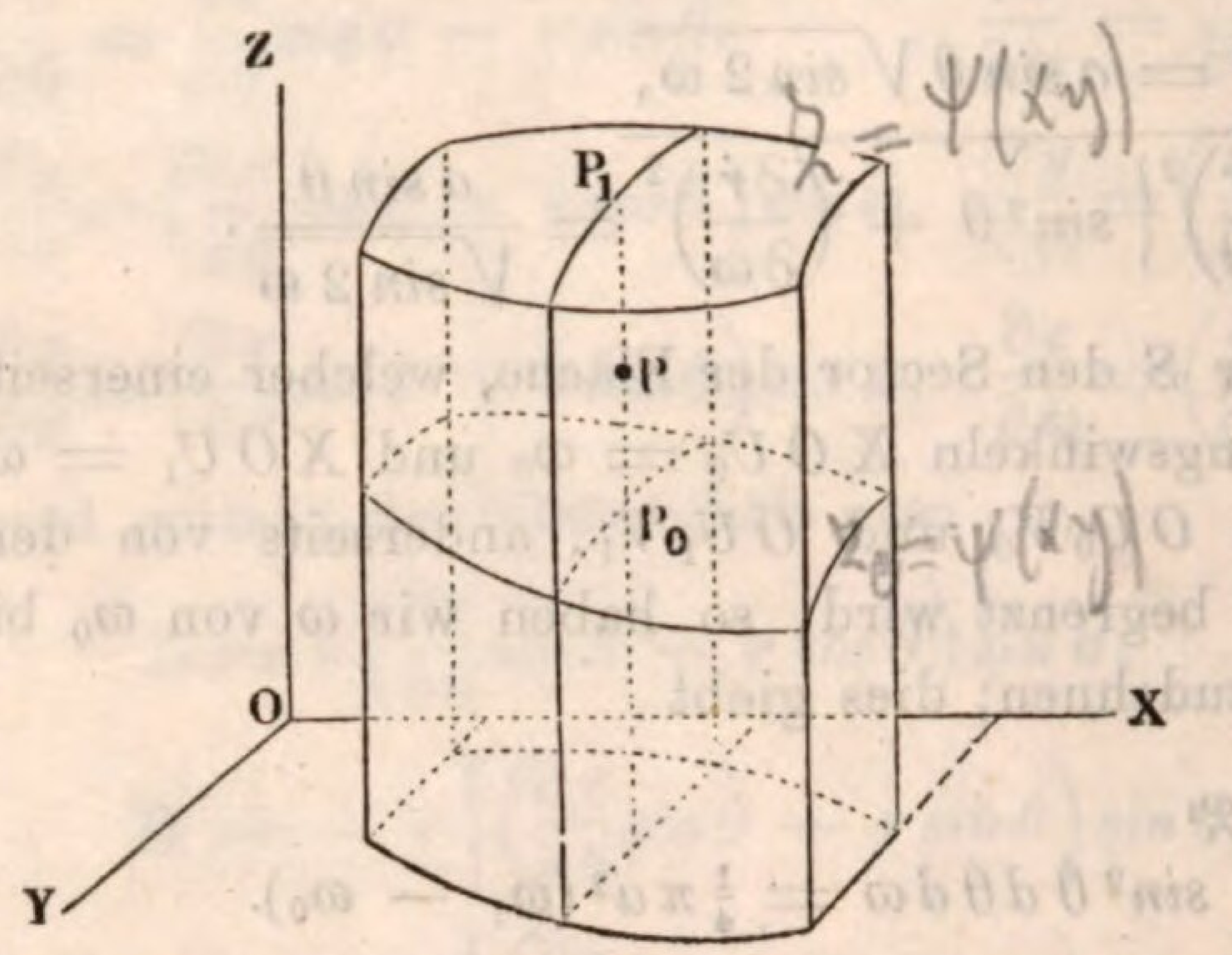
als Grenzwerth der dreifachen Summe gelten, welche entsteht, wenn man in dem Producte $F(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$ den unabhängigen Variabeln x, y, z alle zwischen den Grenzen x_0 und X, y_0 und Y, z_0 und Z liegenden Werthe giebt, und nachher alle erhaltenen Producte unter der Voraussetzung addirt, dass Δx, Δy, Δz gleichzeitig gegen die Null convergiren.

Nicht selten gestatten diese Operationen eine geometrische Auffassung. Betrachtet man z. B. in dem Integrale

$$W = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} dx \, dy \, dz$$

x, y, z als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes P (Fig. 90), so bedeutet das Product $dx\,dy\,dz$ den Körperinhalt eines Parallelepipedes, dessen drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten dx, dy, dz sind; demnach ist W die Summe einer unendlichen Menge solcher Volumenelemente, mithin selbst ein Volumen, welches auf folgende Weise entsteht. Denken wir uns zwei Flächen construirt, deren Gleichungen $z_0 = \psi(x, y)$ und $Z = \Psi(x, y)$ sein mögen, und summiren erst alle von $z = z_0$ bis $z = Z$ vertical aneinander gereihten Elemente, so giebt der Ausdruck

Fig. 90.



$$\int_{z_0}^{Z} dx\,dy\,dz = dx\,dy\,(Z - z_0)$$

den Inhalt eines Parallelepipedes, dessen Horizontalquerschnitt $dx\,dy$ unendlich klein, und dessen Höhe von endlicher Länge $= P_0 P_1 = Z - z_0$ ist. Auf das noch übrige Doppelintegral

$$W = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} Z\,dx\,dy - \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} z_0\,dx\,dy$$

können die Betrachtungen des §. 95 angewendet werden; sie zeigen, dass W ein Volumen bedeutet, welches dieselbe Horizontalprojection besitzt wie jenes in §. 95, und das ausserdem zwischen den zwei vorhin erwähnten Flächen liegt.

Eine ähnliche Anschauungsweise gestattet das allgemeinere Integral 1), nur muss man sich jedes Volumenelement $dx\,dy\,dz$ mit einem veränderlichen Factor $F(x, y, z)$ multiplicirt denken. Besonders klar wird dies, wenn man die mechanischen Begriffe von Masse und Dichtigkeit zu Hülfe nimmt. Bei einem durchaus homogenen Körper gilt nämlich die Regel, dass die Masse gleich ist dem Producte aus Dichtigkeit und Volumen; ändert sich aber die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt, in welchem Falle sie eine gegebene Function von x, y, z darstellt, so darf jene Regel nicht mehr für ein endliches Stück des Körpers angewendet werden, wohl aber für ein unendlich kleines;

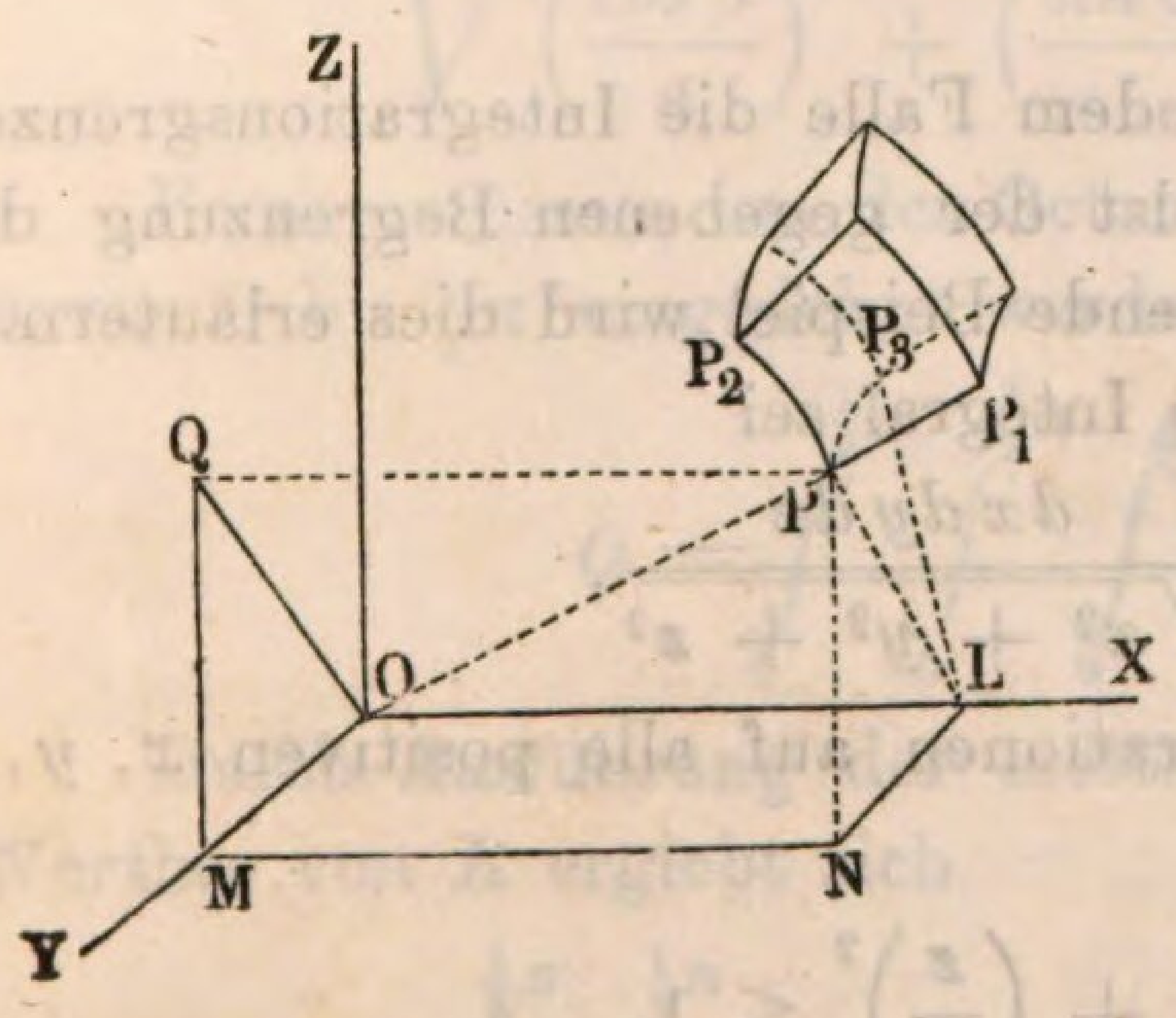
denn je kleiner ein Körperstück ist, um so eher kann es als homogen gelten. Bezeichnet demnach $F(x, y, z)$ die im Punkte xyz vorhandene Dichtigkeit, so ist $F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ die Masse des an jenem Punkte befindlichen Körperelementes d. h. kurz das Massenelement; die Summe aller nach den drei Dimensionen des Raumes vertheilten Massenelemente ist die Gesammtmasse $= W$. Dividirt man endlich W durch das Volumen V desselben Körpers, so erhält man seine mittlere Dichtigkeit.

In allen Fällen, wo die erste, auf z bezügliche Integration geradezu ausführbar ist, reducirt sich das dreifache Integral von selbst auf ein doppeltes, dessen weitere Behandlung den bereits entwickelten Regeln unterliegt; demnach bedarf nur der entgegengesetzte Fall einer Auseinandersetzung.

Das dreifache Integral W lässt sich ansehen als bestehend aus einem Doppelintegrale nach z und y nebst einem darauf folgenden einfachen Integrale nach x; reducirt man mittelst irgend einer der früheren Methoden das Doppelintegral zu einem einfachen Integrale, so giebt dieses mit der letzten Integration zusammen wieder ein Doppelintegral, dessen Reduction von Neuem zu versuchen ist. Auf diesem Grundgedanken beruht die folgende Aenderung des Coordinatensystemes.

Denkt man sich den Radiusvector $OP = r$ auf die Ebene yz projicirt (Fig. 91) und setzt die entstehende Projection $OQ = u$, ferner $\angle YOQ = \omega$, so kann man ω, u, x als sogenannte cylindrische Coordinaten des Punktes P ansehen, und der Uebergang von den rechtwinkligen zu den cylindrischen Coordinaten geschieht mittelst der Gleichungen

Fig. 91.



$$x = x, \quad y = u\cos\omega, \quad z = u\sin\omega.$$

Das in Beziehung auf y und z genommene Doppelintegral wird nun wie früher dadurch transformirt, dass man für y und z die obigen Werthe und $dy\,dz = u\,d\omega\,du$ setzt; dies giebt

2) $$\int\int\int F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int\int\int F(x, u\cos\omega, u\sin\omega)\,dx \,.\, u\,d\omega\,du.$$

Ferner lässt sich das dreifache Integral rechter Hand als Doppelintegral nach x und u nebst einem einfachen Integral nach ω ansehen, und in dem ersteren

$$x = r\cos\theta,\ u = r\sin\theta$$

substituiren. Für die ursprünglichen Coordinaten hat man jetzt

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\cos\omega,\quad z = r\sin\theta\sin\omega,$$

mithin sind r, θ, ω die räumlichen Polarcoordinaten des Punktes P. An die Stelle von $dx\,du$ tritt nun $r\,d\theta\,dr$ und so wird aus Nro. 2)

$$3)\qquad \int\int\int F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\int\int\int F(r\cos\theta,\ r\sin\theta\cos\omega,\ r\sin\theta\sin\omega)\,r^2\sin\theta\,d\omega\,d\theta\,dr.$$

Dieselbe Formel kann man auch direct erhalten, wenn man r, θ, ω um ihre Differentiale wachsen lässt und beachtet, dass das neue Volumenelement die Form eines einem Kugelgewölbe entnommenen Gewölbsteines besitzt. Die drei Dimensionen des Volumenelementes sind nämlich

$$PP_1 = dr,\quad PP_2 = r\,d\theta,\quad PP_3 = LP.d\omega = r\sin\theta\,d\omega$$

mithin ist der Inhalt des Volumenelementes

$$PP_1.PP_2.PP_3 = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\omega.$$

Hieraus folgt für das Massenelement der Werth

$$F(r\cos\theta,\ r\sin\theta\cos\omega,\ r\sin\theta\sin\omega)\,r^2\sin\theta\,d\omega\,d\theta\,dr,$$

und die Summe aller Massenelemente giebt wieder W übereinstimmend mit Formel 3).

Selbstverständlich sind in jedem Falle die Integrationsgrenzen für die neuen Coordinaten mittelst der gegebenen Begrenzung des Körpers zu bestimmen. Das folgende Beispiel wird dies erläutern.

Das zu reducirende dreifache Integral sei

$$Q = \int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

und darin mögen sich die Integrationen auf alle positiven x, y, z beziehen, welche der Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqq 1$$

genügen; mit anderen Worten, man sucht die Masse von dem Octanten eines mit den Halbachsen a, b, c beschriebenen Ellipsoides, worin die Dichtigkeit an der Stelle xyz durch

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$$

ausgedrückt wird, welches demnach aus einer stetigen Folge homogener concentrischer Kugelschaalen besteht. In rechtwinkligen Coordinaten ist zufolge der angegebenen Integrationsbedingung

$$Q = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \int_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

da man aber augenblicklich übersieht, dass die Rechnung ziemlich complicirt wird, so ist der Gebrauch von Polarcoordinaten räthlich. Bei diesen hat man

$$Q = \int\int\int r \sin\theta\, d\omega\, d\theta\, dr,$$

wo noch die Integrationsgrenzen zu bestimmen sind. Integriren wir zuerst in Beziehung auf r d. h. summiren wir alle in gerader Linie vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche des Ellipsoides liegenden Massenelemente, so fängt r mit $r = 0$ an und hört bei einem der Oberfläche des Ellipsoides zugehörigen Werthe $r = R$ auf. Der letztere bestimmt sich dadurch, dass man die Gleichung der Fläche in Polarcoordinaten umsetzt; sie lautet dann

$$\left(\frac{R\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\theta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\theta\sin\omega}{c}\right)^2 = 1$$

und giebt

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta\sin\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta\sin\omega}{c}\right)^2}}.$$

Ferner müssen, um den Octanten des Körpers zu erhalten, θ und ω von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt werden, und es ist daher

$$Q = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^R r \sin\theta\, d\omega\, d\theta\, dr.$$

Durch Ausführung der ersten Integration und Substitution des Werthes von R ergiebt sich

$$Q = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\omega\, d\theta}{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta\sin\omega}{c}\right)^2}.$$

Wegen der vier constanten Integrationsgrenzen kann die Reihenfolge der Integrationen ohne Weiteres umgekehrt werden; setzt man hierbei zur Abkürzung

$$B = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2},\quad C = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2},$$

so erhält man

$$Q = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{B\cos^2\omega + C\sin^2\omega} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{BC}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)}},$$

oder, wenn $\cos\theta = t$ substituirt wird,

$$Q = \tfrac{1}{4}\pi bc \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2}t^2\right)\left(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}t^2\right)}}.$$

Das Integral gestaltet sich noch etwas eleganter, wenn man die Excentricitäten des Ellipsoides in Rechnung bringt. Unter der Voraussetzung $a > b > c$ sei nämlich zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \beta,\quad \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \gamma;$$

es wird dann

$$Q = \tfrac{1}{4}\pi bc \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - \beta^2 t^2)(1 - \gamma^2 t^2)}}.$$

Im Falle eines Rotationsellipsoides lässt sich auch diese Integration leicht ausführen.

§. 102.

Substitution neuer Variabelen in dreifachen Integralen.

Die Aufgabe, womit wir uns im Folgenden beschäftigen, ist analog der in §. 98 gelösten und betrifft die Umwandlung, welche das dreifache Integral

1) $$W = \int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

erleidet, wenn statt der ursprünglichen Variabelen x, y, z drei neue Variabele r, s, t eingeführt werden, welche mit jenen durch Gleichungen von der Form

2) $x = \varphi(r,s,t), \quad y = \psi(r,s,t), \quad z = \chi(r,s,t)$

verbunden sind. Um diese Substitutionen nach einander vorzunehmen, denken wir uns die Gleichungen 2) durch drei andere ersetzt, nämlich

3) $x = \varphi(r,s,t), \quad y = \psi_1(x,s,t), \quad z = \chi_1(x,y,t);$

die erste derselben ist einerlei mit der ersten Gleichung in Nro. 2); die zweite entsteht, wenn r aus den beiden Gleichungen $x = \varphi(r,s,t)$ und $y = \psi(r,s,t)$ eliminirt wird; die dritte ist das Resultat der Elimination von r und s aus allen drei ursprünglichen Gleichungen. Statt der Variabelen z führen wir die Variabele t mittelst der Gleichung $z = \chi_1(x,y,t)$ ein und nennen zur Abkürzung $F_1(x,y,t)$ dasjenige, was bei dieser Substitution aus $F(x,y,z)$ wird; dies giebt

4) $$W = \int\int\int F_1(x,y,t)\,dx\,dy\,\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\,dt.$$

Da sich aber im Allgemeinen die Form von $\chi_1(x,y,t)$ nicht angeben lässt, so muss der Differentialquotient $\frac{\partial\chi_1}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}$ aus den ursprünglichen Gleichungen 2) entwickelt werden, indem man letztere mit der Rücksicht differenzirt, dass jetzt x und y als constant gelten, und nachher dr und ds eliminirt. Es ist zufolge dieser Bemerkungen

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt,$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial s}ds + \frac{\partial\psi}{\partial t}dt,$$

$$dz = \frac{\partial\chi}{\partial r}dr + \frac{\partial\chi}{\partial s}ds + \frac{\partial\chi}{\partial t}dt,$$

und wenn zur Abkürzung

5) $$N = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial s}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\partial\chi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\chi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)$$
$$+ \frac{\partial\chi}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s}\right),$$

$$M = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial s}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

gesetzt wird, so giebt die Elimination von dr und ds

$$dt = \frac{M}{N}dz \quad \text{oder} \quad dz = \frac{N}{M}dt,$$

mithin nach Nro. 4)

$$W = \int\int\int F_1(x,y,t)\,\frac{N}{M}\,dx\,dy\,dt.$$

Um zweitens statt y die neue Variabele s einzuführen, benutzen wir die Substitution $y = \psi_1(x, s, t)$ und nennen $F_2(x, s, t)$ dasjenige, was hierbei aus $F_1(x, y, t)$ wird; zunächst haben wir:

$$6)\qquad W = \int\int\int F_2(x, s, t)\frac{N}{M}\,dx\,\frac{\partial\psi_1}{\partial s}\,ds\,dt.$$

Dabei ist noch $\frac{\partial\psi_1}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s}$ aus den Gleichungen 2) herzuleiten; es geschieht dies, wenn man die beiden ersten jener Gleichungen differenzirt, dabei x und t als Constanten betrachtet und dr eliminirt. Hiernach ist

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds,$$

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial s}ds,$$

und wenn zur Abkürzung

$$L = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

gesetzt wird, so findet sich

$$ds = \frac{L}{M}dy \quad \text{oder} \quad dy = \frac{M}{L}ds$$

mithin aus Nro. 6)

$$W = \int\int\int F_2(x, s, t)\frac{N}{L}\,dx\,ds\,dt.$$

Endlich führen wir statt x die neue Variabele s ein mittelst der Substitution $x = \varphi(r, s, t)$ und nennen $F_3(r, s, t)$ dasjenige, was hierbei aus $F_2(x, s, t)$ wird. Da gleichzeitig s und t als Constanten zu betrachten sind, so ist einfach

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr = L\,dr$$

mithin

$$W = \int\int\int F_3(r, s, t)\,N\,dr\,ds\,dt.$$

Beachtet man noch, dass $F_3(r, s, t)$ nichts Anderes sein kann, als was unmittelbar durch Einführung von $\varphi(r, s, t)$, $\psi(r, s, t)$, $\chi(r, s, t)$ entstehen würde, so hat man die allgemeine Formel

$$7)\qquad \int\int\int F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int F(\varphi, \psi, \chi)\,N\,dr\,ds\,dt,$$

worin φ, ψ, χ aus Nro. 2) und N aus Nro. 5) einzusetzen sind.

Zu demselben Resultate führt auch eine geometrische Betrachtung. Denken wir uns nämlich x, y, z als die ursprünglichen, r, s, t

als neue Coordinaten eines Punktes P im Raume, so dienen die Gleichungen 2) zum Uebergange von dem ersten zum zweiten Coordinatensysteme. Es sei ferner $F(x, y, z)$ die Dichtigkeit an der Stelle xyz; es ist dann die Dichtigkeit an der Stelle rst durch

$$F[\varphi(r,s,t), \quad \psi(r,s,t), \quad \chi(r,s,t)]$$

zu bezeichnen, wofür wir kurz $F(\varphi, \psi, \chi)$ schreiben. Um nun in beiden Coordinatensystemen das dreifache Integral W als Masse eines Körpers zu betrachten, kommt es nur noch auf die Bestimmung des neuen Volumenelementes an, welches statt des früheren $dx\,dy\,dz$ zu setzen ist. Letzteres war ein Parallelepiped, dessen acht Ecken folgende Coordinaten hatten:

$$x,y,z; \quad x+dx,y,z; \quad x,y+dy,z; \quad x,y,z+dz;$$
$$x+dx,y+dy,z; \quad x+dx,y,z+dz; \quad x,y+dy,z+dz;$$
$$x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz;$$

in gleicher Weise ist das neue Volumenelement ein schiefes Parallelepiped, dessen Ecken P, P_1, P_2, P_3 u. s. w. die Coordinaten

$$r,s,t; \quad r+dr,s,t; \quad r,s+ds,t; \quad r,s,t+dt \text{ u. s. w.}$$

besitzen, und dessen Inhalt, wegen der unendlichen Kleinheit seiner Dimensionen, als das Sechsfache der Pyramide $PP_1P_2P_3$ angesehen werden darf. Legen wir durch P ein Coordinatensystem parallel zu dem ersten und bezeichnen wir die neuen rechtwinkligen Coordinaten von P_1, P_2, P_3 mit $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$, $\xi_3\eta_3\zeta_3$, so ist der sechsfache Inhalt von $PP_1P_2P_3$, also das Volumenelement

$$= \xi_1(\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2) + \eta_1(\zeta_2\xi_3 - \zeta_3\xi_2) + \zeta_1(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2).$$

Ferner hat man in Beziehung auf das ursprüngliche Coordinatensystem $\xi_1 = x_1 - x$ oder, weil der Punkt P_1 durch alleinige Aenderung des r aus dem Punkte P hergeleitet wurde,

$$\xi_1 = \left(x + \frac{\partial x}{\partial r}dr\right) - x = \frac{\partial x}{\partial r}dr$$

ebenso

$$\eta_1 = \frac{\partial y}{\partial r}dr, \quad \zeta_1 = \frac{\partial z}{\partial r}dr,$$

$$\xi_2 = \frac{\partial x}{\partial s}ds, \quad \eta_2 = \frac{\partial y}{\partial s}ds, \quad \zeta_2 = \frac{\partial z}{\partial s}ds,$$

$$\xi_3 = \frac{\partial x}{\partial t}dt, \quad \eta_3 = \frac{\partial y}{\partial t}dt, \quad \zeta_3 = \frac{\partial z}{\partial t}dt.$$

In den neuen Coordinaten r, s, t ausgedrückt ist also das Volumenelement

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial z}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right] dr\,ds\,dt$$
$$= N dr\,ds\,dt,$$

wofern man x, y, z durch φ, ψ, χ ersetzt. Das Massenelement wird hiernach

$$F(\varphi, \psi, \chi)\, N dr\,ds\,dt,$$

und die Summe aller Massenelemente, d. h das dreifache Integral

$$\int\int\int F(\varphi, \psi, \chi)\, N dr\,ds\,dt$$

giebt dieselbe Masse wie vorhin, wenn die Integrationsgrenzen für r, s, t entsprechend der Begrenzung des Körpers gewählt werden.

Als Beispiel diene das Integral

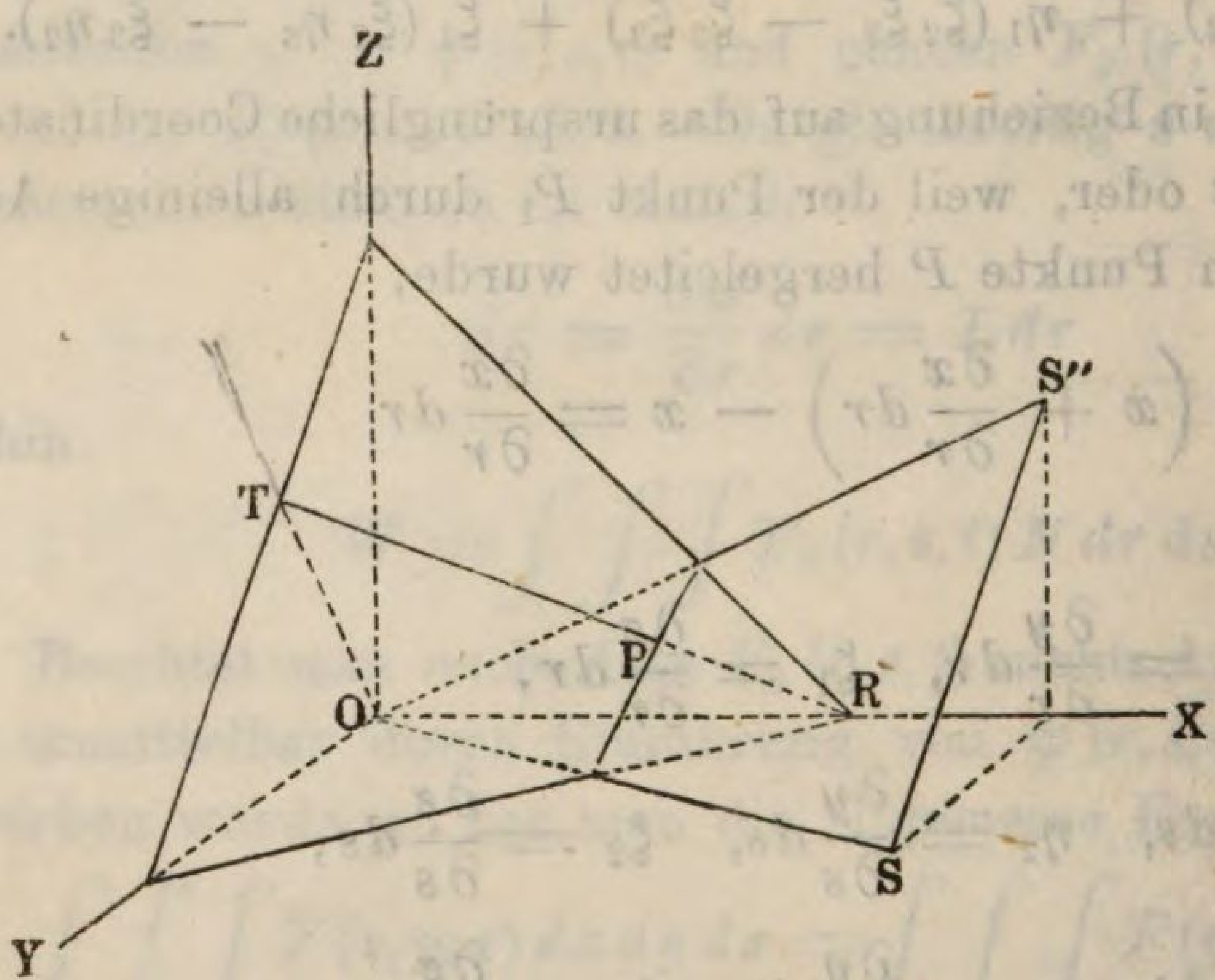
$$8)\qquad W = \int\int\int \frac{f(x+y+z)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}\, dx\,dy\,dz,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$9)\qquad 0 \leqq x + y + z \leqq h$$

genügenden x, y, z beziehen mögen. Der Punkt xyz bleibt dann innerhalb einer Pyramide, welche von den Coordinatenebenen und von einer vierten Ebene begrenzt wird, die auf jeder Coordinatenachse die Strecke h abschneidet. Wir betrachten nun den Punkt xyz oder P in Fig. 92 als Durchschnitt von drei Hülfsebenen, welche auf folgende Weise entstehen. Erstens legen wir durch P eine Ebene parallel zu der vorhin erwähnten vierten Ebene und nennen r jeden ihrer gleichen Achsenabschnitte; die Gleichung dieser Ebene ist

Fig. 92.



$$x + y + z = r$$

und in der Figur $OR = r$. Zweitens legen wir durch P und durch den Coordinatenanfang eine Ebene, welche mit den Ebenen xy und

xz gleiche Neigungswinkel bildet, und nennen σ jeden der Winkel XOS', XOS''; die Gleichung der Ebene $S'OS''$ ist dann

$$y + z = x \tan \sigma.$$

Endlich legen wir eine Ebene durch P und die x-Achse und bezeichnen mit τ den Neigungswinkel zwischen der neuen Ebene ROT und der xy-Ebene; dies giebt

$$z = y \tan \tau.$$

Insofern die drei Grössen r, σ, τ die Lage des Punktes P unzweideutig bestimmen, können sie als neue Coordinaten desselben gelten, und wenn man mittelst der vorigen drei Gleichungen x, y, z durch r, σ, τ ausdrückt, so erhält man folgende Formeln zum Uebergange von dem einen Coordinatensystem zum andern:

$$x = \frac{r}{1 + \tan \sigma},$$

$$y = \frac{r \tan \sigma}{(1 + \tan \sigma)(1 + \tan \tau)}, \quad z = \frac{r \tan \sigma \tan \tau}{(1 + \tan \sigma)(1 + \tan \tau)}$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{1}{1 + \tan \sigma} = s, \quad \frac{1}{1 + \tan \tau} = t;$$

es ist dann einfacher

$$x = rs, \quad y = r(1 - s)t, \quad z = r(1 - s)(1 - t),$$

und nun mögen r, s, t als neue Coordinaten von P betrachtet werden. Die vorstehenden Gleichungen sind von der in Nro. 2) angegebenen Form und würden, wenn man die Substitutionen nach einander vornehmen wollte, durch

$$x = rs, \quad y = \frac{xt(1 - s)}{s}, \quad z = \frac{y(1 - t)}{t}$$

zu ersetzen sein; man erhält in jedem Falle

$$W = \int\int\int \frac{f(r) r^2 (1 - s)\, dr\, ds\, dt}{[1 + \alpha rs + \beta r(1 - s)t + \gamma r(1 - s)(1 - t)]^3}.$$

Damit der Punkt P, vom Coordinatenanfange ausgehend, alle innerhalb des Körpers liegenden Stellen betrete, muss r von 0 bis h, σ von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0, mithin s von 0 bis 1, und τ von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0, also t von 0 bis 1 ausgedehnt werden. Setzt man noch zur Abkürzung

$$A = 1 + \alpha rs + \gamma r(1 - s), \quad B = (\beta - \gamma) r(1 - s),$$

so ist

$$W = \int_0^h r^2 f(r)\,dr \int_0^1 (1-s)\,ds \int_0^1 \frac{dt}{(A+Bt)^3}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^h r^2 f(r)\,dr \int_0^1 (1-s)\,ds\,\frac{2A+B}{(A+B)^2 A^2}.$$

Indem man ferner die Abkürzungen

$$1+\alpha r = a, \quad (\alpha-\beta)\,r = b, \quad (\alpha-\gamma)\,r = c$$

benutzt, erhält man

$$A+B = a - b\,(1-s), \quad A = a - c\,(1-s),$$

$$2A + B = 2a - (b+c)\,(1-s),$$

und das auf s bezügliche Integral wird dann

$$\int_0^1 \frac{(1-s)\,[2a-(b+c)\,(1-s)]\,ds}{[a-b\,(1-s)]^2\,[a-c\,(1-s)]^2}.$$

Durch Einführung von $1 - s = u$ geht dasselbe über in

$$\int_0^1 \frac{u\,[2a-(b+c)\,u]\,du}{(a-bu)^2\,(a-cu)^2}$$

$$= \frac{1}{b-c}\int_0^1 \left\{\frac{1}{(a-bu)^2} - \frac{1}{(a-cu)^2}\right\} du = \frac{1}{a\,(a-b)\,(a-c)},$$

mithin ist

10) $$W = \tfrac{1}{2}\int_0^h \frac{r^2 f(r)\,dr}{a\,(a-b)\,(a-c)}.$$

Aus 8), 9) und 10) folgt nun vermöge der Werthe von a, b, c,

$$\int_0^h\int_0^{h-x}\int_0^{h-x-y} \frac{f(x+y+z)\,dx\,dy\,dz}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^h \frac{r^2 f(r)\,dr}{(1+\alpha r)\,(1+\beta r)\,(1+\gamma r)}$$

und damit ist das dreifache Integral auf ein einfaches reducirt ohne Beeinträchtigung der willkürlichen Function f.

Die hier auseinander gesetzten Methoden sind auch auf vier- und mehrfache Integrale anwendbar, wie im zweiten Bande gezeigt werden soll.

Cap. XVII.

Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabelen.

§. 103.

Grundbegriffe; Trennung der Variabelen.

Die bisherigen Integrationen, mochten sie nun ein- oder mehrfache sein, bezogen sich immer auf entwickelte Differentiale, d. h. auf Producte von der Form $f(x)\,dx$ oder $f(x, y)\,dx\,dy$ u. s. w., worin f eine bekannte Function der gerade vorhandenen Variabelen bedeutete. Sehr häufig ist aber nicht unmittelbar der Differentialquotient einer Function, sondern nur eine Gleichung zwischen ihm und der Function gegeben, und dann kommt es darauf an, aus dieser Gleichung die Natur der Function zu bestimmen. So lässt sich z. B. die Frage nach derjenigen Function y von x stellen, welche ihrem Differentialquotienten gleich, für die also $\frac{dy}{dx} = y$ ist; ebenso kann man die Gleichung der Curve suchen, worin an jedem Punkte die Subtangente gleich der doppelten Abscisse, mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ ist u. s. w. Alle derartigen Gleichungen zwischen einer unbekannten Function und einem oder mehreren ihrer Differentialquotienten heissen **Differentialgleichungen**; die Aufgabe ist jederzeit, sie zu **integriren**, d. h. aus der Differentialgleichung eine weitere Gleichung, die sogenannte **Integralgleichung**, abzuleiten, in der keine Differentiale, sondern nur die ursprünglichen Variabelen und etwaige Constanten vorkommen.

Gewöhnlich classificirt man die Differentialgleichungen nach der

Ordnung des höchsten vorkommenden Differentialquotienten, indem man sagt, dass die Differentialgleichung von der nten Ordnung sei, wenn der höchste in ihr enthaltene Differentialquotient von der nten Ordnung ist. Das allgemeine Schema der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabelen x und y ist demnach

$$1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

oder, wenn man sich die Gleichung auf $\frac{dy}{dx}$ reducirt denkt,

$$2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \text{ oder } \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0.$$

Bevor wir die Integration der Differentialgleichungen näher betrachten, wollen wir erst einen Blick auf die geometrische Bedeutung dieser Operation werfen. Sehen wir in einer Gleichung von der Form

$$3) \qquad \frac{dy}{dx} = \chi(x, y)$$

x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes an, so ist zwar die Natur der Curve noch nicht bekannt, auf welcher sich derselbe befindet, man kennt aber die Richtung der Tangente an dieser Linie, denn die Gleichung 3) giebt $tan\,\tau = \chi(x, y)$, wo τ den Winkel zwischen der Abscissenachse und der Tangente am Punkte xy bezeichnet. Geben wir dem x und y zwei willkürliche Anfangswerthe $x = x_0$ und $y = y_0$, so lässt sich die Tangente vermöge der Gleichung $tan\,\tau_0 = \chi(x_0, y_0)$ construiren; auf dieser nehmen wir nahe an $x_0 y_0$ einen zweiten Punkt $x_1 y_1$ und betrachten das zwischen $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ liegende Stück der Tangente, welches t_0 heissen möge, als näherungsweise zusammenfallend mit der Curve. Von diesem zweiten Curvenpunkte $x_1 y_1$ ausgehend, können wir die vorige Construction wiederholen, also $tan\,\tau_1 = \chi(x_1, y_1)$ bestimmen, die Tangente ziehen, auf ihr ein Stück t_1 abschneiden und damit zu einem dritten Punkte $x_2 y_2$ gelangen u. s. f. Das so construirte Polygon schliesst sich der gesuchten Curve offenbar um so genauer an, je kleiner seine Seiten t_0, t_1, t_2 etc. sind, und man ersieht hieraus die Möglichkeit einer zwar näherungsweisen aber bis zu jedem beliebigen Genauigkeitsgrade verfolgbaren Integration der gegebenen Differentialgleichung. Man bemerkt zugleich eine gewisse Unbestimmtheit, welche in der Lösung der Aufgabe liegt. Da nämlich der erste Punkt $x_0 y_0$ willkürlich bleibt, so giebt es nicht eine, sondern unendlich viele Curven mit der in Nro. 3) verlangten Eigenschaft; diese Curven sind im Allgemeinen

von derselben Natur und nur verschieden in der Lage oder in den Dimensionen. So z. B. genügt der anfangs erwähnten Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ jede Gleichung von der Form $y = \sqrt{kx}$, wo k beliebig bleibt, d. h. in jeder Parabel ist die Subtangente der doppelten Abscisse gleich.

Auch analytisch begreift sich das Vorkommen einer willkürlichen Constante leicht, wenn man die Differentialgleichung entstehen lässt. Differenzirt man nämlich eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, k) = 0,$$

worin k eine Constante bezeichnet, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

und wenn k aus beiden Gleichungen eliminirt wird, so entsteht eine neue Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, d. h. eine Differentialgleichung; letztere bleibt dieselbe, welchen Werth man auch dem k ertheilt haben möge. Umgekehrt ist $F(x, y, k) = 0$ die zu Grunde liegende Integralgleichung; soll dieselbe allgemein sein, so muss darin, wie vorher, die willkürliche Constante k vorkommen; ausserdem würde man nur eine specielle oder, wie man zu sagen pflegt, eine particuläre Auflösung der Differentialgleichung haben. In manchen Fällen existirt noch eine ganz besondere, die sogenannte singuläre Auflösung; wie dieselbe entsteht, wird sich in §. 108 zeigen.

Die Integration einer Differentialgleichung gelingt immer, wenn sich eine Trennung der Variabelen vornehmen lässt, d. h. wenn man die Differentialgleichung auf die Form

4) $$X dx + Y dy = 0$$

bringen kann, wo X eine Function von x allein und Y eine Function von y allein bedeutet. Das allgemeine Integral wird nämlich in diesem Falle:

5) $$\int X dx + \int Y dy - Const. = 0;$$

man überzeugt sich hiervon sehr leicht, wenn man die linke Seite einstweilen mit $f(x, y)$ bezeichnet und den in §. 10 bewiesenen Satz

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

in Anwendung bringt; es ist dann $\frac{\partial f}{\partial x} = X$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Y$, weil in Nro. 5)

die Integrationen so geschehen, als wären x und y von einander unabhängige Variabele; man erhält folglich $X + Y\dfrac{dy}{dx} = 0$, was mit der Gleichung 4) übereinstimmt.

Etwas allgemeiner als die Differentialgleichung 4) ist die folgende:

$$6) \qquad X_1 Y_2 dx + X_2 Y_1 dy = 0,$$

in welcher X_1 und X_2 von y, Y_1 und Y_2 von x frei sein mögen; durch Division mit $X_2 Y_2$ wird daraus

$$\frac{X_1}{X_2}\, dx + \frac{Y_1}{Y_2}\, dy = 0,$$

mithin durch Integration:

$$7) \qquad \int \frac{X_1}{X_2}\, dx + \int \frac{Y_1}{Y_2}\, dy = Const.$$

Als geometrische Anwendung hiervon behandeln wir das Problem, die Curve zu finden, in welcher die Subtangente eine gegebene Function $\varphi(x)$ der Abscisse ist. Wir haben in diesem Falle die Differentialgleichung

$$y : \frac{dy}{dx} = \varphi(x),$$

oder, nach Trennung der Variabelen,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\varphi(x)},$$

mithin durch Integration:

$$ly = Const. + \int \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Um auf y zu reduciren, setzen wir $e^{Const.} = C$, wo C eine neue willkürliche Constante bezeichnet und erhalten

$$y = Ce^{\int \frac{dx}{\varphi(x)}}$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Aufgabe behandeln, die Curven zu finden, bei denen die Subtangente von der Form $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(y)}$ ist; man erhält als Integralgleichung:

$$\int \frac{dy}{y\psi(y)} = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + Const.$$

Ueberhaupt bieten die Subtangenten und Subnormalen der Curven, als Functionen der Abscissen oder Ordinaten betrachtet, eine ziemliche Auswahl solcher leicht zu integrirender Differentialgleichungen dar.

§. 104.

Substitution einer neuen Variabelen.

Wenn sich die Trennung der Veränderlichen nicht unmittelbar bewirken lässt, so ist es häufig von Vortheil, statt der ursprünglichen abhängigen Variabelen eine neue Variabele durch Substitution einzuführen und damit die gegebene Differentialgleichung in eine andere zu verwandeln; nicht selten gestattet dann die letztere jene Sonderung der Veränderlichen. Wir wollen einige allgemeine Fälle dieser Art angeben.

I. Es werde die Curve gesucht, in welcher der Winkel, den die Tangente am Punkte xy mit der x-Achse einschliesst, eine gegebene Function des Winkels zwischen Radiusvector und Abscissenachse ist, also nach der bisherigen Bezeichnung

$$\tau = F(\theta).$$

Da zufolge der gegebenen Bedingung auch $tan\,\tau$ eine bestimmte Function von $tan\,\theta$, etwa

$$tan\,\tau = \varphi\,(tan\,\theta)$$

sein muss, so hat man bei rechtwinkligen Coordinaten die Differentialgleichung

1) $$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

welche im Allgemeinen keine Sonderung der Variabelen zulässt. Setzt man dagegen $\frac{y}{x} = t$ oder $y = xt$, wo t eine neue abhängige Variabele bezeichnet, so wird aus Nro. 1)

2) $$x\frac{dt}{dx} + t = \varphi(t) \text{ oder } \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

und hier sind die Variabelen getrennt. Die Integration liefert jetzt eine Gleichung von der Form $\psi(t) = lx + Const.$, und wenn man statt t seinen Werth $\frac{y}{x}$ wieder einsetzt, so gelangt man zu der gesuchten Integralgleichung.

Soll z. B. $\tau = 2\,\theta$ sein, so folgt

$$tan\,\tau = \frac{2\,tan\,\theta}{1 - tan^2\,\theta},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2};$$

die erwähnte Substitution giebt

$$\frac{1 - t^2}{t(1 + t^2)}\,dt = \frac{dx}{x},$$

mithin ist durch Integration

$$l\,t - l(1 + t^2) = l\,x + Const.$$

Setzt man $Const = l\left(\frac{1}{2\,c}\right)$, so erhält man

$$l\left(\frac{y}{x}\right) - l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = l\left(\frac{x}{2\,c}\right)$$

oder

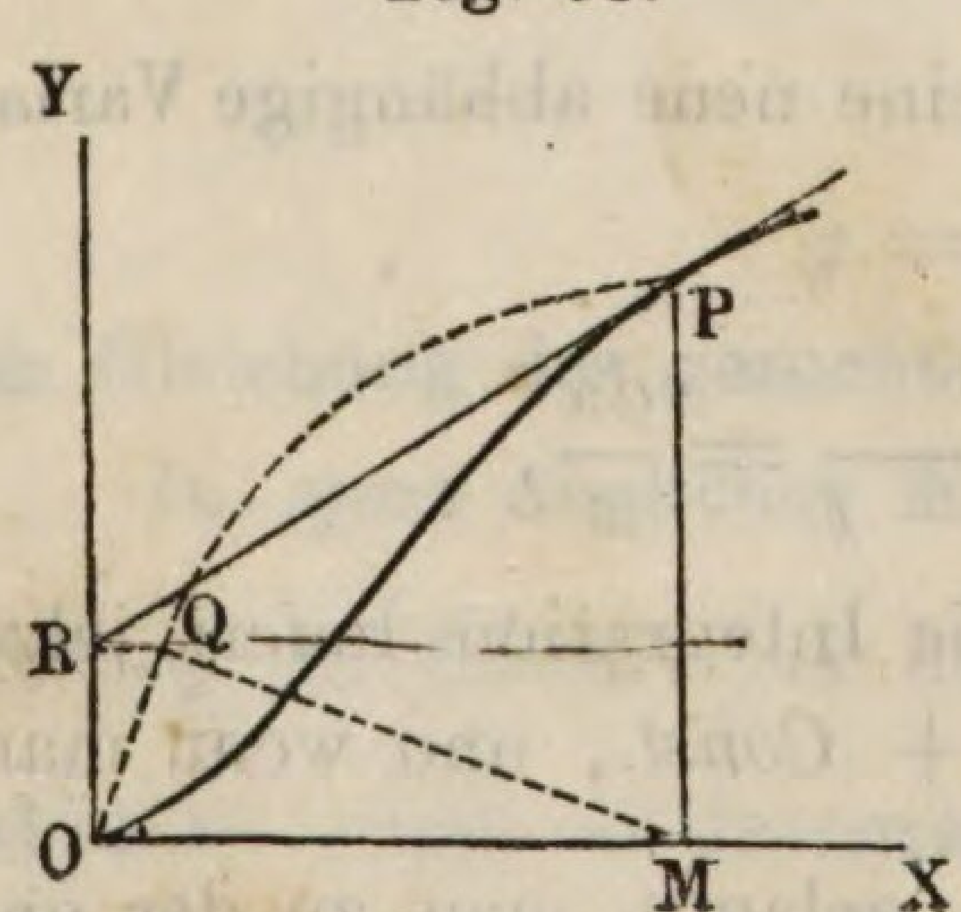
$$2\,c\,y = x^2 + y^2,\ y = c \pm \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Die gesuchte Curve ist also ein mit dem willkürlichen Halbmesser c beschriebener Kreis, welcher die Abscissenachse im Coordinatenanfange berührt.

Gleichungen von der Form 1) werden **homogene** Differentialgleichungen genannt, weil in ihnen zwei gleichartige Grössen, wie dort die Tangenten zweier Winkel, vorkommen. Ein ferneres Beispiel hierzu ist folgendes.

In einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen unbekannten Curve sei $OM = x$, $MP = y$ (Fig. 93); aus M beschreibt man mit dem Radius MP einen Kreis, legt an denselben von O aus die Tangente OQ, zieht durch den Berührungspunkt Q parallel zur x-Achse eine Gerade, welche die y-Achse in R schneidet, und verbindet endlich R geradlinig mit P; man verlangt, dass RP die Curve in P berühre. Die Construction giebt

Fig. 93.



$$OR = \frac{y\sqrt{x^2 - y^2}}{x},$$

und da andererseits bei jeder Curve

$$OR = y - x \tan \tau$$

ist, so hat man die Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Mittelst der Substitution $y = xt$ wird hieraus

$$x\frac{dt}{dx} = -t\sqrt{1 - t^2} \text{ oder } -\frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}} = \frac{dx}{x}$$

und durch Integration

$$l\left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}\right) = l\left(\frac{x}{a}\right),$$

wobei a eine willkürliche Constante bezeichnet. Nach Restitution des Werthes von t erhält man als Gleichung der gesuchten Curve

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y} = \frac{x}{a} \text{ oder } y = \frac{2ax^2}{a^2 + x^2},$$

wonach dieselbe leicht zu construiren ist.

II. Die Substitution $y = xt$ leistet auch bei der nicht homogenen Differentialgleichung

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + f(x)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

gute Dienste; es wird nämlich

$$4)\qquad x\frac{dt}{dx} = f(x)\,\varphi(t) \text{ oder } \frac{dt}{\varphi(t)} = \frac{f(x)}{x}\,dx,$$

wo nun die Variabelen getrennt sind, so dass die weitere Rechnung wie vorhin geführt werden kann.

Verlangt man z. B. diejenige Curve, für welche die von der Tangente am Punkte xy auf der y-Achse abgeschnittene Strecke $= \frac{x^4}{b^2 y}$ ist, wobei b eine gegebene Linie bedeutet, so hat man die Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{b^2 y}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{b^2}\cdot\frac{1}{\frac{y}{x}}.$$

Nach dem obigen Verfahren giebt dies

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{x^2}{b^2}\cdot\frac{1}{t} \text{ oder } t\,dt = -\frac{x\,dx}{b^2},$$

ferner durch Integration, wenn die Constante $= \frac{a^2}{2b^2}$ gesetzt wird,

$$t^2 = -\frac{x^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2},\quad y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{b}.$$

Unter Benutzung eines mit dem willkürlichen Radius a beschriebenen Kreises ist die Curve leicht zu construiren; sie hat eine ähnliche Gestalt wie die Lemniscate.

III. Um noch eine andere Substitution zu zeigen, betrachten wir die Differentialgleichung

$$5)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)\,\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - x}{y}$$

oder

$$6)\qquad x + y\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Setzt man hier

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

so folgt durch Differentiation

$$x + y\frac{dy}{dx} = r\frac{dr}{dx},$$

und aus Nro. 6) wird einfacher

$$7)\qquad r\frac{dr}{dx} = f(x)\,\varphi(r) \text{ oder } \frac{r\,dr}{\varphi(r)} = f(x)\,dx,$$

wo nun die Sonderung der Variabelen ausgeführt ist.

Verlangt man z. B. die Curve, bei welcher das von der Normale auf der x-Achse abgeschnittene Stück in constantem Verhältnisse zum Radiusvector steht, so hat man, wenn ε die gegebene Verhältnisszahl bezeichnet,

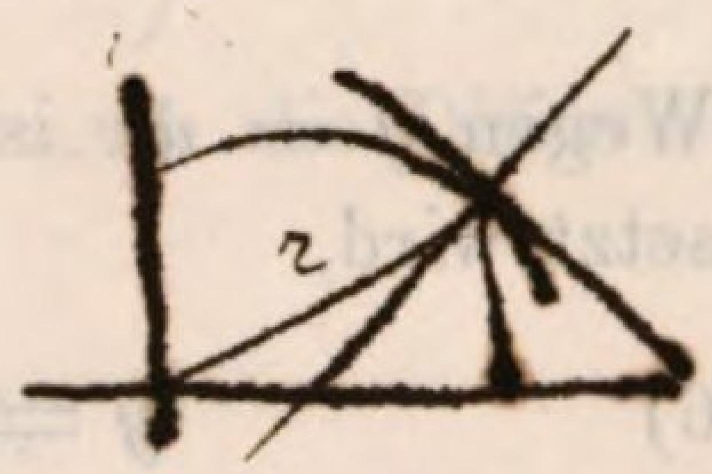
$$x + y\frac{dy}{dx} = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die obige Substitution giebt

$$\frac{dr}{dx} = \varepsilon, \quad r = \varepsilon x + c,$$

welches die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist, wenn ein Brennpunkt zum Coordinatenanfang und die Hauptachse zur x-Achse genommen wird.





§. 105.

Substitution zweier neuen Variabelen.

I. Eine ziemlich allgemeine und häufig vorkommende Differentialgleichung ist die folgende

$$1)\qquad \frac{dy}{dx} + Xy + X_0 = 0,$$

worin X und X_0 irgendwelche gegebene Functionen von x bedeuten. Die Substitution $y = xt$ würde hier zu keinem Resultate führen, man versucht daher eine allgemeinere Substitution, indem man sich y als Product zweier neuen Variabelen u und v denkt. Setzt man demgemäss

$$2)\qquad y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

so erhält man aus Nr. 1) die neue Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx} + Xu\right)v + \left(u\frac{dv}{dx} + X_0\right) = 0.$$

Diese ist erfüllt, wenn die noch unbekannten Functionen u und v den zwei Bedingungen

$$3)\qquad \frac{du}{dx} + Xu = 0, \quad u\frac{dv}{dx} + X_0 = 0$$

genügen. Die erste dieser Gleichungen giebt durch Sonderung der Variabelen und Integration

$$\frac{du}{u} = -Xdx, \quad lu = -\int X dx + A,$$

oder wenn $e^A = B$ gesetzt wird,

$$4)\qquad u = B e^{-\int X\,dx}.$$

Aus der zweiten Gleichung in Nro. 3) folgt unter Benutzung des für u gefundenen Werthes:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{X_0}{u} = -\frac{1}{B} X_0 e^{+\int X\,dx},$$

$$5)\qquad v = Const. - \frac{1}{B}\int X_0 e^{+\int X\,dx}\,dx.$$

Wegen $y = uv$ ist nun nach 4) und 5), wenn B . $Const. = C$ gesetzt wird,

$$6)\qquad y = \left(e^{-\int X\,dx}\right)\left(C - \int X_0 e^{\int X\,dx}\,dx\right).$$

Beispielsweis suchen wir die Curve, bei welcher das von der Tangente auf der y-Achse abgeschnittene Stück $= \sqrt{ax} - y$ ist. Die Differentialgleichung lautet in diesem Falle

$$y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{ax} - y$$

oder

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0,$$

es ist also

$$X = -\frac{2}{x},\quad X_0 = -\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Mittelst der Formel 6) erhält man

$$y = e^{2lx}\left(C + \int\sqrt{\frac{a}{x}}\,e^{-2lx}\,dx\right)$$

oder nach Ausführung der Integration und wenn $C = \frac{1}{b}$ gesetzt wird,

$$y = \frac{x^2}{b} - \frac{2}{3}\sqrt{ax}.$$

Die betreffende Curve ist übrigens mittelst zweier Parabeln leicht zu construiren.

II. Auf die Differentialgleichung 1) lässt sich die folgende

$$7)\qquad f'(z)\frac{dz}{dx} + Xf(z) + X_0 = 0$$

zurückführen, worin $f(z)$ eine gegebene Function von z allein und $f'(z)$ ihre nach z genommene Derivirte bedeutet. Setzt man nämlich

8) $$f(z) = y \text{ mithin } f'(z)\,dz = dy,$$

so erhält man die neue Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_0 = 0,$$

welche ganz mit Nro. 1) übereinstimmt. Das Integral von Nr. 7) ist daher nach 6) und 8)

9) $$f(z) = \left(e^{-\int X\,dx}\right)\left(C - \int X_0 e^{\int X\,dx}\,dx\right).$$

Zu der in Nr. 7) betrachteten Form gehört z. B. die Differentialgleichung

10) $$\frac{dz}{dx} + \frac{X}{m} z + \frac{X_0}{m} z^{1-m} = 0,$$

was man sogleich bemerkt, wenn man dafür schreibt

$$m z^{m-1} \frac{dz}{dx} + X z^m + X_0 = 0.$$

Hier ist $f(z) = z^m$ also die Integralgleichung von Nro. 10)

11) $$z^m = \left(e^{-\int X\,dx}\right)\left(C - \int X_0 e^{\int X\,dx}\,dx\right).$$

Setzt man in Nro. 10) $m = 1 - n$ und lässt $(1-n)X$ an die Stelle von X, ebenso $(1-n)X_0$ an die von X_0 treten, so hat man die Differentialgleichung:

12) $$\frac{dz}{dx} + Xz + X_0 z^n = 0$$

und als zugehörige Integralgleichung:

13) $$z^{1-n} = \left(e^{-(1-n)\int X\,dx}\right)\left\{C - (1-n)\int X_0 e^{(1-n)\int X\,dx}\,dx\right\}.$$

Ist z. B. gegeben

$$\frac{dz}{dx} + \frac{a}{x} z + b z^2 = 0,$$

so findet sich nach Nro. 13), falls $a \gtrless 1$ ist,

$$z = \frac{1-a}{c(1-a)x^a + bx},$$

und für $a = 1$

$$z = \frac{1}{x(c + b\,l\,x)}.$$

§. 106.

Vom integrirenden Factor.

I. Ausser dem Falle, wo die Trennung der Variabelen zu erreichen ist, giebt es noch einen zweiten, in welchem eine Differentialgleichung von der Form:

1) $$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0$$

allgemein integrirt werden kann. Erkennt man nämlich in der linken Seite, für sich allein betrachtet, das totale Differential einer Function $f(x,y)$, ist also

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = df,$$

so kann die Gleichung 1) nur dann bestehen, wenn $f(x,y) = Const.$ ist, und damit hat man unmittelbar die gesuchte Integralgleichung. So z. B. wird man der Differentialgleichung

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

auf der Stelle ansehen, dass sie mit der Gleichung $d(xy) = 0$ einerlei und folglich $xy = Const.$ ihr Integral ist. — Soll aber dieses Verfahren einen wissenschaftlichen Werth erhalten, so sind offenbar zwei Aufgaben zu lösen; man muss erstlich ein Criterium angeben, mittelst dessen sich entscheiden lässt, ob die linke Seite der Gleichung 1) ein vollständiges Differential ist oder nicht, und man hat zweitens, wenn das Letztere der Fall sein sollte, die zu Grunde liegende Function $f(x,y)$ und damit die Integralgleichung selbst zu entwickeln. Zur Lösung dieser Aufgaben dienen folgende Erörterungen.

Die linke Seite der Gleichung 1), oder kurz der Ausdruck:

$$\varphi\,.\,dx + \psi\,.\,dy$$

ist mit dem totalen Differentiale von f, d. h. mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

jedenfalls identisch, wenn die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \psi$$

stattfinden; differenzirt man die erste derselben partiell in Beziehung

auf y und die zweite partiell in Beziehung auf x, so entstehen die neuen Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

deren linke Seiten identisch sind (Formel 5 in §. 15); es muss daher

2) $$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

sein, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so bildet $\varphi . dx + \psi . dy$ das vollständige Differential von f. Um die letztere Function zu bestimmen, erinnern wir an die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi$; aus ihr folgt

$$f = \int \varphi . dx + K,$$

wo sich die Integration auf x allein (bei constant gelassenem y) bezieht und K eine Constante bezeichnet, die von x frei ist, demohngeachtet aber y enthalten, also eine Function von y sein kann. Sie bestimmt sich, wenn man die Gleichung partiell in Beziehung auf y differenzirt, wodurch

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial K}{\partial y}$$

entsteht; dies muss mit ψ einerlei sein und man hat daher

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \psi - \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx,$$

folglich

$$K = C + \int \psi . dy - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx.$$

In den früheren Werth von f substituirt, giebt dies die Integralgleichung $f = 0$, nämlich:

3) $$C + \int \varphi . dx + \int \psi . dy - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = 0,$$

worin die angedeuteten Integrationen jederzeit partiell auf die Variabele zu beziehen sind, deren Differential unter dem Integralzeichen vorkommt.

So ist z. B. die in Nro. 2) angegebene Bedingung bei der folgenden Differentialgleichung erfüllt:

$$(x^m + y) dx + (y^n + x) dy = 0,$$

nämlich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 = \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

die Ausführung der in Nro. 3) angedeuteten Integrationen giebt:

$$\int \varphi . dx = \int (x^m + y) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + yx,$$

$$\int \psi . dx = \int (y^n + x) dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy,$$

$$\int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = \int dy \int dx = yx,$$

und daher ist die gesuchte Integralgleichung:

$$C + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy = 0.$$

II. Es kann auch der Fall vorkommen, dass eine Differentialgleichung zwar durch Differentiation einer Gleichung von der Form $f(x, y) = Const.$ entstanden ist, dass aber gleichwohl die Bedingung in 2) unerfüllt bleibt. Stellt sich nämlich das Differential der Gleichung $f = Const.$ unter die Form:

4) $$(\varphi . dx + \psi . dx) \chi = 0,$$

wo φ, ψ und χ Functionen von x und y bezeichnen, so wird man den gemeinschaftlichen Factor χ weglassen, weil die linke Seite $= 0$, χ aber von Null verschieden ist; in der nunmehrigen Gleichung $\varphi . dx + \psi . dy = 0$ bildet die linke Seite kein vollständiges Differential mehr und daher findet die Gleichung 2) nicht statt. Aus der Gleichung $\frac{x}{y} = Const.$ z. B. folgt

$$\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = \frac{1}{y^2} [y\, dx - x\, dy] = 0,$$

oder:

$$y\, dx - x\, dy = 0;$$

in der ersten Form hat man linker Hand ein vollständiges Differential und in der That ist auch

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x};$$

in der zweiten Form dagegen ist die linke Seite durch Verlust des gemeinschaftlichen Factors $\frac{1}{y^2}$ zu einem unvollständigen Differential

geworden und die Gleichung 2) trifft nicht mehr zu. Wenn nun überhaupt die in der Differentialgleichung

$$5) \qquad \varphi . dx + \psi . dy = 0$$

vorkommenden Functionen der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ nicht genügen, so ist doch die vorige Integrationsmethode immer noch anwendbar, sobald sich der sogenannte integrirende Factor χ finden lässt, nach dessen Zusatz die Gleichung 5) in Nro. 4), d. h. in ein vollständiges Differential übergeht; man kann nämlich $\varphi . \chi = \varphi_1$, $\psi . \chi = \psi_1$ setzen und dann mit φ_1 und ψ_1 ebenso wie vorhin mit φ und ψ operiren. Der Factor χ muss aber so beschaffen sein, dass

$$\frac{\partial(\varphi . \chi)}{\partial y} = \frac{\partial(\psi . \chi)}{\partial x}$$

ist; entwickelt man diese partiellen Differentialquotienten, so wird:

$$6) \qquad \varphi \frac{\partial \chi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \chi = 0.$$

Die Aufsuchung des integrirenden Factors erheischt demnach selbst wieder die Integration einer Differentialgleichung, und da letztere meistentheils verwickelter als die ursprüngliche Differentialgleichung ist, so hat man im Allgemeinen keinen sonderlichen Gewinn von diesem Verfahren; doch schliesst dies nicht aus, dass in speciellen Fällen die Kenntniss der Gleichung 6) von Nutzen sein kann.

Ist z. B. die gegebene Differentialgleichung:

$$7) \qquad (Xy + X_0) dx + dy = 0,$$

wo X und X_0 Functionen von x allein bezeichnen, so ist die Gleichung 6):

$$(Xy + X_0) \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} + X\chi = 0;$$

man kann ihr dadurch genügen, dass man sich χ als Function von x allein denkt, wodurch $\frac{\partial \chi}{\partial y} = 0$ und

$$-\frac{\partial \chi}{\partial x} + X\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\chi} = X dx,$$

$$l\chi = \int X dx, \quad \chi = e^{\int X dx}$$

wird. Die nunmehrige Differentialgleichung

$$(Xy + X_0) e^{\int X dx} dx + e^{\int X dx} dy = 0$$

erfüllt in der That die Bedingung der Integrabilität (Nro. 2), wenn

$$\varphi = (Xy + X_0)e^{\int X\,dx},\ \psi = e^{\int X\,dx}$$

gesetzt wird; zugleich ist:

$$\int \varphi . dx = y \int X e^{\int X\,dx} dx + \int X_0 e^{\int X\,dx} dx,$$

$$\int \psi . dy = e^{\int X\,dx} y,$$

$$\int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = y \int X e^{\int X\,dx} dx,$$

und so ergiebt sich als Integralgleichung von Nro. 7):

$$8)\qquad C + y e^{\int X\,dx} + \int X_0 e^{\int X\,dx} dx = 0,$$

sie ist dieselbe, welche auf anderem Wege in §. 105 gefunden wurde.

§. 107.

Differentialgleichungen verschiedener Grade.

I. Wir haben bisher solche Differentialgleichungen erster Ordnung behandelt, in denen nur die ersten Potenzen von y und $\frac{dy}{dx}$ vorkamen, welche also rücksichtlich dieser Ausdrücke vom ersten Grade, oder, wie man häufig sagt, linear waren; wenn dagegen die gegebene Differentialgleichung höhere Potenzen von $\frac{dy}{dx}$ enthält, so ist sie von der Form

$$1)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + Z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + Z_{n-1}\frac{dy}{dx} + Z = 0,$$

worin $Z_1, Z_2, \cdots Z_{n-1}, Z_n$ Functionen von x und y bezeichnen. Das zunächst sich darbietende Verfahren zur Integration einer derartigen Differentialgleichung besteht darin, dass man die Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ als Unbekannte auflöst, wodurch man im Allgemeinen n verschiedene Werthe $f_1, f_2, \cdots f_n$, sämmtlich Functionen von x und y, erhält und nachher die n Differentialgleichungen

$$2)\qquad \frac{dy}{dx}=f_1,\ \frac{dy}{dx}=f_2,\cdots\ \frac{dy}{dx}=f_n$$

einzeln nach den vorigen Methoden integrirt. Nennen wir

$$3)\quad \varphi_1(x,y,C_1)=0,\quad \varphi_2(x,y,C_2)=0,\cdots\ \varphi_n(x,y,C_n)=0$$

die Integralgleichungen jener n Differentialgleichungen, so ist jede von ihnen auch eine Auflösung der ursprünglichen Differentialgleichung, und die allgemeinste Lösung entsteht nun durch das Product

$$4)\qquad \varphi_1(x,y,C_1)\cdot\varphi_2(x,y,C_2)\cdots\varphi_n(x,y,C_n)=0.$$

Die Allgemeinheit dieser Gleichung wird übrigens nicht beeinträchtigt, wenn man $C_1=C_2\cdots=C_n=C$ nimmt; denn setzt man der Reihe nach jeden einzelnen Factor des obigen Ausdruckes $=0$ und giebt dem C alle möglichen Werthe, so erhält C unter Anderem auch die Werthe $C_1, C_2, \ldots C_n$ wieder.

Beispielsweise sei die gegebene Differentialgleichung:

$$5)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{xy}{a^2}=0.$$

Die beiden einzelnen daraus entspringenden Differentialgleichungen sind in diesem Falle:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{\sqrt{xy}}{a}=0,\quad \frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{xy}}{a}=0,$$

und die Integralgleichungen derselben:

$$y-\tfrac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C_1=0,\quad y+\tfrac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C_2=0,$$

das allgemeine Integral ist folglich:

$$\left(y+C_1-\tfrac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right)\left(y+C_2+\tfrac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right)=0,$$

oder, wenn $C_1=C_2=C$ genommen wird,

$$6)\qquad (y+C)^2-\tfrac{4}{9}\frac{x^3}{a}=0.$$

II. Das beschriebene Verfahren verliert seine Brauchbarkeit, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung sehr verwickelte Ausdrücke oder gar nicht angebbar sind; es ist dann häufig vortheilhaft, die Gleichung 1) auf y oder auf x zu reduciren, d. h. ihr eine der folgenden Formen zu verleihen

7) $$y = \Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } x = \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

wobei $\frac{dy}{dx}$ kurz mit y' bezeichnet werden möge, und sie in der neuen Gestalt noch einmal zu differenziren.

Aus $y = \Phi(x, y')$ ergiebt sich auf diese Weise

8) $$y' = \frac{\partial \Phi(x,y')}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x,y')}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

d. h. eine Differentialgleichung zwischen den beiden Variabelen x und y'; durch Integration folgt daraus eine Gleichung von der Form $f(x, y', C) = 0$, welche mit $y = \Phi(x, y')$ verbunden dienen kann, um durch Elimination von y' zu einer Gleichung zwischen x und y zu gelangen.

Ist dagegen die gegebene Differentialgleichung auf die Form $x = \Psi(y, y')$ gebracht, so wird

$$1 = \frac{\partial \Psi(y,y')}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi(y,y')}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

oder, wenn man die Beziehung

9) $$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} y'$$

in Anwendung bringt,

10) $$1 = y' \frac{\partial \Psi(y,y')}{\partial y} + y' \frac{\partial \Psi(y,y')}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dy}.$$

Diese Differentialgleichung enthält nur y und y', ihr Integral ist daher von der Form $f(y, y', C) = 0$, und wenn man zwischen dieser und der vorigen Gleichung $x = \Psi(y, y')$ die Variabele y' eliminirt, so ergiebt sich das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung.

Beispiel. Eine Gerade von unveränderlicher Länge a bewege sich so, dass der eine Endpunkt auf der Abscissen-, der andere auf der Ordinatenachse fortgleitet; man sucht die Curve, welche von jener Geraden während der ganzen Bewegung berührt wird. Nennen wir x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Curvenpunktes, so muss das zwischen die Coordinatenachsen fallende Stück der an xy gelegten Tangente constant $= a$ sein; diese Bemerkung liefert die Differentialgleichung:

$$(xy' - y) \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = a,$$

oder auf y reducirt:

11) $$y = xy' - \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt nach beiderseitiger Hebung von y':

12) $$0 = \left\{x - \frac{a}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\right\}\frac{dy'}{dx},$$

und daraus folgt entweder

13) $$\frac{dy'}{dx} = 0, \text{ oder } x - \frac{a}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = 0.$$

Die erste Gleichung giebt $y' = C$ und durch Substitution in Nro. 11):

$$y = Cx - \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}},$$

d. h. eine Gerade, was in der That richtig ist, da alle Tangenten an einer Geraden mit letzterer zusammenfallen und im vorliegenden Falle das zwischen die Coordinatenachsen fallende Stück der Geraden $= a$ ist. Die zweite Gleichung in 13) liefert:

$$y' = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

mithin durch Substitution in Nro. 11):

$$y = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die beiden Integrale der Differentialgleichung sind daher:

$$y - Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} = 0 \text{ und } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

III. Auch in dem Falle, wo die gegebene Differentialgleichung auf die homogene Form

14) $$y'^n + F_1\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-1} + F_2\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + F_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)y' + F_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

gebracht werden kann, hat die Integration meistens keine Schwierigkeiten. Es liegt nämlich sehr nahe, $\frac{y}{x} = t$ zu setzen, wodurch die Gleichung sich unter die allgemeine Form:

15) $$f(y', t) = 0$$

stellt, die man entweder in Beziehung auf y' oder, wenn dies um-

ständlich wäre, nach t auflösen kann, wodurch man entweder $y' = \varphi(t)$ oder $t = \psi(y')$ zum Resultat erhält. Andererseits ist wegen $y = xt$:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \quad y' - t = x\frac{dt}{dx}$$

und

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t}.$$

Hat man y' durch t ausgedrückt, so enthält die rechte Seite nur t, war aber t durch y ausgedrückt, so kommt rechter Hand nur y' vor; in jedem Falle sind die Variabelen gesondert und es ist

16) $$lx = \int \frac{dt}{y' - t},$$

oder auch

17) $$lx = -\,l(y' - t) + \int \frac{dy'}{y' - t},$$

und man wird von diesen Gleichungen die erste oder die zweite benutzen, jenachdem y' durch t oder t durch y' ausgedrückt ist. Im ersten Falle giebt die Integration ein Resultat von der Form $lx = \chi(t) + Const.$ und man braucht nur für t seinen Werth einzusetzen; im zweiten Falle ist das Ergebniss von der Form $lx = \chi(y') + Const.$ und es bedarf noch der Elimination von y' aus der vorstehenden und der ursprünglichen Gleichung.

Sucht man z. B. die Curve, deren Bogen s mit den rechtwinkligen Coordinaten x und y des Endpunktes durch die Gleichung $s = \sqrt{2xy}$, oder

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{2xy}$$

verbunden ist, so lautet die Differentialgleichung:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{x}{2y}}\, y' + \sqrt{\frac{y}{2x}};$$

für $y = xt$ findet sich hieraus:

$$y' = \frac{t + (1 - t)\sqrt{2t}}{2t - 1}, \quad y' - t = \frac{(1 - t)\sqrt{2t}}{\sqrt{2t} - 1},$$

die Gleichung 11) wird daher im vorliegenden Falle:

$$lx = \int \frac{\sqrt{2t} - 1}{(1 - t)\sqrt{2t}}\, dt = C - l(1 - t) - \int \frac{dt}{(1 - t)\sqrt{2t}}.$$

Hier ist die noch übrige Integration durch Wegschaffung des Wurzelzeichens ($t = u^2$) leicht auszuführen und giebt:

$$lx = C - l(1-t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right),$$

in rechtwinkligen Coordinaten ist daher für $t = \frac{y}{x}$ die Gleichung der Curve:

$$\frac{x-y}{c} = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

wobei $e^{+C} = c$ gesetzt wurde. Zur Construction der Curve würden übrigens Polarcoordinaten bequemer sein.

Für ein zweites Beispiel sei $s = \sqrt{mx^2 + ny^2}$, also durch Differentiation

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{mx + nyy'}{\sqrt{mx^2+ny^2}},$$

und vermöge der Substitution $y = xt$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{m + nty'}{\sqrt{m+nt^2}},$$

$$(m+nt^2)(1+y'^2) = (m+nty')^2.$$

Diese Gleichung ist in jedem Falle leicht auf y' oder t zu reduciren; am einfachsten wird die Sache für $n = 1$, man findet nämlich

$$y' - t = \frac{\sqrt{m-1}\,\sqrt{m+t^2}}{\sqrt{m}}$$

und nach Formel 16)

$$lx = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}} \int \frac{dt}{\sqrt{m+t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}}\, l(t + \sqrt{m+t^2}) + C,$$

oder, wenn $C = la$ gesetzt wird, wo a eine neue willkürliche Constante bezeichnet

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{y+\sqrt{mx^2+y^2}}{x}\right)^{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}}}.$$

Es ist übrigens nicht schwer, die Gleichung auf y zu reduciren; für

$m = \frac{4}{3}$ z. B., und wenn man zur Vereinfachung $\frac{9}{4}a$ an die Stelle von a treten lässt, hat man

$$s = \sqrt{\tfrac{4}{3}x^2 + y^2}, \qquad y = \left(\frac{x}{3a} - 1\right)\sqrt{ax}.$$

§. 108.

Die singulären Auflösungen der Differentialgleichungen.

In dem Abschnitte II. des vorigen Paragraphen begegneten wir der eigenthümlichen Erscheinung, dass eine Differentialgleichung zwei Auflösungen zuliess, von welchen die erste eine willkürliche Constante enthielt, die zweite nicht; aus

$$y = xy' - \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

folgte nämlich:

$$y = Cx - \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}} \text{ und auch } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Da nun das erste Integral insofern das allgemeinere ist, als es eine willkürliche Constante C besitzt, so sollte man erwarten, dass das zweite Integral für irgend einen speciellen Werth von C aus jenem hervorgehen müsste; dies ist aber nicht der Fall und man muss daher die zweite Auflösung als eine in ihrer Art einzig dastehende betrachten. Wie nun eine solche besondere oder **singuläre** Auflösung einer Differentialgleichung mit dem allgemeinen Integrale zusammenhängt, wird aus folgenden Bemerkungen erhellen, die wir an die geometrischen Betrachtungen in §. 29 knüpfen.

I. Die gegebene Differentialgleichung sei

1) $$f(x, y, y') = 0,$$

und ihr allgemeines Integral möge als bekannt vorausgesetzt werden, nämlich

2) $$F(x, y, C) = 0;$$

man kann sich dann die letztere Gleichung als Gleichung derjenigen Curve denken, von welcher jeder Punkt die durch Nro. 1) bestimmte Eigenschaft besitzt. Die Gleichung 2) charakterisirt aber nicht eine einzelne Curve, sondern vielmehr eine ganze Schaar von Curven, welche dadurch entstehen, dass man der willkürlichen Constanten C

alle möglichen Werthe giebt. Zwei aufeinander folgende individuelle Curven dieser Art lassen sich durch die beiden Gleichungen

$$F(x, y, k) = 0, \quad F(x, y, k + dk) = 0$$

oder auch durch die daraus folgenden Gleichungen

3) $$F(x, y, k) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, k)}{\partial k} = 0$$

darstellen, und es hat nun jeder Punkt der einen sowohl als der anderen Curve die Eigenschaft 1). Dieselbe Eigenschaft kommt auch dem Durchschnitte beider Nachbarcurven zu, falls ein solcher existirt; sie gilt endlich auch für die aufeinander folgenden Durchschnitte je zweier Nachbarcurven, welche entstehen, wenn man dem k alle möglichen Werthe giebt. Nach §. 29 heisst dies: wenn der Gleichung 1) die Curve $F(x, y, k) = 0$ genügt, so genügt jener Gleichung auch die einhüllende Curve, welche der stetigen Aenderung des k entspricht. Ausser dem allgemeinen Integral erhält man also noch ein singuläres, wenn man k aus den Gleichungen 3), oder C aus den Gleichungen

4) $$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

eliminirt. Selbstverständlich braucht eine solche singuläre Lösung nicht nothwendig zu existiren; sie wird fehlen, wenn jene Schaar von Curven keine Einhüllende besitzt.

Die vorige Regel zur Aufsuchung des singulären Integrales lässt sich auch rein analytisch auf folgende Weise begründen. Um die Richtigkeit der Gleichung 2) zu prüfen, würde man letztere differenziren und nachher aus den Gleichungen

5) $$F = 0 \text{ und } \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

die willkürliche Constante C eliminiren, weil C nicht in Nro. 1) vorkommt. Diese Elimination geschieht am natürlichsten so, dass man die Gleichung $F = 0$ nach C auflöst und den gefundenen Werth in die zweite Gleichung einsetzt. Bei der Auflösung von $F = 0$ erscheint aber ein Resultat von der Form $C = \varphi(x, y)$ und daher ist im Allgemeinen C als Function von x und y anzusehen; beachtet man dies bei der Differentiation der Gleichung $F = 0$, so hat man vollständiger

6) $$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}.$$

Die Elimination von C aus $F = 0$ und Nro. 6) kann aber nur dann

zu demselben Resultate (Nr. 1) führen wie die Elimination von C aus den Gleichungen 5), wenn die Gleichung 6) mit der zweiten Gleichung in 5) übereinstimmt, d. h. wenn

$$\frac{\partial F}{\partial C}\cdot\frac{dC}{dx}=0$$

ist. Dazu gehört entweder $\frac{dC}{dx}=0$ d. h. $C=Const.$, wodurch man auf das Integral 2) zurückkommt, oder

7) $$\frac{\partial F}{\partial C}=0,$$

und wenn sich hieraus für C eine Function von x und y findet, so giebt deren Substitution in $F=0$ eine neue Gleichung, welche ohne willkürliche Constante der Gleichung 1) genügt, also deren singuläres Integral ist. Diese Bemerkungen lassen gleichzeitig erkennen, dass eine Differentialgleichung nicht mehr als zwei Integrale haben kann, von denen eines das allgemeine, und das andere das singuläre ist.

Als Beispiel diene folgende Aufgabe. Man sucht eine krumme Linie, deren Normale die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen dem Stücke, welches sie selbst von der Abscissenachse abschneidet, und zwischen einer gegebenen Geraden a. Die Differentialgleichung der Curve lautet:

8) $$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{a(x+yy')};$$

zu ihrer Integration empfiehlt sich das im vorigen Paragraphen unter Nro II. beschriebene Verfahren und zwar ist es am vortheilhaftesten, auf x zu reduciren, weil die Entwickelung von y eine quadratische Gleichung geben würde. Man hat nun

9) $$y^2(1+y'^2)-ayy'=ax,$$

und hieraus folgt durch Differentiation, indem man von den Gleichungen

$$\frac{dy}{dx}=y',\qquad \frac{dy'}{dx}=y'\,\frac{dy'}{dy}$$

Gebrauch macht,

$$(2yy'-a)\left\{yy'\frac{dy'}{dy}+(1+y'^2)\right\}=0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei nachstehenden:

10) $$yy'\frac{dy'}{dy}=-(1+y'^2),\qquad 2yy'=a,$$

welche durch Trennung der Variabelen integrirt werden können. Die erste Gleichung giebt

$$\int \frac{y'\,dy'}{1+y'^2} = -\int \frac{dy}{y},$$

oder $\frac{1}{2} l(1+y'^2) = -ly + Const.$, d. i. wenn $Const. = lk$ gesetzt wird,

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{k}{y},\quad y' = \frac{\sqrt{k^2-y^2}}{y};$$

das Integral ist demnach, wenn die vorstehenden Werthe in die Gleichung 9) substituirt werden,

$$k^2 = a\,(x + \sqrt{k^2-y^2})$$

oder für $k^2 = ac$, wo nun c die willkürliche Constante bezeichnet,

11) $$(x-c)^2 + y^2 = ac.$$

Die zweite Gleichung in Nro 10) liefert $y' = \dfrac{a}{2y}$, und durch Substitution in Nr. 9)

12) $$y^2 - ax = \tfrac{1}{4}a^2.$$

Hier ist das erste Integral allgemein, das zweite ein singuläres, welches man nach der angezeigten Methode aus jenem ableiten kann, indem man

$$F(x,y,c) = (x-c)^2 + y^2 - ac = 0$$

setzt und c aus dieser Gleichung und der folgenden

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{\partial c} = -2(x-c) - a = 0$$

eliminirt; die letztere Gleichung giebt $c = x + \frac{1}{2}a$, und in die vorige Gleichung eingesetzt:

$$\tfrac{1}{4}a^2 + y^2 - a(x + \tfrac{1}{2}a) = 0,$$

was mit Nro. 12) übereinstimmt. Geometrisch bedeutet die Gleichung 11) eine Schaar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Abscissenachse liegen und deren Halbmesser sich in der Weise ändern, dass, wenn c der Abstand eines Centrums vom Coordinatenanfange ist, $\sqrt{ac}$ den zugehörigen Halbmesser angiebt; alle diese Kreise werden von der durch die Gleichung 12) charakterisirten Parabel eingehüllt.

II. Im Vorigen haben wir immer das singuläre Integral aus dem allgemeinen Integral hergeleitet, dagegen wollen wir nun zeigen, wie dasselbe unmittelbar aus der gegebenen Differentialgleichung 1) ent-

wickelt werden kann. Der Anschaulichkeit wegen betrachten wir die Sache wieder von der geometrischen Seite.

Wenn überhaupt eine einhüllende Curve existiren soll, so müssen die beiden Curven, welche zwei verschiedenen Werthen von C in Nro. 2) entsprechen, einander schneiden; jeder Punkt xy auf irgend einer durch das allgemeine Integral bestimmten Curve lässt sich demnach gleichzeitig als Punkt einer anderen Curve derselben Art ansehen, welche zu einem anderen Werthe von C gehört. Der Winkel, unter dem sich beide Curven schneiden, ist derselbe, wie der Winkel zwischen beiden Tangenten; es müssen also am Punkte xy wenigstens zwei der Lage nach verschiedene Tangenten vorhanden sein, d. h. es muss $\tan\tau = y'$ mindestens zwei verschiedene Werthe haben. Letztere braucht man nicht aus dem allgemeinen Integrale zu berechnen, man findet sie direct aus der gegebenen Differentialgleichung $f(x,y,y') = 0$, indem man diese nach y' auflöst. Die vorige Bemerkung zeigt nun augenblicklich, dass eine singuläre Lösung nur dann existiren kann, wenn die gegebene Differentialgleichung wenigstens vom zweiten Grade ist. Nennen wir

$$y' = \varphi(x,y), \qquad y' = \psi(x,y), \qquad y' = \chi(x,y), \ldots$$

oder kurz φ, ψ, χ etc. die Wurzeln derselben, so haben wir nach dem Fundamentalsatze der Theorie algebraischer Gleichungen

$$f = (y' - \varphi)(y' - \psi)(y' - \chi) \ldots;$$

durch partielle Differentiation in Beziehung auf y' folgt hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = (y' - \psi)(y' - \chi) \cdots + (y' - \varphi)(y' - \chi) \cdots$$
$$+ (y' - \varphi)(y' - \psi) \cdots + \cdots$$

und hier verschwindet die rechte Seite weder für $y' = \varphi$ noch für $y' = \psi$ etc., falls φ, ψ, χ etc. von einander verschieden sind. Anders wird die Sache, wenn der Punkt xy auf der einhüllenden Curve liegt. Er gehört dann drei Curven an, von denen zwei den Werthen C und $C + dC$ entsprechen, und deren dritte die einhüllende Curve selber ist; für alle drei hat y' einen und denselben Werth, folglich müssen wenigstens zwei der Wurzeln φ, ψ, χ etc. einander gleich werden. Für $\psi = \varphi$ erhält man aber

$$f = (y' - \varphi)^2 (y' - \chi) \ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = (y' - \varphi)[2(y' - \chi) \cdots + (y' - \varphi) \cdots + \cdots]$$

und hier verschwindet die rechte Seite, sobald $y' = \varphi$ genommen wird. Wenn demnach eine singuläre Auflösung vorhanden sein soll, so müssen die Gleichungen

$$f(x,y,y') = 0, \qquad \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = 0$$

zusammen bestehen, und daraus ergiebt sich das gesuchte singuläre Integral durch Elimination von y'.

Als Beispiel nehmen wir die Differentialgleichung

$$yy'\left(\frac{y^2}{x}-yy'\right) = a^2;$$

deren geometrischer Sinn leicht zu sehen ist. Nach dem gewöhnlichen Verfahren würde man dieselbe mittelst der Substitution $y^2 = z$ homogen machen und als allgemeines Integral finden

$$\frac{y^2}{ac} - \frac{x^2}{c^2} = 1,$$

woraus als singuläres Integral folgt

$$y^4 = 4\,a^2x^2.$$

Will man dagegen das letztere allein haben, so eliminirt man y' aus den beiden Gleichungen

$$f = y^2y'^2 - \frac{y^3y'}{x} + a^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y^2\left(2y' - \frac{y}{x}\right) = 0,$$

und erhält wie oben $y^4 = 4\,a^2x^2$.

§. 109.

Integration durch Versuche.

Die bisher auseinandergesetzten Methoden zur Integration der Differentialgleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie der Willkür nichts überlassen und wenigstens in vielen Fällen mit Sicherheit zum allgemeinen und dem etwaigen singulären Integrale führen. Will aber die Integration einer Differentialgleichung trotz der Anwendung aller bisherigen Mittel nicht gelingen, so muss man zu anderen Methoden greifen, deren gemeinschaftlicher Charakter darin besteht, dass die Integralgleichung hypothetisch angenommen und versucht wird, ob sie der Differentialgleichung genügt. Hauptsache dabei ist, die richtige Form des Integrales zu treffen, und man wird sich bei dieser Wahl am besten durch Analogieen leiten lassen, indem man die Differentialgleichung mit solchen Differentialgleichungen vergleicht, die von ähnlicher Form und deren Integrale bekannt sind;

es ist dann immer zu erwarten, dass auch das Integral ungefähr dieselbe Form haben werde, wie jenes bekannte Integral.

Dieses indirecte Verfahren ist z. B. anwendbar auf die Differentialgleichung:

$$1)\qquad \frac{dx}{\sqrt{1+ax^2+bx^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+ay^2+by^4}}=0,$$

in welcher zwar die Variabelen gesondert sind, die Integration aber gleichwohl umständlich werden würde. Um eine Andeutung über die Form des Integrales zu erhalten, betrachten wir vorerst den speciellen Fall:

$$2)\qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0;$$

hier ist die Integration sehr leicht und giebt

$$3)\qquad arcsin\, x + arcsin\, y = Const.$$

Die Gleichung scheint von transcendenter Form zu sein, ist es aber in der That nicht; die Summe zweier Bögen macht nämlich wieder einen Bogen aus, und ist μ dessen Sinus, so kann $Const. = arcsin\,\mu$ gesetzt werden, wo μ die neue willkürliche Constante bezeichnet. Statt der Gleichung $arcsin\, x + arcsin\, y = arcsin\,\mu$ lässt sich schreiben

$$sin\,(arcsin\,x + arcsin\,y) = \mu,$$

wo man linker Hand die bekannte Formel für $sin\,(u+v)$ in Anwendung bringen und die Gleichungen $sin\,u = x$, $cos\,u = \sqrt{1-x^2}$, $sin\,v = y$, $cos\,v = \sqrt{1-y^2}$ berücksichtigen muss. Das gesuchte Integral ist demnach

$$4)\qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\mu.$$

Will man es in rationaler Form, wenigstens in Beziehung auf x und y, dargestellt sehen, so kann dies durch folgende kleine Rechnung bewerkstelligt werden; es ist:

$$\mu^2 = x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

$$5)\qquad \mu^2-(x^2+y^2)=2xy\{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\}.$$

Ferner hat man aus der ersten Gleichung:

$$1-\mu^2=(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+x^2y^2,$$

wo die rechte Seite ein vollständiges Quadrat ist, daher:

$$\sqrt{1-\mu^2}=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung 5) wird letztere rational, nämlich:

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{1-\mu^2}\,xy - \mu^2 = 0,$$

oder für $\mu^2 = \frac{1}{\lambda}$

6) $$\lambda(x^2+y^2) + 2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}\,xy - 1 = 0.$$

Das Integral der Differentialgleichung 2) ist demnach eine in Beziehung auf x und y rationale und symmetrische Function zweiten Grades.

Kehren wir nun zu der allgemeineren Gleichung 1) zurück, so liegt die Vermuthung nahe, dass ihr Integral eine symmetrische Function vierten Grades sein werde, also von der Form:

7) $$f(x,y) = Ax^2y^2 + B(x^2+y^2) + 2\,Cxy - 1 = 0,$$

worin die Coefficienten A, B, C vor der Hand noch unbestimmt bleiben mögen. Um zu versuchen, ob die vorstehende Form der Differentialgleichung genügt, geben wir $f(x,y)$ die beiden Gestalten:

$$f = (Ay^2+B)\,x^2 + 2\,Cy.x + (By^2-1) = Yx^2 + 2\,Y_1x + Y_2,$$
$$f = (Ax^2+B)\,y^2 + 2\,Cx.y + (Bx^2-1) = Xy^2 + 2\,X_1y + X_2,$$

worin Y, Y_1, Y_2, X, X_1, X_2 zur Abkürzung dienen, und entwickeln die beiden partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(Yx+Y_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(Xy+X_1).$$

Substituiren wir sie in die aus der Gleichung $f(x,y) = 0$ folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0,$$

so wird

$$(Yx+Y_1)\,dx + (Xy+X_1)\,dy = 0,$$

oder

8) $$\frac{dx}{Xy+X_1} + \frac{dy}{Yx+Y_1} = 0.$$

Die zweite Form $f = Xy^2 + 2X_1y + X_2 = 0$ giebt ferner, wenn man sie als quadratische Gleichung behandelt,

$$Xy + X_1 = \sqrt{X_1^2 - XX_2}$$

ebenso die erste Form

$$Yx + Y_1 = \sqrt{Y_1^2 - YY_2}$$

und indem man diese Werthe in Nro 8) substituirt, erhält man

9) $$\frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - XX_2}} + \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - YY_2}} = 0$$

als die Differentialgleichung, welcher die in Nro 7) gemachte Annahme genügt. Die Gleichung 7) würde nun das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung sein, wenn die Gleichungen 1) und 9) identisch wären. Vermöge der Werthe von X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 hat man statt Nro. 9) zu setzen

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{A-B^2+C^2}{B}x^2-Ax^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+\frac{A-B^2+C^2}{B}y^2-Ay^4}}=0,$$

woraus durch Vergleichung mit der Differentialgleichung

10) $$\frac{dx}{\sqrt{1+ax^2+bx^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+ay^2+by^4}}=0$$

folgende Bedingungen hervorgehen:

11) $$A-B^2+C^2=Ba, \quad A=-b.$$

Hier lassen sich zwei der Coefficienten bestimmen, etwa $A=-b$, $C=\sqrt{B^2+Ba+b}$, der dritte (B) bleibt unbestimmt und ist die Integrationsconstante. Diese Untersuchung zeigt, dass in der That die Gleichung

12) $$Ax^2y^2+B(x^2+y^2)+2Cxy-1=0$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung 10) darstellt, sobald die Coefficienten A, B, C den in 11) ausgesprochenen Bedingungen genügen; letztere sind auch jederzeit erfüllbar, da man z. B. B immer so gross wählen kann, dass C reell wird.

Ausser der obigen rationalen Form ist noch die irrationale Form des Integrales von Wichtigkeit; man erhält sie auf folgendem Wege. Sei $1+ax^2+bx^4=f(x)$, so hat man nach dem Früheren

$$Xy+X_1=\sqrt{X_1{}^2-XX_2}=\sqrt{B}\sqrt{1+\frac{A-B^2+C^2}{B}x^2-Ax^4}$$
$$=\sqrt{B}\sqrt{f(x)},$$

oder umgekehrt

$$\sqrt{f(x)}=\frac{Xy+X_1}{\sqrt{B}} \text{ und } \sqrt{f(y)}=\frac{Yx+Y_1}{\sqrt{B}}.$$

Vermöge der Werthe von X, X_1, Y, Y_1 findet man hieraus sehr leicht

$$x\sqrt{f(y)}+y\sqrt{f(x)}=\frac{2Ax^2y^2+B(x^2+y^2)+2Cxy}{\sqrt{B}},$$

d. i., wenn man nach Nr. 12) $1-Ax^2y^2$ für $B(x^2+y^2)+2Cxy$ schreibt,

$$x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)} = \frac{1 + Ax^2y^2}{\sqrt{B}},$$

oder endlich, weil $A = -b$ und B eine beliebige Constante war,

13) $$\frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1 - bx^2y^2} = Const.$$

Diese Integralgleichung ist für die Differentialgleichung 10) dasselbe, was die Gleichung 4) in Beziehung auf die Differentialgleichung 2); in der That werden beide für $a = -1$, $b = 0$ identisch.

Dasselbe indirecte Verfahren der Integration durch Versuche ist auch auf die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4}},$$

und auf manche ihr ähnliche anwendbar, doch werden die Entwickelungen zu weitläufig, als dass sie hier Platz finden könnten.

§. 110.

Integration durch Reihen.

Der vorigen Methode insofern ähnlich, als sie gleichfalls auf Voraussetzungen beruht, ist die Integration durch Reihen; sie gründet sich auf die einfache Bemerkung, dass das Integral $y = \varphi(x)$ einer Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ in vielen Fällen eine mittelst der Theoreme von Taylor oder Mac Laurin in Potenzenreihen verwandelbare Function sein wird, und dass es daher auch möglich sein muss, von der Differentialgleichung aus zu derselben Reihe zu gelangen. Dies geschieht auf folgende Weise. Dem Theoreme von Taylor zufolge ist, wenn überhaupt eine Reihe für $\varphi(x)$ existirt,

1) $$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\frac{x - x_0}{1} + \varphi''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \cdots,$$

wo x_0 einen beliebigen Specialwerth von x bezeichnet. Denken wir uns die Differentialgleichung $F(x, y, y')$ auf $y' = \varphi'(x)$ reducirt, indem wir

$$y' = \varphi'(x) = f_1(x, y)$$

setzen, so führt die successive Differentiation dieser Gleichung zu Ausdrücken von folgender Form:

$$\varphi''(x) = f_2(x, y), \qquad \varphi'''(x) = f_3(x, y) \text{ u. s. w.};$$

für $x = x_0$ werden diese Gleichungen zu

2) $$\varphi'(x_0) = f_1(x_0, y_0), \qquad \varphi''(x_0) = f_2(x_0, y_0) \text{ u. s. w.},$$

in welchen y_0 den individuellen Werth des y bezeichnet, der dem Werthe $x = x_0$ entspricht. Durch Substitution der unter Nro. 2) bemerkten Ausdrücke in Nro. 1) folgt nun

3) $$y = y_0 + f_1(x_0, y_0)\frac{x - x_0}{1} + f_2(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^2}{1 \, . \, 2} + f_3(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \cdots,$$

und wenn die Reihe rechter Hand convergirt, so ist die Auflösung zulässig; dagegen würde die Divergenz der Reihe ein Zeichen sein, dass y einer Potenzenreihe nicht gleich sein kann.

Die gegebene Differenzialgleichung sei z. B.

4) $$\varphi'(x) = y' = 1 + \lambda(y - x),$$

so liefert die successive Differentiation

$$\varphi''(x) = y'' = \lambda(y' - 1) = \lambda^2(y - x),$$
$$\varphi'''(x) = y''' = \lambda^2(y' - 1) = \lambda^3(y - x)$$
$$\text{u. s. w.},$$

und für $x = x_0$, $y = y_0$,

$$\varphi'(x_0) = 1 + \lambda(y_0 - x_0),$$
$$\varphi''(x_0) = \lambda^2(y_0 - x_0),$$
$$\varphi'''(x_0) = \lambda^3(y_0 - x_0)$$
$$\text{u. s. w.};$$

mithin ist das gesuchte Integral:

$$y = y_0 + \frac{1 + \lambda(y_0 - x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{\lambda^2(y_0 - x_0)}{1 \, . \, 2}(x - x_0)^2 + \frac{\lambda^3(y_0 - x_0)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

oder auch

$$y = x + (y_0 - x_0)\left\{1 + \frac{\lambda(x - x_0)}{1} + \frac{\lambda^2(x - x_0)^2}{1 \, . \, 2} + \cdots\right\}.$$

Die eingeklammerte Reihe convergirt immer und lässt sich leicht summiren, dies giebt:

$$y = x + (y_0 - x_0)\,e^{\lambda(x - x_0)} = x + (y_0 - x_0)e^{-\lambda x_0}\,e^{\lambda x},$$

d. i., wenn der constante Factor mit C bezeichnet wird,

5) $$y = x + Ce^{\lambda x},$$

was man auch direct leicht finden könnte.

Statt der Taylor'schen Reihe benutzt man häufig den Mac Laurin'schen Satz (d. h. man setzt $x_0 = 0$), in welchem Falle y die Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. erhält; die Coefficienten lassen sich entweder wie vorhin oder kürzer dadurch bestimmen, dass man die für y angenommene Form in die gegebene Gleichung substituirt und wie im vorigen Paragraphen die resultirende Gleichung zu einer identischen macht. Sei z. B.

$$6)\qquad y' + y^2 = f(x)$$

die gegebene Differentialgleichung und $f(x)$ eine Function von der Form $a_0 + a_1 x + a_1 x^2 +$ etc., so giebt die Annahme

$$7)\qquad y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

statt der Gleichung 6) die folgende:

$$1 A_1 + A^2 + (2 A_2 + 2 A A_1) x + (3 A_3 + 2 A A_2 + A_1^2) x^2 + \cdots$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

welche offenbar richtig ist, wenn beiderseits x^0, x^1, x^2 u. s. w. dieselben Coefficienten besitzen; man findet daraus der Reihe nach:

$$8)\qquad A_1 = a_0 - A^2, \quad A_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 - 2 a_0 A + 2 A^3) \text{ u. s. w.,}$$

d. h. die Werthe aller Coefficienten mit Ausnahme von A, welcher unbestimmt bleibt und die Integrationsconstante ist.

Das obige Verfahren beruht auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass die der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ genügende Function $y = \varphi(x)$ in eine Reihe von der Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. verwandelbar sei, es wird daher in allen den Fällen unrichtig, wo jene Voraussetzung nicht zutrifft. Die Rechnung zeigt dies immer von selbst an und nöthigt dann zu einer anderen Annahme. Ist z. B.

$$9)\qquad y' = 2 - \frac{y}{x}$$

die gegebene auf gewöhnlichem Wege leicht integrable Differentialgleichung, so führt die Supposition $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. zu der Gleichung

$$A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \cdots$$
$$= 2 - \frac{A_0}{x} - A_1 - A_2 x - A_3 x^2 - \cdots,$$

welche nur durch die Werthe $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 \cdots = 0$ zu befriedigen ist. Dies giebt $y = x$, d. h. ein particuläres Integral, weil keine willkürliche Constante vorkommt. Um dass all-

gemeine Integral zu finden, machen wir die allgemeinere Voraussetzung

10) $$y = Ax^\mu + A_1 x^{\mu+1} + A_2 x^{\mu+2} + \cdots,$$

welche die folgende Gleichung liefert:

$$\mu A x^{\mu-1} + (\mu + 1) A_1 x^\mu + (\mu + 2) A_2 x^{\mu+1} + \cdots$$
$$= 2 - A x^{\mu-1} - A_1 x^\mu - A_2 x^{\mu+1} - \cdots$$

Dieser kann man durch $\mu = -1$ genügen; sie wird dann:

$$-\frac{A}{x^2} + A_2 + 2A_3 x + 2A_4 x^2 + \cdots$$
$$= 2 - \frac{A}{x^2} - \frac{A_1}{x} - A_2 - A_3 x - A_4 x^2 - \cdots,$$

und es folgen daraus für A_1, A_2, A_3 etc. die Werthe:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = A_4 \cdots = 0,$$

während A unbestimmt bleibt. Das gesuchte Integral ist demnach

11) $$y = \frac{A}{x} + x.$$

Der allgemeineren Voraussetzung 10) wird man sich überhaupt in vielen der Fälle bedienen, wo die erste Form der Potenzenreihe unrichtig wird.

Weiter noch reicht man oft mit der Annahme, dass y der Quotient zweier Reihen von der Form 10) sei, und es kann dabei ein doppelter Vortheil gewonnen werden. Man findet nämlich häufig, dass eine an sich ziemlich einfache Function bei der Verwandlung in eine Reihe sehr zusammengesetzte Coefficienten liefert, während sie, als Quotient zweier Reihen betrachtet, viel weniger complicirt erscheint. So sind z. B. in der Gleichung

$$\tan x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \cdots$$

die Grössen A_1, A_3, A_5, ... von sehr verwickelter Zusammensetzung, während die Coefficienten in

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b_1 x - b_3 x^3 + b_5 x^5 - \cdots}{a_0 - a_2 x^2 + a_4 x^4 - \cdots}$$

nach einem äusserst einfachen Gesetze fortschreiten. Dazu kommt noch der wesentliche Umstand, dass die zweite Form von $\tan x$ für alle x, die erste dagegen nur für solche x gilt, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen. Um das in solchen Fällen eintretenede Verfahren an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir die Differentialgleichung

12) $$y' + y^2 = \lambda x$$

behandeln, welche den directen Methoden Trotz bieten und, auf dieselbe Weise wie Nro. 6) integrirt, eine Reihe von nicht übersehbarem Bildungsgesetze liefern würde. Bezeichnen wir mit $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei nach Potenzen von x fortschreitende Reihen und setzen

13) $$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

so geht die Gleichung 12) in die folgende über

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi(x)^2 - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2} = \lambda x,$$

und diese wird sehr einfach, wenn wir $\varphi(x) = \psi'(x)$ setzen; wir erhalten nämlich:

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \lambda x \text{ oder } \psi''(x) = \lambda x \psi(x).$$

Die weitere Annahme

$$\psi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

giebt nun durch Substitution in die vorige Gleichung:

$$1.2 A_2 + 2.3 A_3 x + 3.4 A_4 x^2 + 4.5 A_5 x^3 + \cdots$$
$$= A_0 \lambda x + A_1 \lambda x^2 + A_2 \lambda x^3 + \cdots,$$

und daraus folgen für die Coefficienten die Werthe:

$$A_2 = A_5 = A_8 = A_{11} \cdots = 0,$$

$$A_3 = \frac{\lambda}{2.3} A_0, \quad A_6 = \frac{\lambda^2}{2.3.5.6}, \quad A_9 = \frac{\lambda^3}{2.3.5.6.8.9}, \cdots$$

$$A_4 = \frac{\lambda}{3.4} A_1, \quad A_7 = \frac{\lambda^2}{3.4.6.7}, \quad A_{10} = \frac{\lambda^3}{3.4.6.7.9.10}, \cdots$$

welche nach einem leicht zu erkennnenden Gesetze fortschreiten; A_0 und A_1 bleiben vor der Hand noch unbestimmt. Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$U = 1 + \frac{\lambda x^3}{2.3} + \frac{\lambda^2 x^6}{2.3.5.6} + \frac{\lambda^3 x^9}{2.3.5.6.8.9} + \cdots,$$

$$V = x + \frac{\lambda x^4}{3.4} + \frac{\lambda^2 x^7}{3.4.6.7} + \frac{\lambda^3 x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \cdots,$$

wo U und V die Summen zweier jederzeit convergirender Reihen sind, so haben wir

$$\psi(x) = A_0 U + A_1 V$$
$$\psi'(x) = A_0 U' + A_1 V'$$

und der Werth von $y = \varphi(x) : \psi(x) = \psi'(x) : \psi(x)$ ist:

$$y = \frac{A_0 U' + A_1 V'}{A_0 U + A_1 V},$$

oder endlich, wenn der Quotient $A_1 : A_0$ mit C bezeichnet wird,

14) $$y = \frac{U' + CV'}{U + CV}.$$

Auf die allgemeinere sogenannte Riccati'sche Gleichung

$$y' + ax^2 = by^m$$

lässt sich dasselbe Verfahren mit gleichem Nutzen anwenden.

Cap. XVIII.

Differentialgleichungen höherer Ordnungen zwischen zwei Variabelen.

§. 111.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung; einfachste Formen.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabelen x und y hat im Allgemeinen die Form:

$$1)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

oder, auf den zweiten Differentialquotienten reducirt,

$$2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

und die Aufgabe ist wie früher, y als Function von x zu bestimmen. Den Sinn dieses Problemes kann man sich auf ähnliche Weise verdeutlichen, wie es in §. 103 bei den Differentialgleichungen erster Ordnung geschah. Man betrachte nämlich x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Curvenpunktes, mithin $\frac{dy}{dx}$ als die Tangente des Winkels, welchen das Curvenelement ds mit der Abscissenachse bildet, und beachte, dass mittelst der zweiten Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen bestimmten Werth erhält, sobald x, y, und $\frac{dy}{dx}$ gegeben sind; die Construction der fraglichen Curve geschieht dann auf folgende Weise. Man gehe von einem beliebigen Punkte $x_0\, y_0$ aus, wähle den entsprechenden Werth von $\frac{dy}{dx} = y'$ gleichfalls willkürlich, etwa $= y_0'$,

und berechne den zugehörigen Werth von $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$, welcher y_0'' heissen möge; ist nun $y = \varphi(x)$ die Gleichung der gesuchten Curve, so gelten für unendlich kleine δ die Beziehungen

$$\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta} = \varphi'(x),$$

$$\frac{\varphi(x+2\delta) - 2\varphi(x+\delta) + \varphi(x)}{\delta^2} = \varphi''(x),$$

oder

$$\varphi(x+\delta) = \varphi(x) + \delta\varphi'(x),$$
$$\varphi(x+2\delta) = 2\varphi(x+\delta) - \varphi(x) + \delta^2\varphi''(x)$$

und sie dienen, um aus $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ der Reihe nach $\varphi(x+\delta)$ und $\varphi(x+2\delta)$ abzuleiten. In unserem Falle sind für $x = x_0$ jene Werthe in der That bekannt, man kann also, von dem Punkte $x_0 y_0$ ausgehend, zwei neue unendlich naheliegende Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bestimmen und zwar sind die Abscissen derselben:

$$x_1 = x_0 + \delta, \qquad x_2 = x_0 + 2\delta,$$

und die Ordinaten:

$$y_1 = y_0 + y_0'\delta, \quad y_2 = -y_0 + 2y_1 + y_0''\delta^2.$$

Betrachtet man jetzt $x_2 y_2$ als neuen Ausgangspunkt, so lassen sich wiederum zwei neue Punkte $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ bestimmen u. s. w. Man ersieht aus dieser Construction, dass die gegebene Differentialgleichung das gemeinschaftliche Merkmal einer unendlichen Menge von gleichartigen Curven enthält; sie bestimmt jede dieser Curven vollständig, sobald ein Punkt $x_0 y_0$ der letzteren und die Richtung der Tangente in diesem Punkte, d. h. y_0' gegeben oder willkürlich angenommen ist. Im Allgemeinen bleiben zwei Grössen in der Bestimmung von y beliebig, d. h. das allgemeine Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung enthält zwei Integrationsconstanten. Dies ist auch analytisch leicht einzusehen. Eine Gleichung zwischen x, y, y', y'' würde durch einmalige Integration zu einer Gleichung zwischen x, y, y', d. h. zu einer Differentialgleichung erster Ordnung werden, welche nach den früheren Methoden zu integriren ist; auf jeden Fall bedarf es im Ganzen zweier Integrationen, deren jede eine willkürliche Constante mit sich bringt, und demnach muss das gesuchte y von der Form $\varphi(x, C, C_1)$ sein*). Diese Bemerkung deutet zugleich den

*) Eine Ausnahme erleidet die obige Behauptung in dem Falle, wo man entweder bei der ersten oder bei der zweiten Integration statt des allgemeinen Integrals das singuläre Integral nimmt. In jedem speciellen

Weg an, der bei der Integration der Differentialgleichungen zweiter Ordnung meistentheils eingeschlagen werden muss, wie man aus den nachherigen Beispielen sehen wird.

Wir betrachten zuerst die einfachsten Formen der Differentialgleichung 2), bei welchen zugleich die Integration vollständig ausführbar ist.

Erste Form. Die rechte Seite von Nro 2) enthalte x allein sei kurz $f(x) = X$, mithin

3) $$\frac{d^2y}{dx^2} = X.$$

Die Gleichung ist identisch mit $\frac{dy'}{dx} = X$, woraus

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int X dx + C$$

folgt; die zweite Integration liefert ebenso leicht

$$y = \int dx \int X dx + Cx + C_1.$$

Eine bequemere Form erhält das Integral durch die Bemerkung, dass bei theilweiser Integration

$$\int xX dx = x \int X dx - \int dx \int X dx$$

ist, mithin das Doppelintegral als Differenz zweier einfacheren Ausdrücke angesehen werden kann; dies giebt:

4) $$y = x \int X dx - \int xX dx + Cx + C_1.$$

Zweite Form. Der zweite Differentialquotient von y sei als Function von y allein gegeben, nämlich,

5) $$\frac{d^2y}{dx^2} = Y.$$

Hier kann man statt der linken Seite den Ausdruck

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} y'$$

eintreten lassen, und es sind in der nunmehrigen Gleichung

Falle lassen sich die so entstehenden singulären Integrale der Differentialgleichung ohne wesentliche Schwierigkeit entwickeln, indem man bei der betreffenden Integration die Lehren des §. 108 in Anwendung bringt; ebendeswegen werden wir in den folgenden Untersuchungen den singulären Integralen keine besondere Aufmerksamkeit mehr widmen.

$$y'\frac{dy'}{dy} = Y \text{ oder } y'dy' = Ydy$$

die Variabelen gesondert. Das erste Integral der Gleichung 5) ist daher

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = Const. + \int Ydy \text{ oder } y' = \sqrt{C + 2\int Ydy}.$$

Vermöge des Werthes von y' erhält man daraus

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}}$$

und durch nochmalige Integration

6) $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}} + C_1.$$

Ein für spätere Untersuchungen nicht unwichtiges Beispiel bildet die Differentialgleichung

7) $$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y.$$

Hier ist $2\int Ydy = k^2y^2$, mithin das vollständige Integral

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + k^2y^2}} + C_1 = \frac{1}{k}\, l(ky + \sqrt{C + k^2y^2}) + C_1.$$

Um auf y zu reduciren, bilde man daraus die Gleichung:

$$e^{k(x-C_1)} - ky = \sqrt{C + k^2y^2},$$

und quadrire dieselbe; man findet sehr leicht

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{e^{k(x-C_1)} - Ce^{-k(x-C_1)}\right\},$$

d. i. wenn man zur Abkürzung die constanten Factoren

$$\tfrac{1}{2}e^{-kC_1} = A, \quad -\tfrac{1}{2}Ce^{kC_1} = B$$

setzt, wo nun A und B ebenso willkürliche Constanten wie früher C und C_1 sind,

8) $$y = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Ist dagegen die Differentialgleichung gegeben

9) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y,$$

so erhält man $2\int Ydy = -k^2y^2$; ferner

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C - k^2y^2}} + C_1 = \frac{1}{k}\arcsin\frac{ky}{\sqrt{C}} + C_1,$$

und umgekehrt

$$y = \frac{\sqrt{C}}{k} \sin k(x - C_1),$$

oder, wenn man auflöst und die Constanten ändert,

10) $$y = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx.$$

Dieses Resultat hätte sich übrigens aus dem vorigen dadurch herleiten lassen, dass man $k\sqrt{-1} = ki$ an die Stelle von k treten liess, die Gleichung

$$e^{\pm kxi} = \cos kx \pm i \sin kx$$

benutzte und zuletzt $A + B = A_1$, $(A - B)\, i = B_1$ setzte*).

Dritte Form. Die Differentialgleichung enthalte nur den ersten und zweiten Differentialquotienten der Unbekannten, es sei also

11) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } \frac{dy'}{dx} = f(y').$$

In der zweiten Gestalt sind die Variabelen leicht zu trennen, nämlich

*) Auf das oben entwickelte Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a\, y, \qquad a = \pm k^2$$

lässt sich das der folgenden (nicht zur zweiten Form gehörenden) Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ay + bx + c$$

zurückführen. Giebt man ihr nämlich die Gestalt:

$$y'' = a\, y + bx + c$$

und differenzirt zweimal, so wird:

$$\frac{d^2 y''}{dx^2} = ay''.$$

Diese Gleichung stimmt mit der ersten überein und ihr Integral ist bei positiven $a = + k^2$:

$$y'' = Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

und bei negativen $a = - k^2$:

$$y' = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx.$$

Andererseits folgt aus $y'' = ay + bx + c$ umgekehrt:

$$y = \frac{y'' - bx - c}{a},$$

und indem man den Werth von y'' substituirt, ergiebt sich y. — Wäre die Gleichung allgemeiner $y'' = ay + \psi(x)$, so würde dieser Kunstgriff nichts helfen, sondern ein anderes Verfahren eintreten müssen, welches in §. 113 auseinandergesetzt ist.

12) $$dx = \frac{dy'}{f(y')} \quad \text{also} \quad x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C.$$

Um ferner y zu finden, hat man

13) $$dy = y'dx = y'\frac{dy'}{f(y')}, \text{ folglich } y = \int \frac{y'dy'}{f(y')} + C_1.$$

Die Integralformeln in 12) und 13) geben x und y ausgedrückt durch die dritte Variabele y'; eliminirt man diese aus beiden Gleichungen, so bleibt eine Gleichung zwischen x, y, C, C_1 übrig, welche das allgemeine Integral ist.

Auf eine Gleichung von der Form 11) führt z. B. das geometrische Problem: aus einer gegebenen Relation zwischen dem Krümmungshalbmesser ϱ eines Curvenpunktes xy und zwischen dem Winkel τ, welchen dieser Krümmungshalbmesser mit der Ordinatenachse bildet, die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten abzuleiten. Ist nämlich $\varrho = F(\tau)$ die gegebene Beziehung, so hat wegen $tan\,\tau = y'$ und $\varrho = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = F(arctan\,y'),$$

oder umgekehrt:

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{F(arctan\,y')},$$

mithin nach den Formeln 12) und 13):

$$x = \int \frac{F(arctan\,y')}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy' + C,$$

$$y = \int \frac{y'F(arctan\,y')}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy' + C_1.$$

Betrachtet man nicht y', sondern $arctan\,y' = \tau$ als unabhängige Variabele, setzt also $y' = tan\,\tau$, so gewinnen die obigen Gleichungen die symmetrische Gestalt:

14) $$\begin{cases} x = \int F(\tau)\cos\tau\,d\tau + A, \\ y = \int F(\tau)\sin\tau\,d\tau + B, \end{cases}$$

und man kann am Ende, wenn es sonst möglich ist, τ eliminiren. Für $\varrho = k\,sec\,\tau$ z. B. ergiebt sich $x = k\tau + A$, $y = kl\,sec\,\tau + B$ oder:

$$y - B = kl\, sec \frac{x - A}{k}$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

Eine ähnliche Aufgabe ist: die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen Coordinaten zu finden, wenn der von einem festen Punkte ab gerechnete Bogen s eine gegebene Function des Winkels τ sein soll, den die Tangente am Endpunkte des Bogens mit der x-Achse einschliesst. Aus der gegebenen Gleichung $s = \varphi(\tau)$ folgt hier

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \varphi'(\tau),$$

mithin ist die Sache wie bei der vorigen Aufgabe wenn man F durch φ' ersetzt, nämlich

15) $$\begin{cases} x = \int \varphi'(\tau) \cos\tau \, d\tau + A, \\ y = \int \varphi'(\tau) \sin\tau \, d\tau + B. \end{cases}$$

Beispielsweise erhält man für $s = 4k \cos\tau$:

$$x - A = k(2\tau - \sin 2\tau), \quad y - B = -k \cos 2\tau,$$

und wenn man $2\tau = \omega$, $x - A = \xi$, $B - y = \eta$ setzt, so lehren die Formeln 7) und 8) auf S. 95, dass die gesuchte Curve eine Cycloide mit k als Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

§. 112.

Fortsetzung und Schluss.

Vierte Form. In der Differentialgleichung mögen nur x, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ vorkommen, sie sei also:

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } y'' = f(x, y').$$

Giebt man ihr die Gestalt

2) $$\frac{dy'}{dx} = f(x, y'),$$

so enthält sie nur die beiden Variabelen x und y' und ist in Beziehung auf y' eine Differentialgleichung erster Ordnung; man findet daraus y' und zwar in der Form

3) $$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x), \text{ mithin } y = \int \varphi(x)\, dx + Const.$$

Dieses Verfahren passt z. B. auf das geometrische Problem, die Curve zu finden, in welcher der Krümmungshalbmesser eine vorgeschriebene Function der zugehörigen Abscisse ist, etwa $\varrho = \psi(x)$. Die Differentialgleichung lautet hier:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \psi(x),$$

oder, auf y'' reducirt,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi(x)},$$

was mit Nro. 1) übereinstimmt. Die Trennung der Variabelen giebt

$$\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\psi(x)}.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{\psi(x)} + C = X + C,$$

wo X zur Abkürzung eingeführt ist; man hat nun weiter

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}},$$

also bei nochmaliger Integration

$$y = \int \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}}\, dx + C_1.$$

So liefert z. B. $\varrho = \dfrac{x^2}{a}$ folgende Werthe:

$$X = -\frac{a}{x}, \qquad y = \int \frac{Cx-a}{\sqrt{x^2-(Cx-a)^2}}\, dx + C_1;$$

die noch übrige Integration ist leicht auszuführen und giebt verschiedene Curven, jenachdem man die willkürliche Constante der Einheit gleich, oder kleiner oder grösser wählt. Im ersten Falle erhält man eine algebraische Curve, nämlich

$$y = \tfrac{1}{3}(x-2a)\sqrt{\frac{2x-a}{a}} + C_1;$$

im zweiten Falle ist die Curve logarithmischer Natur, im letzten Falle hängt sie von der Function *arcsin* ab.

Fünfte Form. Die gegebene Differentialgleichung enthalte nur y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ nach dem Schema

$$4)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(y\,,\frac{dy}{dx}\right), \text{ oder } y'' = f(y, y').$$

Lässt man, wie es schon früher geschah,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}\,y'$$

an die Stelle von y'' treten, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$5)\qquad y'\,\frac{dy'}{dy} = f(y, y'),$$

und ist eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den beiden Variabelen y und y'; man findet daraus

$$6)\qquad y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(y),$$

mithin bei Trennung der Variabelen und Integration

$$7)\qquad x = \int\frac{dy}{\varphi(y)} + Const.$$

Nach dieser Methode lässt sich z. E. das geometrische Problem lösen: die Curve zu finden, in welcher der Krümmungshalbmesser eine gegebene Function der zugehörigen Ordinate ist, etwa $\varrho = \psi(y)$. Die Differentialgleichung lautet nämlich

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \psi(y) \text{ oder } y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi(y)}$$

formell übereinstimmend mit Nro. 4). Nach dem angezeigten Verfahren wird

$$\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dy}{\psi(y)},$$

und durch Integration

$$-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \int\frac{dy}{\psi(y)} + C = Y + C,$$

wo Y zur Abkürzung dient. Der Werth von y' ist jetzt

$$y' = \frac{\sqrt{1-(Y+C)^2}}{Y+C} = \frac{dy}{dx},$$

mithin die Gleichung der gesuchten Curve:

$$x = \int \frac{Y + C}{\sqrt{1 - (Y + C)^2}}\, dy + C_1.$$

Das Resultat hat mit dem der vorigen geometrischen Aufgabe viel Aehnlichkeit; in der That sind beide Probleme nicht wesentlich verschieden, da man nur x mit y und entsprechend X mit Y zu vertauschen braucht, um das eine aus dem anderen abzuleiten.

Als zweite geometrische Anwendung diene die Bestimmung der Curven, in welchen der Krümmungshalbmesser mit der zugehörigen Normale in gegebenem constanten Verhältnisse steht. Aus der genannten Bedingung folgt unmittelbar, wenn $1 : \mu$ jenes Verhältniss ist,

$$\mu\, \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1 + y'^2},$$

oder

$$y y'' = \mu(1 + y'^2).$$

Die Substitution $y'' = y' \dfrac{dy'}{dy}$ giebt bei Sonderung der Variabelen

$$\frac{y'\, dy'}{1 + y'^2} = \mu\, \frac{dy}{y},$$

ferner durch Integration, wenn die Constante mit $\mu l b$ bezeichnet wird,

$$\tfrac{1}{2} l(1 + y'^2) = \mu\, l\left(\frac{y}{b}\right), \quad y' = \frac{\sqrt{y^{2\mu} - b^{2\mu}}}{b^\mu},$$

endlich:

$$x = b^\mu \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2\mu} - b^{2\mu}}} + a.$$

Man findet mittelst dieser Formel sehr leicht, dass die Curve für $\mu = -1$ ein Kreis, für $\mu = +1$ eine Kettenlinie, für $\mu = -\frac{1}{2}$ eine Cycloide und für $\mu = +\frac{1}{2}$ eine Parabel ist.

Das Analogon zur vorigen Aufgabe bildet die Frage nach denjenigen Curven, bei welchen der Krümmungsradius in constantem Verhältnisse zur Polarnormale (PW in Fig. 26 auf S. 102) steht. Bezeichnet wieder $1 : \mu$ das gegebene Verhältniss, so ist die zu integrirende Differentialgleichung

$$\mu\, \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r r''} = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

oder

$$r r'' = (1-\mu) r^2 + (2-\mu) r'^2.$$

Die Substitution

$$r'' = \frac{dr'}{d\theta} = \frac{dr'}{dr}\, r'$$

giebt

$$\frac{dr'}{dr} = (1-\mu)\frac{r}{r'} + (2-\mu)\frac{r'}{r}.$$

Diese Gleichung ist homogen; wir setzen daher

$$\frac{r'}{r} = u \text{ oder } r' = ru$$

woraus folgt

$$r\frac{du}{dr} = (1-\mu)\frac{1+u^2}{u}.$$

Durch Sonderung der Variabelen und Integration findet sich

$$1 + u^2 = C r^{2-2\mu}$$

d. i. vermöge des Werthes von u

$$1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = C r^{2-2\mu}.$$

Nach wiederholter Trennung der Variabelen und Integration folgt

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{C r^{2-2\mu} - 1}} = \theta - \gamma,$$

worin γ die willkürliche Constante bedeutet. Mit Hülfe der Substitution $Cr^{2-2\mu} = 1 + v^2$ ist die angedeutete Integration leicht auszuführen; setzt man dabei zur Abkürzung $\mu - 1 = m$, so erhält man

$$-\frac{1}{m} \arctan v = \theta - \gamma$$

und schliesslich als Polargleichung der gesuchten Curve

$$r^m = a^m \cos m(\theta - \gamma),$$

wobei a^m für C geschrieben wurde. Im Falle $\mu = 2$ ist die Curve ein Kreis, für $\mu = 3$ eine Lemniscate, für $\mu = \frac{3}{2}$ eine Cardioide.

Als letztes Beispiel für dieses Verfahren diene die Behandlung der Aufgabe: die Gleichung der Curve zu finden, deren Bögen proportional den an die Endpunkte derselben gelegten Tangenten sind. Rechnen wir den Bogen s von einem Punkte aus, dessen Abscisse x_0 ist, und bezeichnen wir mit $1:\mu$ das Verhältniss des Bogens zur Tangente, so lautet die Bedingungsgleichung:

$$\mu \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2};$$

aus ihr folgt durch Differentiation und Reduction auf y''

$$y'' = (1-\mu)\frac{y'^2(1+y'^2)}{y},$$

und mittelst der für y'' angegebenen Substitution

$$\frac{dy'}{dy} = (1-\mu)\frac{y'(1+y'^2)}{y}.$$

Die Sonderung der Variabelen giebt weiter

$$\frac{dy'}{y'(1+y'^2)} = (1-\mu)\frac{dy}{y},$$

und die Integration dieser Gleichung, wenn die Integrationsconstante mit $-(1-\mu)lb$ bezeichnet wird,

$$ly' - \tfrac{1}{2}l(1+y'^2) = (1-\mu)l\left(\frac{y}{b}\right) = l\left(\frac{y}{b}\right)^{1-\mu}$$

oder:

$$l\left(\frac{y'^2}{1+y'^2}\right) = l\left(\frac{y}{b}\right)^{2-2\mu}.$$

Der Werth von y', durch y ausgedrückt, ist demnach:

$$y' = \frac{y^{1-\mu}}{\sqrt{b^{2-2\mu} - y^{2-2\mu}}} = \frac{dy}{dx},$$

mithin die Gleichung der gesuchten Curve:

$$x = \int dy\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{2\mu-2} - 1} + a.$$

Die Integrationsconstanten a und b bestimmen sich im speciellen Falle durch die zwei Bedingungen, dass $s = 0$ werden muss, wenn x gleich der Abscisse des Bogenanfanges genommen wird, und dass die Curve durch einen gegebenen Punkt gehen soll. Die Gleichung der gesuchten Curve ist übrigens für $\mu = \frac{3}{2}$ algebraisch und zwar:

$$(x-a)^2 = \tfrac{4}{9}\frac{(y-b)^3}{b},$$

in allen übrigen Fällen aber transcendent.

§. 113.

Die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Unter einer linearen Differentialgleichung versteht man wie früher eine solche, in der sowohl y als die Differentialquotienten

dieser Function nur in der ersten Potenz vorkommen; demnach ist die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = X,$$

worin X_1, X_2 und X als Functionen von x allein angesehen werden, das allgemeine Schema einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir betrachten vorläufig den speciellen Fall, wo $X = 0$ ist; die einfachere Gleichung

1) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$$

mag dann die reducirte Differentialgleichung heissen.

Kennt man zwei von einander verschiedene particuläre Integrale derselben, etwa y_1 und y_2, so ist für diese gleichzeitig

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + X_1 \frac{dy_1}{dx} + X_2 y_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + X_1 \frac{dy_2}{dx} + X_2 y_2 = 0,$$

und wenn man die erste Gleichung mit einer willkürlichen Constanten C_1, die zweite mit einer anderen willkürlichen Constanten C_2 multiplicirt, so kann man die Summe beider Producte in folgender Form darstellen

$$\frac{d^2 (C_1 y_1 + C_2 y_2)}{dx^2} + X_1 \frac{d (C_1 y_1 + C_2 y_2)}{dx}$$
$$+ X_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0.$$

Der Vergleich mit Nro. 1) zeigt, dass der allgemeinere Ausdruck

2) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

ebenfalls die Differentialgleichung 1) befriedigt; er enthält aber zwei willkürliche Constanten, folglich ist er das allgemeine Integral von Nro. 1). Mit anderen Worten, aus zwei von einander verschiedenen particulären Integralen der reducirten Differentialgleichung lässt sich deren allgemeines Integral nach Formel 2) zusammensetzen. — Diese Regel verliert ihre Gültigkeit, wenn $y_2 = y_1$ ist; dann wird nämlich $y = (C_1 + C_2) y_1$, und da hier $C_1 + C_2$ eine einzige willkürliche Constante ausmacht, so hat man nur ein neues particuläres Integral. Wie man sich in solchen Fällen helfen kann, werden die folgenden Beispiele zeigen.

I. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

Nach Analogie der Gleichung 7) in §. 111 versuchen wir, ob die Exponentialgrösse

$$4)\qquad y = e^{\lambda x},$$

worin λ einen vorläufig unbestimmten constanten Factor bedeutet, der Gleichung 3) genügen kann. Die Substitution von 4) in 3) giebt nun

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0,$$

und diese Gleichung ist für jedes x richtig, wenn für λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$5)\qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

genommen wird. Bezeichnen wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung mit λ_1 und λ_2, so haben wir zwei particuläre Integrale

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\quad y_2 = e^{\lambda_2 x},$$

welche im Allgemeinen von einander verschieden sind. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung 3) ist daher

$$6)\qquad \begin{cases} y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \\ \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}),\quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}). \end{cases}$$

Um den Ausnahmefall $\lambda_1 = \lambda_2$ zu discutiren, bezeichnen wir die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ mit δ, woraus $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$ folgt, und haben unter der Benutzung der Exponentialreihe

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 e^{\delta x}) \\ &= e^{\lambda_1 x}[(C_1 + C_2) + C_2\delta x + \tfrac{1}{2}C_2\delta^2 x^2 + \cdots]; \end{aligned}$$

setzen wir noch

$$C_1 + C_2 = C,\quad C_2\delta = C',$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt,

$$C_1 = C - \frac{C'}{\delta},\quad C_2 = \frac{C'}{\delta},$$

so haben wir auch

$$7)\qquad y = e^{\lambda_1 x}(C + C'x + \tfrac{1}{2}C'\delta x + \tfrac{1}{6}C'\delta^2 x^3 + \cdots).$$

Für $\delta = 0$ wird $\lambda_1 = \lambda_2$ und wenn man den neuen Constanten C und C' irgend welche endliche Werthe beilegt, so werden zwar die früheren Constanten C_1 und C_2 unendlich gross, aber dies hindert die Rechnung nicht, da C_1 und C_2 jeden beliebigen Werth haben können. Aus Nro. 7) folgt nun für $\delta = 0$

8) $$y = e^{\lambda_1 x}(C + C'x),$$
und dieses Integral der Gleichung 3) ist allgemein.

Wenn die quadratische Hülfsgleichung 5) zwei complexe Wurzeln
$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda^2 = \alpha - i\beta$$
besitzt, so verwandelt sich die Formel 6) in
$$y = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x);$$
für $C_1 + C_2 = A$ und $i(C_1 - C_2) = B$ wird hieraus

9) $$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B \sin\beta x).$$
Damit sind alle möglichen Fälle erledigt.

II. Die Differentialgleichung

10) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{b}{x^2} y = 0$$
lässt sich nach einem ähnlichen Verfahren integriren. Setzt man nämlich versuchsweis

11) $$y = x^\mu,$$
so erhält man
$$[\mu(\mu - 1) + a\mu + b] x^{\mu-2} = 0,$$
und diese Gleichung ist allgemein richtig, wenn für μ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

12) $$\mu^2 + (a-1)\mu + b = 0$$
genommen wird. Nennen wir μ_1 und μ_2 diese beiden Wurzeln, so sind nach Nro. 11)
$$y_1 = x^{\mu_1} \text{ und } y_2 = x^{\mu_2}$$
zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung 10), mithin ist das allgemeine Integral

13) $$y = C_1 x^{\mu_1} + C_2 x^{\mu_2}.$$

Um den Ausnahmefall $\mu_1 = \mu_2$ zu erörtern, setzen wir wie früher $\mu_2 = \mu_1 + \delta$ und erhalten
$$y = x^{\mu_1}(C_1 + C_2 e^{\delta l x})$$
$$= x^{\mu_1}[C_1 + C_2 + C_2 \delta l x + \tfrac{1}{2} C_2 \delta^2 (l x)^2 + \cdots]$$
oder, wenn neue Constanten C und C' mittelst der Gleichungen
$$C_1 = C - \frac{C'}{\delta}, \quad C_2 = \frac{C'}{\delta}$$
eingeführt werden,
$$y = x^{\mu_1}[C + C' l x + \tfrac{1}{2} C' \delta (l x)^2 + \cdots].$$
Für $\delta = 0$ wird $\mu_1 = \mu_2$ und

14) $$y = x^{\mu_1}(C + C' l x).$$

Sind endlich μ_1 und μ_2 complexe Zahlen, etwa

$$\mu_1 = \alpha + i\beta,\quad \mu_2 = \alpha - i\beta,$$

so geht die Gleichung 13) über in

$$y = C_1 x^\alpha [\cos(\beta l x) + i \sin(\beta l x)] + C_2 x^\alpha [\cos(\beta l x) - i \sin(\beta l x)],$$

oder, wenn $C_1 + C_2 = A$, $i(C_1 - C_2) = B$ gesetzt wird,

15) $$y = x^\alpha [A \cos(\beta l x) + B \sin(\beta l x)].$$

§. 114.

Zusammenhang zwischen den beiden particulären Integralen.

Wie im vorigen Paragraphen mögen y_1 und y_2 zwei von einander verschiedene particuläre Integrale der reducirten Differentialgleichung

1) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$$

bezeichnen, so dass

2) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

das allgemeine Integral von 1) darstellt. Da y_1 und y_2 eine und dieselbe Gleichung 1) befriedigen, so lässt sich erwarten, dass zwischen y_1 und y_2 ein gewisser Zusammenhang stattfinden wird; man erkennt ihn auf folgendem Wege.

Es sei Y eine bekannte Function, welche die Differentialgleichung befriedigt, d. h. ein particuläres Integral derselben, so kann man sich denken, dass das andere die Form Yz habe, wo z der Quotient beider Particularintegrale, mithin eine noch unbekannte Function von x ist. Die Substitution $y = Yz$ giebt nun statt der Gleichung 1) die folgende

$$Y \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dY}{dx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2 Y}{dx^2} z$$
$$+ X_1\left(Y \frac{dz}{dx} + \frac{dY}{dx} z\right) + X_2 Y z = 0,$$

oder in anderer Anordnung

$$Y \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(X_1 Y + 2 \frac{dY}{dx}\right)\frac{dz}{dx}$$
$$+ \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} + X_1 \frac{dY}{dx} + X_2 Y\right) z = 0;$$

nach der gemachten Voraussetzung verschwindet hier der Coefficient von z und es bleibt, wenn der Differentialquotient von z mit z' bezeichnet wird,

$$Y \frac{dz'}{dx} + \left(X_1 Y + 2 \frac{dY}{dx} \right) z' = 0.$$

Diese Differentialgleichung kann durch Sonderung der Variabelen leicht integrirt werden, nämlich:

$$\frac{dz'}{z'} = -\left(2 \frac{1}{Y} \frac{dY}{dx} + X_1 \right) dx,$$

$$l z' = -2 l Y - \int X_1 \, dx,$$

ferner durch Rückgang auf z' und z

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{Y^2} e^{-\int X_1 dx},$$

$$z = \int \frac{dx}{Y^2} e^{-\int X_1 dx}.$$

Setzt man nunmehr Y und Yz an die Stelle der beiden particulären Integrale y_1 und y_2 in die Formel 2), so ist

$$3) \qquad y = Y \left\{ C_1 + C_2 \int \frac{dx}{Y^2} e^{-\int X_1 dx} \right\}.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1) lässt sich also jederzeit entwickeln, wenn man nur eines ihrer particulären Integrale anzugeben weiss. Zur Aufsuchung dieses letzteren giebt es zwar keine allgemeine Regel, doch aber ein Hülfsmittel, nämlich die Substitution von Reihen, deren Anwendung hier ganz dieselbe ist, wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung.

Beispiel 1. Die gegebene Differentialgleichung sei:

$$4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + k^2 y = 0,$$

und behufs der Auffindung eines particulären Integrales:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

wodurch man statt der Gleichung 4) die folgende erhält:

$$\frac{2 A_1}{x} + (6 A_2 + k^2 A_0) + (12 A_3 + k^2 A_1) x$$
$$+ (20 A_4 + k^2 A_2) x^2 + \cdots,$$

aus dieser ergeben sich für die Coefficienten folgende Werthe:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{k^2}{6}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = +\frac{k^4}{6 \cdot 20}, \cdots$$

und es ist daher:

$$y = A_0 \left\{1 - \frac{k^2 x^2}{1.2.3} + \frac{k^4 x^4}{1.2.3.4.5} - \cdots\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt vermuthen, dass

$$y = \frac{A_0}{k} \cdot \frac{\sin k x}{x} \text{ und einfacher } Y = \frac{\sin k x}{x}$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung sein werde, was sich in der That bestätigt, wenn man Y für y in Nro. 4) substituirt. Der Formel 3) zufolge ist nun das allgemeine Integral:

$$y = \frac{\sin k x}{x} \left\{C_1 + C_2 \int \frac{x^2\, dx}{\sin^2 k x} e^{-l(x^2)}\right\},$$

$$= \frac{\sin k x}{x} \left\{C_1 - C_2 \frac{\cot k x}{k}\right\},$$

oder endlich, indem man $C_2 = - C_0 k$ setzt:

5) $$y = \frac{C_0 \cos k x + C_1 \sin k x}{x}.$$

Beispiel 2. Die gegebene Differentialgleichung sei

6) $$\frac{d^2 y}{dx^2} - (x^2 + 3)\, y = 0,$$

und hypothetisch:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots.$$

Durch Substitution dieses Werthes bestimmen sich die Coefficienten A_2, A_3, A_4 etc. leicht, A_0 und A_1 bleiben unbestimmt und man hat:

$$y = A_0 \left\{1 + \tfrac{3}{2} x^2 + \frac{11}{2.3.4} x^4 + \frac{23}{2.4.5.6} x^6 + \cdots\right\}$$

$$+ A_1 \left\{x + \tfrac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2.4} x^5 + \frac{1}{2.4.6} x^7 + \cdots\right\}.$$

Dies ist schon das allgemeine Integral von 6), aber es steht insofern unter einer ungünstigen Form, als man das Bildungsgesetz der Coefficienten erster Reihe nicht übersieht. Die zweite Reihe dagegen scheint einfacher gebildet und mit

$$x \left\{1 + \tfrac{1}{1}(\tfrac{1}{2} x^2) + \frac{1}{1.2} (\tfrac{1}{2} x^2)^2 + \cdots\right\} = x e^{\frac{1}{2} x^2}$$

identisch zu sein; in der That genügt der Ausdruck $x e^{\frac{1}{2} x^2}$ der Differentialgleichung 6) und kann demnach für Y genommen werden; die Formel 3) giebt nun:

7) $$y = x e^{\frac{1}{2} x^2} \left\{C_1 + C_2 \int \frac{dx}{x^2} e^{-x^2}\right\}.$$

§. 115.

Die Variation der Constanten.

Um die allgemeine Differentialgleichung

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y = X$$

zu integriren, gehen wir von der Vermuthung aus, dass ihr Integral von ähnlicher Form sein werde wie das Integral der reducirten Differentialgleichung

$$2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y = 0;$$

wir versuchen daher, ob die Gleichung 1) durch die Annahme

$$3)\qquad y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

befriedigt wird, wenn y_1 und y_2 die beiden particulären Integrale der reducirten Differentialgleichung 2) und u_1, u_2 zwei unbekannte Functionen von x bezeichnen.

Aus Nro. 3) folgt zunächst

$$\frac{dy}{dx} = u_1\frac{dy_1}{dx} + u_2\frac{dy_2}{dx} + y_1\frac{du_1}{dx} + y_2\frac{du_2}{dx};$$

dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn u_1 und u_2 der Bedingung

$$4)\qquad y_1\frac{du_1}{dx} + y_2\frac{du_2}{dx} = 0$$

unterworfen werden; es bleibt nämlich

$$\frac{dy}{dx} = u_1\frac{dy_1}{dx} + u_2\frac{dy_2}{dx}.$$

Wir differenziren diese Gleichung noch einmal und substituiren die Werthe von y, y' und y'' in die Gleichung 1); dadurch nimmt letztere die folgende Form an:

$$u_1\left\{\frac{d^2y_1}{dx^2} + X_1\frac{dy_1}{dx} + X_2y_1\right\} + u_2\left\{\frac{d^2y_2}{dx^2} + X_1\frac{dy_2}{dx} + X_2y_2\right\} + \frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx} = X_1.$$

Der Voraussetzung nach genügten y_1 und y_2 der Differentialgleichung 2), daher verschwinden die mit u_1 und u_2 multiplicirten Glieder, und als zweite Bedingung für u_1 und u_2 bleibt

$$5)\qquad \frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx}=X.$$

Aus den Gleichungen 4) und 5) findet man:

$$\frac{du_1}{dx}=\frac{Xy_2}{y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}}$$

$$\frac{du_2}{dx}=\frac{Xy_1}{y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}},$$

oder kürzer, wenn man den Differentialquotienten einer gebrochenen Function $\frac{p}{q}$ mit $\left[\frac{p}{q}\right]'$ bezeichnet,

$$\frac{du_1}{dx}=\frac{X}{y_2\left[\frac{y_1}{y_2}\right]'},\quad \frac{du_2}{dx}=\frac{X}{y_1\left[\frac{y_2}{y_1}\right]'}.$$

Durch Integration folgen hieraus die Werthe von u_1 und u_2, nach Formel 3) endlich ist

$$6)\qquad y=y_1\left\{\int\frac{X\,dx}{y_2\left[\frac{y_1}{y_2}\right]'}+C_1\right\}+y_2\left\{\int\frac{X\,dx}{y_1\left[\frac{y_2}{y_1}\right]'}+C_2\right\}$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung 8).

Beispiel 1. Bildet man aus der Differentialgleichung

$$7)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+k^2y=X$$

zunächst die reducirte Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+k^2y=0,$$

welche mit der unter Nro. 4) in §. 114 betrachteten identisch ist, so sind

$$y_1=\frac{\cos kx}{x}\text{ und }y_2=\frac{\sin kx}{x}$$

die particulären Integrale der letzteren; die Formel 6) giebt nun

$$8)\ y=\frac{\cos kx}{x}\left\{C_1-\frac{1}{k}\int X\sin kx\,dx\right\}+\frac{\sin kx}{x}\left\{C_2+\frac{1}{k}\int X\cos kx\,dx\right\}$$

als allgemeines Integral von Nro. 7).

Beispiel 2. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$9)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = X,$$

mithin die entsprechende reducirte Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Als particuläres Integral derselben findet man x und als allgemeines $C_1 x + C_2 x l x$, mithin $y_1 = x$, $y_2 = x l x$ und nach Formel 6)

$$10)\qquad y = x\left\{C_1 - \int xXlx\,dx\right\} + xlx\left\{C_2 + \int X\,dx\right\}$$

als allgemeines Integral der Differentialgleichung 16).

§. 116.

Nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wenn eine Differentialgleichung zweiter Ordnung weder linear ist, noch einer der in den §§. 111 und 112 betrachteten Formen angehört, mithin keine der Grössen x, y, y' in ihr fehlt, so hat man nur wenig Mittel zu ihrer Integration. Das nächstliegende ist offenbar, durch Substitution neuer Variabelen eine der früheren Formen herbeizuführen; um aber zahlreicher Versuche überhoben zu sein und eine möglichst vortheilhafte Substitution rasch zu finden, kann man sich der Methode der Variation der Constanten bedienen. Letztere besteht immer darin, dass man die Differentialgleichung vorerst durch Weglassung eines ihrer Glieder vereinfacht, diese specialisirte Differentialgleichung integrirt und nun dem Integrale der allgemeinen Differentialgleichung dieselbe Form giebt, nur mit dem Unterschiede, dass man die Grössen, welche in dem Integrale der specialisirten Differentialgleichung als willkürliche Constanten figurirten, als unbekannte Functionen der unabhängigen Variabelen ansieht. Eine Anwendung dieses Verfahrens ist folgende. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} + Y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

worin X und Y Functionen von x und y allein bezeichnen mögen. Wäre die Differentialgleichung einfacher

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} = 0, \text{ d. h. } \frac{dy'}{dx} + Xy' = 0,$$

so würde die Integration sehr leicht sein, man fände nämlich

$$y' = \frac{dy}{dx} = Ce^{-\int X dx},$$

woraus y selbst leicht herzuleiten ist. Versuchen wir nun, ob der Differentialgleichung genügt werden kann, wenn man für y' einen Ausdruck von derselben Form setzt, aber an die Stelle der Integrationsconstante C eine neue Function z von x treten lässt. Mittelst der Substitutionen

2) $$\frac{dy}{dx} = ze^{-\int X dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} - Xz\right) e^{-\int X dx}$$

verwandelt sich die Gleichung 1) in die folgende

$$\frac{dz}{dx} + Yz^2 e^{-\int X dx} = 0,$$

oder, indem man beachtet, dass die Beziehungen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad ze^{-\int X dx} = \frac{dy}{dx}$$

stattfinden,

$$\left\{\frac{dz}{dy} + Yz\right\} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Da im Allgemeinen y' von Null verschieden ist, so muss der Inhalt der Parenthese gleich Null sein. Dies giebt eine Differentialgleichung, deren Integral ist

$$z = C_0 e^{-\int Y dy};$$

ferner wird durch Substitution in Nro. 2):

$$\frac{dy}{dx} = C_0 e^{-\int Y dy} e^{-\int X dx};$$

hier sind die Variabelen nochmals trennbar und man gelangt so zu dem allgemeinen Integrale:

3) $$\int e^{\int Y dy} dy = C_0 \int e^{-\int X dx} dx + C_1.$$

Als geometrisches Beispiel diene die Aufgabe: die Curve zu finden, in welcher die von einer gegebenen Ordinate ab gerechnete Fläche U in constantem Verhältnisse zu dem Rechtecke steht, dessen eine Seite die letzte Ordinate y der Fläche U, und dessen andere Seite das harmonische Mittel aus der Abscisse x und der Subtangente t ist. Bezeichnen wir mit $\mu : 1$ das gegebene Verhältniss, so lautet die Bedingung:

4) $$U = \mu \frac{2xt}{x+t} y;$$

man hat aber, wenn a die Abscisse derjenigen Ordinate bedeutet, von welcher ab die Fläche U gerechnet wird:

$$U = \int_a^x y\, dx, \quad y = \frac{dU}{dx},$$

ferner für die Subtangente

$$t = y : \frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dx} : \frac{d^2U}{dx^2};$$

nach Substitution der für y und t angegebenen Werthe und bei gehöriger Anordnung erhält die Gleichung 4) die folgende Form:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dU}{dx} - \frac{2\mu}{U}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = 0,$$

welche mit der Gleichung 1) übereinstimmt, wenn man sich U für y geschrieben denkt. Nach Formel 3) wird nun

$$\int \frac{dU}{U^{2\mu}} = C_0 lx + C_1,$$

wo die Fälle $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu \gtrless \frac{1}{2}$ zu unterscheiden sind. Der erste Fall giebt

$$lU = C_0 lx + C_1, \quad U = e^{C_1} x^{C_0};$$

ferner durch Differentiation und Aenderung der Constanten

$$y = Kx^k,$$

also Parabeln. Im zweiten Falle wird

$$U = [(1 - 2\mu)(C_0 lx + C_1)]^{\frac{1}{1-2\mu}},$$

mithin ist die Gleichung der Curve von der Form

$$y = \frac{1}{x}(Alx + B)^{\frac{2\mu}{1-2\mu}}.$$

Die Constanten bestimmen sich durch die Bedingungen, dass U mit a gleichzeitig verschwindet und dass die Curve durch einen gegebenen Punkt $x_0 y_0$ gehen soll. Nimmt man z. B. $\mu = \frac{1}{4}$, $A = b^2$, $B = -b^2 la$, so sind die Werthe von y, t und U:

$$y = \frac{b^2}{x} l\left(\frac{x}{a}\right), \quad U = \tfrac{1}{2} b^2 \left[l\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2,$$

$$t = \frac{xl\left(\frac{x}{a}\right)}{1 - l\left(\frac{x}{a}\right)},$$

und diese befriedigen in der That die Gleichung 4) für $\mu = \frac{1}{4}$; die Fläche U ist hier von der Stelle $x = a$ aus gerechnet, an welcher die Curve vom Negativen zum Positiven übergeht.

Gehört eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung weder zu der vorigen Form noch zu den in den §§. 111 und 112 betrachteten Fällen, so muss man zur Integration durch Reihen seine Zuflucht nehmen.

§. 117.

Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Wenn es schon für die Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung keine allgemeine Integrationsmethode giebt, so wird es nicht befremden, dass die Differentialgleichungen höherer Ordnungen nur selten in geschlossener Form integrirt werden können. In der That sind es nur die linearen Differentialgleichungen, über deren Integration etwas Allgemeineres und zwar das Folgende bekannt ist.

Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots$$

$$\cdots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = 0,$$

worin $X_1, X_2, \cdots X_n$ Functionen von x allein bezeichnen mögen. Kennt man von dieser Differentialgleichung nter Ordnung n particuläre Integrale

$$y_1, y_2, y_3 \cdots\cdots y_n,$$

so lässt sich auch ihr allgemeines Integral finden; dasselbe ist nämlich

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots\cdots + C_n y_n,$$

wie man durch Substitution in die gegebene Gleichung leicht prüfen kann. Dabei ist jedoch erforderlich, dass jene n particulären Integrale von einander verschieden sind; im Gegenfalle würde man nur ein neues particuläres Integral erhalten.

a. Als erstes Beispiel diene die Differentialgleichung

$$1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

worin $a_1, a_2, \cdots a_n$ constante Coefficienten bezeichnen mögen. Setzt man $y = e^{\lambda x}$, indem unter λ eine noch unbestimmte Constante begriffen wird, so verwandelt sich die Differentialgleichung in die algebraische Gleichung:

$$2) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

deren n Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ heissen mögen. Jeder von den Ausdrücken

$$e^{\lambda_1 x}, \; e^{\lambda_2 x}, \; e^{\lambda_3 x}, \ldots e^{\lambda_n x}$$

bildet ein particuläres Integral der Gleichung 1); das allgemeine Integral derselben ist daher:

3) $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Die Formel 3) bedarf einer Modification, wenn mehrere Wurzeln der algebraischen Gleichung 3) einander gleich, oder wenn sie imaginär sind. Wären z. B. die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 gleich, so setze man vorerst $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, $\lambda_3 = \lambda_1 + \varepsilon$ und entwickele die Exponentialgrössen, in denen δ und ε vorkommen; dies giebt:

$$\begin{aligned} y = (C_1 + C_2 + C_3)\, e^{\lambda_1 x} &+ (C_2\delta + C_3\varepsilon)\, x e^{\lambda_1 x} \\ &+ \tfrac{1}{2}(C_2\delta^2 + C_3\varepsilon^2)\, x^2 e^{\lambda_1 x} + \text{etc.} \\ + C_4 e^{\lambda_4 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} &+ \cdots + C_n e^{\lambda_n x}; \end{aligned}$$

unter dem „etc." sind hier alle die Glieder verstanden, welche die dritten und höheren Potenzen von δ und ε enthalten. Setzt man $C_1 + C_2 + C_3 = C$, $C_2\delta + C_3\varepsilon = C'$, endlich $\frac{1}{2}(C_2\delta^2 + C_3\varepsilon^2) = C''$, und lässt schliesslich δ und ε in Null übergehen, so wird:

$$y = (C + C'x + C''x^2)\, e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieses Verfahrens bei einer grösseren Anzahl gleicher Wurzeln. Sind überhaupt k gleiche Wurzeln

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \cdots = \lambda_k$$

in der Gleichung 2) vorhanden, so erhält das allgemeine Integral die folgende Gestalt:

4) $$\begin{aligned} y = (C + C'x + C''x^2 + \cdots + C^{(k-1)} x^{k-1})\, e^{\lambda_1 x} \\ + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}. \end{aligned}$$

Bei imaginären Wurzeln tritt nur insofern eine Umänderung ein, als jede der entsprechenden Exponentialgrössen in einen reellen und imaginären Theil zerfällt; gleichwohl wird dadurch y nicht nothwendig imaginär, da es freisteht, auch den willkürlichen Constanten complexe Werthe zu ertheilen, wie es bereits in §. 113 geschehen ist.

b. Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die Differentialgleichung

5) $$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{x}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{a_2}{x^2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots \\ \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{a_n}{x^n} y = 0. \end{aligned}$$

Der Versuch $y = x^\mu$ führt nämlich zu der algebraischen Gleichung nten Grades

$$6)\quad \begin{cases} \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1}) \\ +\ a_1\,\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-2}) \\ +\ a_2\,\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-3}) \\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\ \mu\,a_{n-1}+a_n \qquad = 0, \end{cases}$$

deren Wurzeln $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ heissen mögen. Jede der Potenzen

$$x^{\mu_1},\ x^{\mu_2},\ x^{\mu_3},\ \ldots\ x^{\mu_n}$$

stellt jetzt ein particuläres Integral der Differentialgleichung 5) dar; mithin ist das allgemeine Integral:

$$7)\qquad y = C_1 x^{\mu_1} + C_2 x^{\mu_2} + \cdots + C_n x^{\mu_n}.$$

Für den Fall gleicher Wurzeln tritt hier eine ähnliche Modification ein, wie bei dem vorigen Beispiele. Enthält nämlich die Gleichung 6) die k gleichen Wurzeln

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \ldots = \mu_k,$$

so ist die Formel 7) durch die folgende zu ersetzen

$$8)\qquad y = [C + C'lx + \cdots + C^{(k-1)}(lx)^{k-1}]\,x^{\mu_1} \\ + C_{k+1}x^{\mu_{k+1}} + C_{k+2}x^{\mu_{k+2}} + \cdots + C_n x^{\mu_n},$$

wie man leicht finden wird.

Bei complexen Wurzeln ist jedes particuläre Integral von der Form $x^{\alpha+i\beta}$ mittelst der Formel

$$x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha}e^{i\beta lx} = x^{\alpha}[\cos(\beta lx) + i\sin(\beta lx)]$$

in einen reellen und imaginären Theil zu zerlegen.

§. 118.

Die Variation der Constanten.

I. Wir betrachten noch die allgemeinere Differentialgleichung

$$1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots \\ \cdots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_n y = X,$$

und zwar unter der Voraussetzung, dass man sie in dem speciellen Falle $X = 0$ integriren könne. Nennen wir $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die particulären Integrale der reducirten Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + X_{n-1}\frac{dy}{dx} + X_n y = 0,$$

so lässt sich vermuthen, dass das Integral von Nro. 1) die Form

2) $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

haben werde, wo $u_1, u_2, \ldots u_n$ noch unbekannte Functionen von x bezeichnen. Diese Gleichung differenziren wir $(n-1)$mal, setzen aber den jedesmaligen zweiten Theil des Differentialquotienten der Null gleich; diese leichte Rechung giebt:

$$\frac{dy}{dx} = u_1 \frac{dy_1}{dx} + u_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + u_n \frac{dy_n}{dx},$$

3) $$y_1 \frac{du_1}{dx} + y_2 \frac{du_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{du_n}{dx} = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + u_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + u_n \frac{d^2y_n}{dx^2},$$

4) $$\frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx}\frac{du_n}{dx} = 0$$

u. s. w.;

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + u_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + u_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

5) $$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{du_n}{dx} = 0;$$

endlich bei nochmaliger Differentiation:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = u_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + u_2 \frac{d^ny_2}{dx^n} + \cdots + u_n \frac{d^ny_n}{dx^n}$$
$$+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{du_n}{dx},$$

wo der zweite Theil nicht gleich Null gesetzt wird, weil noch die Differentialgleichung 7) zu erfüllen ist. Nach Substitution der Werthe von $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ und mit Beachtung des Umstandes, dass jede der Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ der reducirten Gleichung 1) genügt, verwandelt sich die Differentialgleichung 1) in

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{du_n}{dx} = X.$$

Mit den Gleichungen 3), 4), 5) etc. zusammen hat man jetzt zwischen den n Unbekannten

$$\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, \frac{du_3}{dx}, \ldots \frac{du_n}{dx}$$

die folgenden n Beziehungen:

$$y_1 \frac{du_1}{dx} + y_2 \frac{du_2}{dx} + \cdots + y_n \frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_n}{dx}\frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{d^2y_n}{dx^2}\frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{du_n}{dx} = 0$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{du_n}{dx} = X,$$

welche rücksichtlich jener Unbekannten vom ersten Grade sind. Man kann demnach $\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, \cdots \frac{du_n}{dx}$ jederzeit bestimmen und erhält sie als Functionen von x, etwa

$$\frac{du_1}{dx} = \chi_1, \quad \frac{du_2}{dx} = \chi_2, \cdots \frac{du_n}{dx} = \chi_n;$$

daraus folgen $u_1, u_2, \cdots u_n$ selbst und zuletzt ist nach Formel 2)

6) $$y = y_1\left[\int \chi_1\, dx + C_1\right] + y_2\left[\int \chi_2\, dx + C_2\right] + \cdots\cdots + y_n\left[\int \chi_n\, dx + C_n\right]$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1).

II. Die Variation der Constanten lässt sich auch in dem Falle anwenden, wo man nicht alle particulären Integrale der reducirten Differentialgleichung kennt. Sind z. B. nur die $n - 1$ particulären Integrale $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ bekannt, so setzen wir wieder

7) $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_{n-1} y_{n-1}$$

und rechnen wie vorhin nur mit dem Unterschiede, dass überall $n-1$ an der Stelle von n steht; dies giebt

$$\frac{dy}{dx} = u_1 \frac{dy_1}{dx} + u_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + u_{n-1} \frac{dy_{n-1}}{dx},$$

8) $$y_1 \frac{du_1}{dx} + y_2 \frac{du_2}{dx} + \cdots + y_{n-1} \frac{du_{n-1}}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + u_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \cdots + u_{n-1} \frac{d^2y_{n-1}}{dx^2},$$

9) $$\frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{dy_{n-1}}{dx}\frac{du_{n-1}}{dx} = 0,$$

u. s. w.

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = u_1 \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \cdots + u_{n-1} \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}},$$

10) $$\frac{d^{n-3}y_1}{dx^{n-3}} \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-3}y_{n-1}}{dx^{n-3}} \frac{du_{n-1}}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + u_{n-1} \frac{d^{n-1}y_{n-1}}{dx^{n-1}}$$
$$+ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}} \frac{du_{n-1}}{dx},$$

und wenn noch einmal differenzirt wird,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + \cdots + u_{n-1} \frac{d^n y_{n-1}}{dx^n}$$
$$+ 2 \left\{ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{du_{n-1}}{dx} \right\}$$
$$+ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{d^2u_1}{dx^2} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}} \frac{d^2u_{n-1}}{dx^2}.$$

Substituirt man alle diese Werthe in die Gleichung 1) und berücksichtigt, dass $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ der reducirten Differentialgleichung genügen, so erhält man

11) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{d^2u_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}} \frac{d^2u_{n-1}}{dx^2} \\ &+ 2 \left\{ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{du_{n-1}}{dx} \right\} \\ &+ X_1 \left\{ \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{du_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2}y_{n-1}}{dx^{n-2}} \frac{du_{n-1}}{dx} \right\} \\ &= X. \end{aligned}\right.$$

Die $n-2$ Gleichungen 8), 9), 10) bestimmen die gegenseitigen Verhältnisse der Differentialquotienten

$$\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, \ldots \frac{du_{n-1}}{dx};$$

sieht man den ersten derselben als unbekannt an, so kann man aus jenen $n-2$ Gleichungen die $n-2$ übrigen Differentialquotienten finden und erhält sie in der Form

12) $$\frac{du_2}{dx} = v_2 \frac{du_1}{dx}, \frac{du_3}{dx} = v_3 \frac{du_1}{dx}, \ldots \frac{du_{n-1}}{dx} = v_{n-1} \frac{du_1}{dx},$$

wo $v_2, v_3, \cdots v_{n-1}$ bekannte Functionen von x sind. Die Substitution dieser Werthe in Nro. 11) führt zu einer Gleichung

13) $$P \frac{d^2u_1}{dx^2} + Q \frac{du_1}{dx} = X,$$

in welcher P und Q bekannte Functionen von x sind. Wenn man diese Gleichung allgemein integriren kann, so enthält u_1 zwei willkürliche Constanten, ferner geben die Gleichungen 12) die Werthe von $u_2, u_3, \ldots u_{n-1}$ mit $n - 2$ weiteren Constanten, endlich liefert Nro. 7) das gesuchte y mit zusammen n willkürlichen Constanten d. h. das allgemeine Integral von Nr. 1).

Ganz ähnlich gestaltet sich die Rechnung, wenn nur $n - 2$ particuläre Integrale der reducirten Differentialgleichung bekannt sind; die Bestimmung der beiden fehlenden Particularintegrale oder des allgemeinen Integrales führt dann auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Wie sich diese Betrachtungen weiter fortsetzen lassen, ist hiernach leicht zu übersehen.

Cap. XIX.

Differentialgleichungen mit mehreren Variabelen.

§. 119.

Integration der simultanen Gleichungen erster Ordnung.

Wenn zwischen $n+1$ Variabelen $x, y, z, \ldots s, t$, unter denen t die unabhängige Veränderliche sein möge, n Gleichungen von der Form:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, \ldots t), \quad \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, \ldots t), \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, \ldots t) \text{ etc.} \end{cases}$$

bestehen sollen, so müssen $x, y, z, \ldots s$, als Functionen von t gedacht, daraus entwickelbar sein, und es kommt nun darauf an, eine neue Gleichung zu bilden, welche nur die unabhängige Variabele t und eine der abhängigen Variabelen, etwa x, enthält. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege. Aus der ersten Gleichung $\dfrac{dx}{dt} = f_1$ ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

Die angedeuteten partiellen Differentiationen in Beziehung auf $x, y, \ldots s, t$ sind ohne Weiteres ausführbar, weil die Form der Function f_1 bekannt ist; für die Differentialquotienten $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \ldots \dfrac{ds}{dt}$ kann man ihre Werthe aus den Gleichungen 1) einsetzen und man

erhält so ein Resultat von der Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_2(x, y, \ldots s, t).$$

Wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man die vorstehende Gleichung differenzirt und die Gleichungen 1) benutzt, so ist das Ergebniss von der Gestalt:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \varphi_3(x, y, z, \ldots s, t).$$

Indem man auf diese Weise bis zum nten Differentialquotienten fortgeht, hat man die n Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y, \ldots s, t); \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \varphi_2(x, y, \ldots s, t); \ldots \\ \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \varphi_{n-1}(x, y, \ldots s, t); \quad \dfrac{d^n x}{dt^n} = \varphi_n(x, y, \ldots s, t). \end{cases}$$

Sehen wir für den Augenblick die linken Seiten dieser n Gleichungen als bekannt an, so würden die $n - 1$ ersten Gleichungen dienen können, um die $n - 1$ Unbekannten $y, z, \ldots s$ durch die übrigen vorhandenen Grössen auszudrücken; diese algebraische Operation giebt Gleichungen von folgender Form:

$$3)\quad \begin{cases} y = F_1\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \\ z = F_2\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s = F_{n-1}\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die letzte der Gleichungen 2) entsteht eine neue Gleichung von der Gestalt:

$$4)\quad \frac{d^n x}{dt^n} = \psi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

d. h. eine Differentialgleichung nter Ordnung zwischen x und t. Aus dieser bestimmt sich x als Function von t, dadurch werden zugleich $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ etc. bekannt, und die Gleichungen 3) führen nachher zur Kenntniss der übrigen abhängigen Variabelen $y, z \ldots s$.

Als Beispiel möge die Integration der drei simultanen Gleichungen:

5) $$\frac{dx}{dt} = \alpha(y+z),\ \frac{dy}{dt} = \beta(x+z),\ \frac{dz}{dt} = \gamma(x+y)$$

vorgenommen werden. Man erhält aus der ersten Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\left(\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\right),$$

und nach Substitution der Werthe von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$

6) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha(\beta+\gamma)x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z;$$

die zweite Differentiation und nochmalige Substitution giebt

7) $$\frac{d^3x}{dt^3} = 2\alpha\beta\gamma x + \alpha(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)(y+z).$$

Aus der Gleichung 6) und der ersten Gleichung in 5) ergeben sich y und z, nämlich

8) $$y = \frac{1}{\alpha(\gamma-\beta)}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} - \beta\frac{dx}{dt} - \alpha(\beta+\gamma)x\right\},$$

9) $$z = \frac{1}{\alpha(\beta-\gamma)}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha(\beta+\gamma)x\right\}.$$

Diese Werthe kann man in Nro. 7) substituiren, oder kürzer, man setzt in Nro. 7) $\frac{dx}{dt}$ für $\alpha(y+z)$ und hat so:

10) $$\frac{d^3x}{dt^3} = 2\alpha\beta\gamma x + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\frac{dx}{dt}.$$

Diese lineare Differentialgleichung dritter Ordnung hat nach §. 117, a, zum vollständigen Integral

11) $$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t},$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung

12) $$\lambda^3 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\lambda + 2\alpha\beta\gamma$$

sind. Die Formeln 8) und 9) liefern y und z, wenn der Werth von x eingesetzt wird.

Der gegebenen Entwickelung zufolge kommt die Integration eines Systemes von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung im Allgemeinen auf die Integration einer Differentialgleichung nter Ordnung zurück; indessen kann dieser Satz insofern eine Ausnahme erleiden, als sich bei der Aufstellung der Gleichungen 2) nicht selten schon früher (d. h. ehe man die letzte derselben entwickelt hat) Gelegenheit zur Bildung einer Gleichung zwischen x und t darbietet; diese Differentialgleichung ist dann von niedrigerer als nter Ordnung. Um nachher alle übrigen Variabelen $y, z, \ldots s$

zu finden, bedarf es noch der Integration einiger Hülfsgleichungen, welche sich von selbst ergeben, wenn man alle durch x, $\frac{dx}{dt}$ etc. bekannt gewordenen Grössen in die ursprünglichen Gleichungen einsetzt.

Als Beispiel mögen die Gleichungen

$$13)\qquad \frac{dx}{dt} = y + z,\ \frac{dy}{dt} = x + z,\ \frac{dz}{dt} = x + y$$

dienen, welche den speciellen Fall $\alpha = \beta = \gamma = 1$ der vorigen Aufgabe bilden. Die cubische Gleichung 12) wird $\lambda^3 = 3\lambda + 2$ und besitzt die Wurzeln $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, also zwei gleiche Wurzeln. Das Integral der für x aufgestellten Differentialgleichung ist jetzt:

$$z = Ce^{2t} + C'e^{-t} + C''te^{-t},$$

und wenn man diesen Werth in die Formeln 9) und 10) einführt, so stösst man auf die Unbequemlichkeit, dass $\beta - \gamma = 0$ und $y = \frac{0}{0}$ wird. Dieser Uebelstand lässt sich zwar beseitigen, ist aber ein Zeichen, dass man einen Umweg gemacht hat. Aus den Gleichungen 13) folgt nämlich analog Nro. 6):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

und hier bietet sich schon Gelegenheit zur Bildung einer Gleichung zwischen t und x allein, sie ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + \frac{dx}{dt},$$

woraus als vollständiges Integral

$$14)\qquad x = Ce^{2t} + C_1e^{-t}$$

hervorgeht. Zieht man jetzt die erste Gleichung in Nro. 13) von der zweiten ab, so fällt z weg und es bleibt die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} + x = 3\,Ce^{2t};$$

sie giebt:

$$15)\qquad y = Ce^{2t} + C_2e^{-t}.$$

Auf ganz gleiche Weise folgt durch Subtraction der ersten Gleichung in 13) von der dritten und nachherige Integration

$$16)\qquad z = Ce^{2t} + C_3e^{-t}.$$

Die Werthe von x, y, z enthalten zusammen vier Constanten, mit-

hin eine zuviel; substituirt man aber die für x, y, z gefundenen Ausdrücke in eine der Gleichungen 13), so ergiebt sich die Bedingung:

17) $$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

wodurch die normale Zahl der Constanten wieder herbeigeführt wird.

§. 120.

Simultane Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Das im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Verfahren erstreckt sich mit gleicher Leichtigkeit auch auf den Fall, wo die gegebenen simultanen Differentialgleichungen verschiedene höhere Differentialquotienten der abhängigen Variabelen x, y, z, ... s enthalten. Setzt man nämlich:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx''}{dt} = x''', \ldots.$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = y'', \quad \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dy''}{dt} = y''', \ldots.$$

u. s. w.

und sieht x', x'', x''', ... y', y'', y''', u. s. w. als neue Variabele an, so hat man wieder Gleichungen erster Ordnung, aber mit einer grösseren Anzahl von Variabelen. Die zwei simultanen Differentialgleichungen z. B.:

18) $$\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 2x, \quad \frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

lassen sich durch folgende vier Gleichungen ersetzen:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y',$$

$$\frac{dy'}{dt} = 2x - x', \quad \frac{dx'}{dt} = 2y - y',$$

welche von der ersten Ordnung sind, dagegen die vier abhängigen Variabelen x, y, x', y' enthalten. Um die erwähnte Methode anzuwenden, differenziren wir die letzte Gleichung und haben:

19) $$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2y' - \frac{dy'}{dt} = 2y' - (2x - x').$$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung lassen sich y und y' entwickeln, namentlich ist

$$2\frac{dx'}{dt}+\frac{d^2x'}{dt^2}=4y-2x+x',$$

oder, vermöge der Bedeutung von x',

20) $$y=\tfrac{1}{4}\left\{2x-\frac{dx}{dt}+2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^3x}{dt^3}\right\}.$$

Die nochmalige Differentiation der Gleichung 19) giebt

$$\frac{d^3x'}{dt^3}=2\frac{dy'}{dt}-2x'+\frac{dx'}{dt}=2(2x-x')-2x'+\frac{dx'}{dt}.$$

Hier kommt bereits kein y mehr vor, mithin dient die vorstehende Gleichung zur Bestimmung von x; man hat nämlich zufolge der Bedeutung von x'

$$\frac{d^4x}{dt^4}-\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}-4x=0.$$

Die zur Integration dieser linearen Differentialgleichung gehörende algebraische Gleichung ist

$$\lambda^4-\lambda^2+4\lambda-4=0,$$

oder auch

$$\lambda^4-(\lambda-2)^2=(\lambda^2+\lambda-2)(\lambda^2-\lambda+2)=0.$$

Die vier Wurzeln derselben sind

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=+1,\ \lambda_3=\frac{1+\sqrt{7}\sqrt{-1}}{2},\ \lambda_4=\frac{1-\sqrt{7}\sqrt{-1}}{2}$$

und daraus ergiebt sich für x der Werth

$$x=C_1e^{-2t}+C_2e^{+t}+C_3e^{\frac{1}{2}t}\cos(\tfrac{1}{2}t\sqrt{7})+C_4e^{\frac{1}{2}t}\sin(\tfrac{1}{2}t\sqrt{7});$$

y findet sich nachher mittelst der Formel 20). — Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass die Gleichungen 18) vermöge ihrer symmetrischen Form noch eine zweite Auflösungsart zulassen, bei welcher die Differentialgleichung vierter Ordnung vermieden wird. Die Summe der Gleichungen 18) ist nämlich:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=2(x+y),$$

d. h. wenn $x+y=s$ gesetzt wird:

$$\frac{ds}{dt}+\frac{d^2s}{dt^2}=2s.$$

Hieraus findet sich auf gewöhnlichem Wege:

$$s=Ae^{-2t}+Be^{+t}.$$

Wenn man jetzt in die erste Gleichung von Nro. 18) für y seinen Werth:

$$y=s-x=Ae^{-2t}+Be^{+t}-x$$

einführt, so gelangt man zu der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} + 4Ae^{-2t} + Be^{+t} - \frac{d^2x}{dt^2} = 2x,$$

die sich mittelst der Variation der Constanten leicht integriren lässt; man erhält so x, dann $y = s - x$.

In diesen Bemerkungen liegt die Hinweisung auf eine Modification des allgemeinen Verfahrens, welche in dem Falle eintreten kann, wo die gegebenen Differentialgleichungen symmetrisch sind in Beziehung auf die abhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$; man erleichtert sich nämlich die Integration, wenn man nicht sogleich auf die Bestimmung von $x, y, z, \ldots$ selbst ausgeht, sondern vorerst eine symmetrische Function von $x, y, z, \ldots$ als neue Unbekannte einführt und für diese eine Differentialgleichung zu gewinnen sucht. Ein bemerkenswerthes und für die Theorie der Centralbewegung wichtiges Beispiel hierzu bietet die Integration der beiden Differentialgleichungen

21) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Nach dem ursprünglichen Verfahren würde man y der ersten Gleichung zu entnehmen und in die zweite Gleichung einzusetzen haben, um eine Differentialgleichung vierten Grades zwischen x und t zu bekommen; die Integration der letzteren ist aber umständlich, und wir beabsichtigen daher vorerst eine Differentialgleichung zwischen t und der Hülfsvariabele

22) $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

zu erhalten. Aus den Gleichungen 21) folgt nun

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

die linke Seite ist ein vollständiger Differentialquotient, nämlich

$$= D_x\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right);$$

man hat daher durch Integration die Gleichung

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = A,$$

deren Quadrat, des Folgenden wegen, in nachstehender Gestalt dargestellt werden möge:

23) $$(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} - \left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right\}^2 = A^2.$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen 21)

$$2\frac{d^2x}{dt^2}dx + 2\frac{d^2y}{dt^2}dy = -2k\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Beide Seiten sind vollständige Differentiale; die linke Seite ist nämlich einerlei mit

$$d\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\},$$

und die rechte Seite gleicht dem Ausdrucke

$$-\frac{2k}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{2k}{r^2}dr = d\left(\frac{2k}{r}\right).$$

Die Integration führt daher zu der Gleichung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} - B.$$

Substituiren wir sie in Nro. 23) und bemerken gleichzeitig, dass dort

$$x^2 + y^2 = r^2,\ x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}$$

ist, so geht die Gleichung 23) in die folgende über:

$$r^2\left(\frac{2k}{r} - B\right) - \left(r\frac{dr}{dt}\right)^2 = A^2,$$

welche nur r und t enthält. Sie ist durch Sonderung der Variabelen integrabel und giebt der Reihe nach

$$r\frac{dr}{dt} = \sqrt{2kr - Br^2 - A^2},$$

und umgekehrt, wenn t_0 die Integrationsconstante bezeichnet,

$$t - t_0 = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{2kr - Br^2 - A^2}}.$$

Eine elegantere Form erhält das Integral mittelst der Bemerkung, dass

$$2kr - Br^2 - A^2 = B\left\{\left(\frac{k^2}{B^2} - \frac{A^2}{B}\right) - \left(\frac{k}{B} - r\right)^2\right\}$$

ist, wodurch man veranlasst wird, A und B durch neue Constanten a und ε zu ersetzen; für

$$A^2 = ka(1-\varepsilon^2),\quad B = \frac{k}{a}$$

wird nämlich

24) $$t - t_0 = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{k}{a}\left[a^2\varepsilon^2 - (a-r)^2\right]}}.$$

Die Ausführung dieser Integration hat an sich keine Schwierigkeit und würde eine Gleichung von der Form $t - t_0 = f(r)$ geben, die nachher umgekehrt werden muss, weil r als Function von t auszudrücken ist. Um zu sehen, worauf es dabei ankommt, führen wir in Nro. 24) eine neue Variabele ψ ein, indem wir

25) $$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi)$$

setzen; dadurch wird

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{k}} \int (1 - \varepsilon \cos \psi)\, d\psi = \sqrt{\frac{a^3}{k}} (\psi - \varepsilon \sin \psi).$$

Man hat demnach zuerst die transcendente Gleichung

26) $$\psi - \varepsilon \sin \psi = (t - t_0) \sqrt{\frac{k}{a^3}}$$

nach ψ aufzulösen, was in jedem speciellen Falle durch Versuche und nachherige Correctionen geschehen kann, und findet dann r mittelst der Formel 25). — Es handelt sich jetzt noch darum, x und y selbst zu bestimmen. Vermöge der Bedeutung von r sind $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ echte Brüche, deren Quadratsumme die Einheit ausmacht; es liegt daher nahe, $\frac{x}{r} = \cos \varphi$, mithin $\frac{y}{r} = \sin \varphi$ zu setzen, wo φ eine neue Variabele bezeichnet. Die Substitution der Werthe

27) $$x = r \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi$$

in die Gleichung

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = A = \sqrt{ka(1 - \varepsilon^2)},$$

verwandelt diese in

$$\begin{aligned} r \cos \varphi & \left\{ r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi \frac{dr}{dt} \right\} \\ & - r \sin \varphi \left\{ - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \frac{dr}{dt} \right\} \\ & = \sqrt{ka(1 - \varepsilon^2)}, \end{aligned}$$

d. i. sehr einfach

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{ka(1 - \varepsilon^2)}.$$

Bringt man r^2 und dt auf die rechte Seite, indem man für dt seinen Werth aus der Gleichung 24) einsetzt, so wird

$$\varphi = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \int \frac{dr}{r \sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (a - r)^2}},$$

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

und durch Substitution des nachherigen Ausdruckes $a(1 - \varepsilon \cos \psi)$ für r

$$\varphi = \sqrt{1-\varepsilon^2} \int \frac{d\psi}{1 - \varepsilon \cos \psi}.$$

Diese Integration ist nach Formel 14) in §. 77 leicht ausführbar, indem man $a = 1$, $b = -\varepsilon$, $u = \psi$ setzt und unterscheidet, ob der absolute Werth von ε kleiner oder grösser als die Einheit oder ihr gleich ist. Im erstern Falle, auf den wir uns hier beschränken, wird

$$\varphi = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \tfrac{1}{2} \psi \right) + \varphi_0,$$

wo φ_0 die Integrationsconstante ist; es folgt daraus

$$28) \qquad \tan \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \tfrac{1}{2} \psi.$$

Die gegebenen Differentialgleichungen werden also auf die Weise integrirt, dass man durch Auflösung der Gleichung 26) zunächst ψ durch t ausdrückt, hierauf r nach der Formel 25), φ nach Formel 28), endlich x und y mittelst der Gleichungen 27) bestimmt; dabei bleiben a, ε, t_0, φ_0 unbestimmt und sind die vier Integrationsconstanten.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

r. 530, 537

1-340

Druckfehler.

Seite 50 Z. 3 v. u. statt f'_x lies f'_y.
„ 60 Formel 5) statt $\varDelta x^3$ lies $\varDelta x^2$.
„ 68 Formel 12) statt $cos^{2k-1}\,V$ lies $cos^{2k+1}\,V$.
„ 77 Z. 12 v. o. statt $\frac{d^2y}{dx^3}$ lies $\frac{d^3y}{dx^3}$.
„ 255 Z. 12 v. u. statt $cos\, m\,\theta$ lies $cos\, m\,\theta + i\, sin\, m\,\theta$.
„ 309 Z. 2 v. o. statt $\frac{\beta x}{\alpha + \beta x}$ lies $\frac{\beta}{\alpha + \beta x}$.
„ 370 Z. 13 v. o. ist hinter dem Worte Basis der Buchstabe e einzuschalten.
„ 400 Fig. 67 gehört L_1 vertical unter N_1.
„ 419 Z. 9 v. u. statt $f(x)$ lies $f(y)$.
„ 426 Formel 8) statt $dx r$, lies dx, r.
„ 441 Z. 3 v. u. ist das Komma zwischen dx und dy zu streichen.
„ 443 Z. 10 v. o. statt $z\,dz\,dy$ lies $z\,dx\,dy$.
„ 450 Z. 19 v. o. statt $L\,Q\,\sqrt{2\,cx - x^2}$ lies $L\,Q = \sqrt{2\,cx - x^2}$.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Siebenstellige gemeine Logarithmen

der Zahlen von 1 bis 108000

und der

Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten

aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden

nebst einer

Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionaltheile.

Von

Dr. Ludwig Schrön,

Director der Sternwarte und Professor zu Jena, Mitgliede der Kaiserlich Leopold. Carolin. deutschen Academie der Naturforscher und der gelehrten Gesellschaften zu Breslau, Frankfurt a. M., Halle und Jena.

Dritte revidirte Stereotyp-Ausgabe. Gesammt-Ausgabe in drei Tafeln.

Imperial-Octav. geh. Preis 1 Thlr. 22½ Sgr.

Um auch einfachere Zwecke mit geringerem Kostenaufwande zu befriedigen, sind aus folgenden Theilen des Werkes für sich verkäufliche Ausgaben gebildet:

die Tafel I mit den Logarithmen der Zahlen, für Solche, welche Tafeln für trigonometrische Rechnungen nicht nöthig haben (Preis 20 Sgr.),

die Tafeln I und II mit den Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen, für Solche, welche auch für trigonometrische Rechnungen der Interpolationstafel nicht bedürfen (Preis 1 Thlr. 7½ Sgr.),

die Interpolationstafel, Tafel III, für Solche, welche diese Tafel für die erste Ausgabe oder für andere Tafeln anzuwenden wünschen (Preis 15 Sgr.), und

das Gesammtwerk, bestehend aus Tafel I, II nnd III, für Solche, welche alle Tafeln vollständig besitzen wollen (Preis 1 Thlr. 22½ Sgr.).

Jedem, welcher mit siebenstelligen Logarithmen zu rechnen veranlasst ist, dürften diese Tafeln willkommen sein, da sie in mehrfacher Hinsicht wesentliche Fortschritte enthalten. Während nämlich alle Werke über Logarithmen, welche auf bequemere Weise zugleich schärfere Resultate liefern, einen grösseren Umfang zu haben pflegen, gewähren diese Tafeln, verglichen mit anderen für dieselben Zwecke bestimmten, bei geringerem Umfange eine grössere Genauigkeit und eine bequemere Interpolation, besonders in dem schwierigsten Theile derselben, bei den kleinen trigonometrischen Functionen, wo die schriftlichen Hülfsrechnungen ganz vermieden werden.

Durch die unter der letzten Decimalstelle der Logarithmen angebrachten Striche ist die Grenze des Fehlers, welchen das Abschneiden aller folgenden Stellen mit sich bringt, auf die Hälfte vermindert. In Folge dieser Einrichtung gestatten auch die in der Einleitung nachgewiesenen drei Methoden für die Vereinigung der Proportionaltheile mit den Logarithmen einen verschiedenen Gebrauch der Tafeln I und II, je nach Gewohnheit und Bedürfniss, welcher Vortheil durch die Interpolationstafel (Tafel III) noch weiter unterstützt wird.

Ferner gewähren diese Tafeln eine bequemere und schärfere Rechnung mit sechsstelligen Logarithmen als die sechsstelligen Tafeln anderer Logarithmenwerke.

Ausserdem zeichnen sich diese Tafeln vor vielen anderen durch Correctheit aus, und wird in dieser Hinsicht bemerkt, dass ihre Aufstellung zur Entdeckung und Vermeidung von 555 (fünfhundert fünfundfunzig) Fehlern anderer Tafeln (einschliesslich der 31 Fehler in den Zahlen S und T der Callet'schen Tafeln) Veranlassung gegeben hat.

Endlich ist auf die Ausstattung die grösste Sorgfalt verwendet; insbesondere wird sich der Satz durch Ziffern von eigenthümlicher Klarheit und Schärfe, welche bei den lichten Zwischenräumen der Ziffern und Spalten dem Auge vollkommene Ruhe gewähren, sowie der sorgsame Druck auf sehr schönem und starkem Velin-Schreibpapier in bequemem Formate der Zustimmung des Publicums zu erfreuen haben. Kein Logarithmen-Werk irgend einer Nation, der Deutschen, Engländer oder Franzosen etc., dürfte hinsichtlich der Ausstattung und des billigen Preises die Vergleichung mit diesen Tafeln bestehen.

Um die in den Tafeln möglicherweise noch verbliebenen Fehler zu entfernen, sind Preise auf deren Entdeckung ausgesetzt worden.

Das Nähere ist aus der Vorrede und den Einleitungen zu entnehmen, welche der besonderen Beachtung der Leser empfohlen werden.

Für Diejenigen, welche viel mit Logarithmen arbeiten, aber an schwachen Augen leiden, sind eine Anzahl Exemplare auf meergrünem Velinpapier gedruckt, welche Färbung die Augen ausserordentlich schont. Diese Exemplare können für den gleichen Preis wie die auf weissem Papier bezogen werden.

Da wo Mehrere zum Ankaufe einer Anzahl von Exemplaren zusammentreten, für Lehranstalten etc. ist jede Buchhandlung in den Stand gesetzt auf 6 auf einmal bezogene Exemplare ein Freiexemplar zu gewähren.

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Ueber Gitter- und Bogenträger

und über

die Festigkeit

der

Gefässwände,

insbesondere über die Haltbarkeit der Dampfkessel und die Ursachen der Explosionen.

Zwei Monographien
zur Erweiterung der Biegungs- und Festigkeitstheorie.

Von

Dr. Hermann Scheffler,
Baurath.

Mit in den Text eingedruckten Holzstichen.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr. 15 Sgr.

Die erste dieser beiden Monographien enthält eine vollständige Theorie der Gitter- und Bogenträger, welche beide in der Baupraxis der heutigen Zeit eine so grosse Rolle spielen. Es werden darin mehrfache irrige Ansichten, welche über die Einrichtung dieser Baukonstruktionen herrschen, berichtigt; ausserdem bildet diese Schrift eine neue Erweiterung der allgemeinen Biegungs- und Festigkeitstheorie.

Die zweite Monographie ermittelt die Festigkeit der Gefässwände von verschiedener Form, also sowohl der ebenen, als der zylinder- und kugelförmigen, sowie der konkaven und der konvexen, welche hydrostatischen Druck auszuhalten haben. Die wichtigste Anwendung findet diese Untersuchung auf die Dampfkessel. Dieselbe wird sowohl für die Praxis des Maschinenwesens, als auch für die mathematischen Ingenieurwissenschaften von Interesse sein.

Müller-Pouillet's

Lehrbuch der Physik und Meteorologie.

Zwei Bände von circa 100 Bogen gr. 8.

Mit über 1500 in den Text eingedruckten Holzstichen, 13 Stahlstich-Tafeln, zum Theil in Farbendruck, und einer Photographie.

Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Erschienen ist: Erste und zweite Lieferung. Preis 1 Thlr.

Abermals ist eine neue Auflage dieses weit verbreiteten Lehrbuchs der Physik nöthig geworden.

Diese sechste Auflage ist eine durchweg neu bearbeitete; sie erscheint, wie die vorhergehenden, in zwei Bänden, jeder von einigen 50 Bogen, und wird in Doppellieferungen, jede zu 12 oder mehr Bogen, ausgegeben. Diese folgen sich, da die Bearbeitung weit vorgeschritten ist, so rasch, dass die letzte Lieferung des ersten Bandes noch im December d. J. zur Versendung kommen wird und auf die Vollendung der neuen Auflage des ganzen Werkes bis Ostern 1863 mit Bestimmtheit gerechnet werden kann.

Der Subscriptionspreis ist, unter Berücksichtigung der zahlreichen Illustrationen in Holzstich (über 1500), einer Anzahl schwarzen und farbig gedruckten Kupfertafeln, und der übrigen typographischen Ausstattung, ein sehr billiger, nämlich 1 Thlr. für jede Doppellieferung. Nur grosse Verbreitung eines Werkes, welches der regsten Theilnahme würdig ist, kann ihn motiviren.

Jede Buchhandlung ist ausserdem in den Stand gesetzt, auf 6 auf einmal bezogene Exemplare ein Frei-Exemplar zu bewilligen, was besonders für Lehranstalten und da, wo Mehre leicht für den Ankauf einer Anzahl von Exemplaren zusammentreten können, von Interesse sein möchte.

Die Verlagshandlung hat es sich ernstlich angelegen sein lassen, die Absichten des Herrn Verfassers, so weit ihr das möglich war, zu fördern. Zu dem Ende ist ein grosser Theil der Abbildungen neu gestochen, theilweise in grösserem Maassstabe, eine grosse Anzahl Abbildungen neuer Apparate sind hinzugekommen, und so correct und präcis in den Details ausgeführt, dass das Buch immer mehr auch eine hohe Bedeutung für den Mechaniker gewinnt, welcher in den meisten Fällen seine praktischen Arbeiten nach den jetzigen Abbildungen ausführen kann.

Oberm.

14. 11

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schlömilch, Oskar,

Compendium der höheren Analysis In 2 Bänden. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen

Bd.: 1

Braunschweig 1861

Math.p. 502 nkb-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082752-1